



METRO

MEtalurgiczny TRening *On-line*



Modelowanie matematyczne procesów transportu w mikroskali

Piotr Furmański

ITC PW



Edukacja i Kultura



Modelowanie zarodkowania



Tempo zarodkowania

$$\frac{dN}{dt} = f(T)N_s N_{cr}$$

gdzie:

N - gęstość objętościowa aktywnych zarodków

N_s - liczba cząsteczek na powierzchni zarodka

f - częstotliwość zderzeń cząsteczek z zarodkiem

N_{cr} - objętościowe stężenie zarodków o krytycznym wymiarze



Modelowanie zarodkowania

Częstotliwość zderzeń cząsteczek z zarodkiem

$$f(T) = f_0 \exp\left(-\frac{\Delta G_f}{kT}\right)$$

gdzie:

f_0 - częstotliwość przeskoków cząsteczek na powierzchnię zarodka

k - stała Boltzmannna

ΔG_f - energia aktywacji dla przemieszczania się cząsteczek na powierzchnię zarodka



Modelowanie zarodkowania

Stężenie zarodków o krytycznym wymiarze

$$N_{cr} = (N_0 - N_{cr}) \exp\left[-\frac{\Delta G^*}{kT}\right]$$

gdzie:

N_0 - początkowa gęstość objętościowa aktywnych zarodków

ΔG^* - zmiana objętościowej entalpii swobodnej dla zarodka o wymiarze krytycznym

$$\Delta G^* = \frac{16}{3} \frac{\pi \gamma_{sl}^3}{\Delta G_v^2}$$

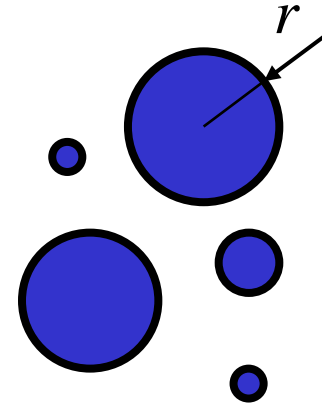
ΔG_v - zmiana objętościowej entalpii swobodnej związana z przemianą ciała stałego w ciecz



Modelowanie zarodkowania

Tempo zarodkowania jednorodnego

$$\frac{dN}{dt} = f^*(T) N_0 \exp\left[-\frac{\Delta G^*}{kT}\right]$$



gdzie:

$$\Delta G^* = \frac{16 \pi \gamma_{sl}^3}{3 \Delta G_v^2} = \frac{16 \pi \gamma_{sl}^3}{3} \left[\frac{T_m V_m}{L_m (T - T_m)} \right]^2$$

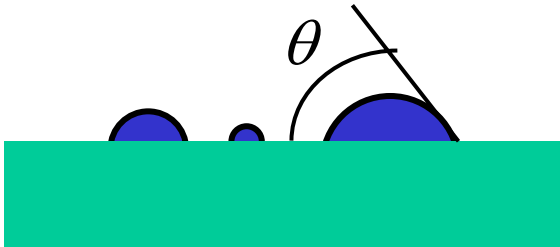
V_m - objętość molowa

f^* - zmodyfikowana częstotliwość zderzeń, $f^* = f N_s$



Modelowanie zarodkowania

Tempo zarodkowania heterogenicznego



$$\frac{dN}{dt} = f(T)N_0 \exp\left[-\frac{\Delta G^*}{kT}\right]$$

gdzie:

$$\Delta G^* = \frac{16 \pi \gamma_{sl}^3}{3 \Delta G_v^2} = \frac{16 \pi \gamma_{sl}^3}{3} \left[\frac{T_m V_m}{L_m (T - T_m)} \right]^2 F(\theta)$$

$$F(\theta) = (2 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)^2 / 4$$

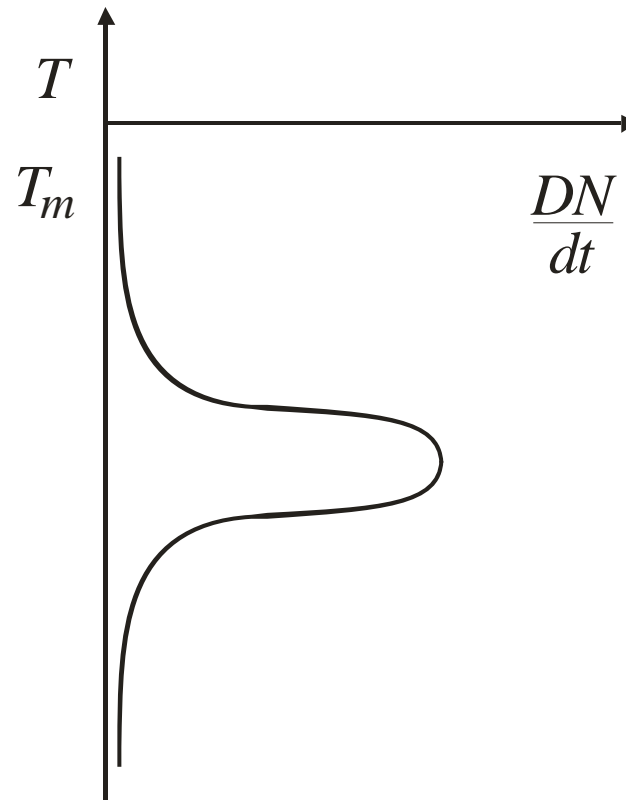
θ - kąt zwilżania przez zarodek



Modelowanie zarodkowania



Tempo zarodkowania jako funkcja temperatury





Modelowanie procesów transportu

- Procesy prowadzące do powstawania rozkładów temperatury i stężeń składników w stopach
 - Generacja ciepła na granicy cieczer/ciało stałe
 - Usuwanie ciepła przez ściany otaczające formę
 - Różne rozpuszczalności składników w fazach
- Podstawowe mechanizmy transportu energii i składników stopów
 - dyfuzja
 - unoszenie (konwekcja)

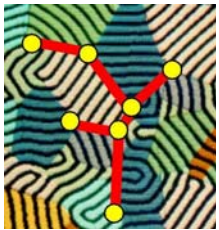


Modelowanie procesów transportu



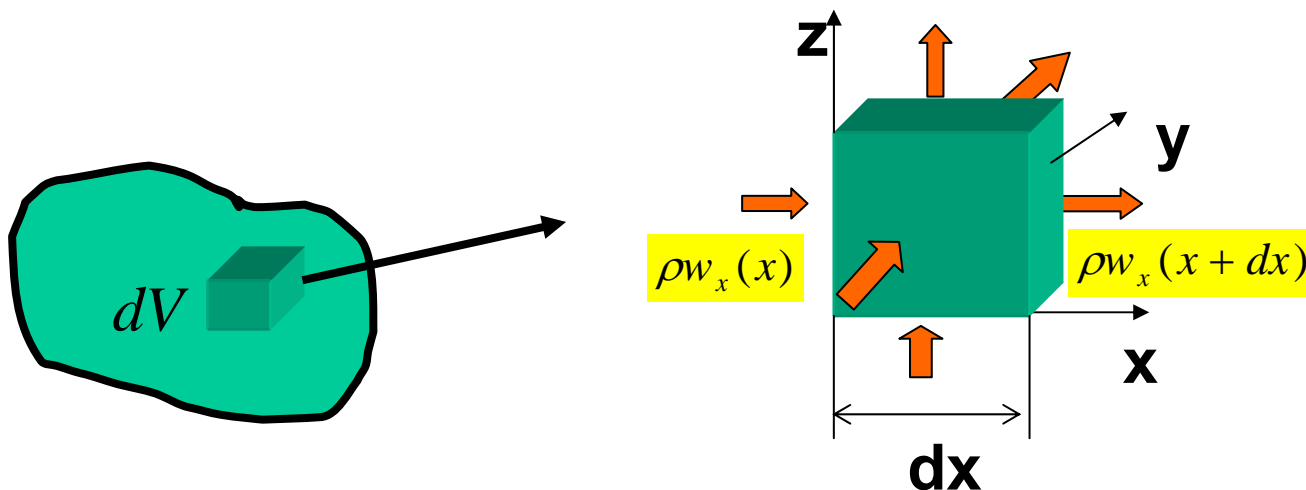
Podstawowe zależności potrzebne do modelowania matematycznego procesów transportu przy krzepnięciu stopów

- Równania bilansu masy, pędu, energii i składników w stopie
- Związki konstytutywne
- Równania bilansu masy, pędu, energii i składników na granicy międzyfazowej ciec/ciało stałe
- Warunki brzegowe i początkowe
- Związki termodynamiczne między zmiennymi



Modelowanie procesów transportu

Równanie ciągłości w fazie ciekłej



$$\frac{\partial m}{\partial t} = [\rho w_x(x) - \rho w_x(x + dx)]dydz + \\ + [\rho w_y(y) - \rho w_x(y + dy)]dxdz + [\rho w_z(z) - \rho w_x(z + dz)]dxdy$$

gdzie: m - masa, ρ - gęstość, w - prędkość cieczy



Modelowanie procesów transportu



Równanie ciągłości

$$\begin{aligned} [\rho w_x(x) - \rho w_x(x + dx)] dy dz &= \\ &= \rho w_x dy dz - (\rho w_x + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} dx) dy dz = -\frac{\partial \rho w_x}{\partial x} dV \end{aligned}$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\left(\frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z}\right) dV$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{w})$$

← RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI



Modelowanie procesów transportu



Równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{w}$$



człon unoszenia przez cieciz

Uwaga: dla ciecizy nieściśliwej

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

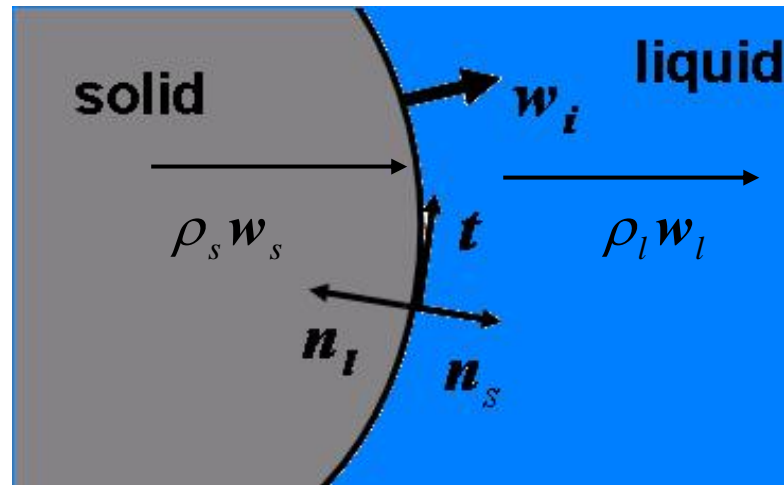


Modelowanie procesów transportu



Bilans masy na ruchomej granicy ciecz / ciało stałe

interface



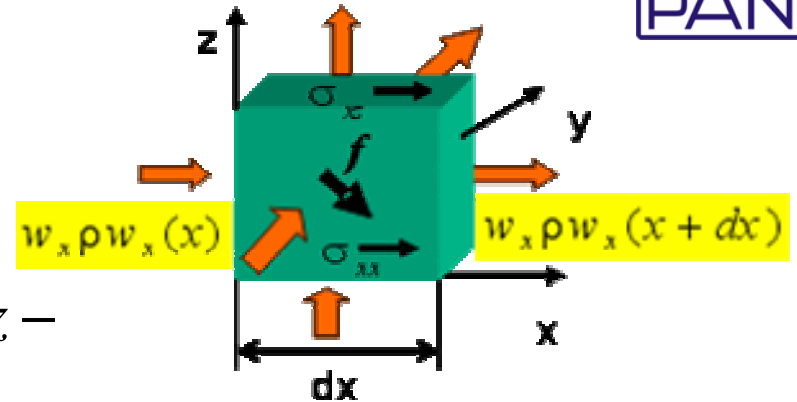
$$\rho_s (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_s + \rho_l (\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_s = 0$$



Modelowanie procesów transportu



Równanie pędu



$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial t} = & [w_x \rho w_x(x) - w_x \rho w_x(x + dx)] dydz - \\ & - [\sigma_{xx}(x) - \sigma_{xx}(x + dx)] dydz + [w_x \rho w_y(y) - w_x \rho w_y(y + dy)] dx dz - \\ & - [\sigma_{xy}(x) - \sigma_{xy}(x + dx)] dx dz + [w_x \rho w_z(z) - w_x \rho w_z(z + dz)] dx dy - \\ & - [\sigma_{xz}(x) - \sigma_{xz}(x + dx)] dx dy + \rho dV f_x \end{aligned}$$

gdzie:

$P_x = \rho dV w_x$ - x-składowa pędu elementarnej objętości dV

$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ - x-składowe tensora naprężeń

f_x - x-składowa siły masowej działającej na elementarną objętość ciecży



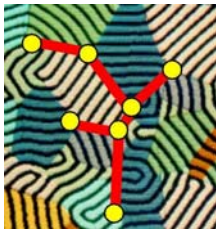
Modelowanie procesów transportu



Równanie pędu

$$\begin{aligned} [w_x \rho w_x (x) - w_x \rho w_x (x + dx)] dy dz &= \\ &= w_x \rho w_x dy dz - (w_x \rho w_x + \frac{\partial w_x \rho w_x}{\partial x} dx) dy dz = - \frac{\partial w_x \rho w_x}{\partial x} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sigma_{xx} (x) - \sigma_{xx} (x + dx)] dy dz &= \\ &= \sigma_{xx} dy dz - (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz = - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dV \end{aligned}$$



Modelowanie procesów transportu



Równanie pędu

$$\frac{\partial \rho w_x}{\partial t} dV = - \left(\frac{\partial w_x \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_x \rho w_z}{\partial z} \right) dV +$$
$$+ \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dV + \rho dV f_x$$



$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} = -\nabla \cdot (w \rho w - \sigma) + \rho f$$

← RÓWNANIE PĘDU



Modelowanie procesów transportu



Równanie pędu

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} = -\nabla \cdot (w \rho w - \sigma) + \rho f$$



$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + w \cdot \nabla \rho w = \nabla \cdot \sigma + \rho f$$



człon unoszenia



człon dyfuzji



Modelowanie procesów transportu

Związek konstytutywny dla równania pędu

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu_l \mathbf{e}(\mathbf{w})$$

gdzie:

p - ciśnienie

μ_l - lepkość cieczy

$\mathbf{e} = (\nabla \mathbf{w} + \nabla^T \mathbf{w})$ - tensor prędkości deformacji

$\nabla^T \mathbf{w}$ - transponowany gradient prędkości



Modelowanie procesów transportu



Równanie pędu dla cieczy

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu_l \mathbf{e}(\mathbf{w})$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{w} \rho \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}$$



$$\frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{w} \rho \mathbf{w}) = -\nabla p + \mu_l \nabla^2 \mathbf{w} + \rho \mathbf{f}$$



$$\rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \rho \mathbf{w} \cdot \nabla (\mathbf{w}) = -\nabla p + \mu_l \nabla^2 \cdot \mathbf{w} + \rho \mathbf{f}$$

**RÓWNANIE PĘDU
DLA FAZY CIEKŁEJ**





Modelowanie procesów transportu



Związki termodynamiczne - gęstość

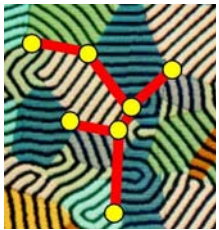
$$\rho(T, [C_j]) = \rho_o(T_r, [C_j]_r) \left[1 + \beta_T (T - T_r) + \sum_j \beta_{C_j} (C_j - C_{jr}) \right]$$

gdzie: β_T - współczynnik rozszerzalności termicznej

β_{C_j} - współczynnik rozszerzalności stężeniowej

Człony w równaniu pędu dla konwekcji swobodnej

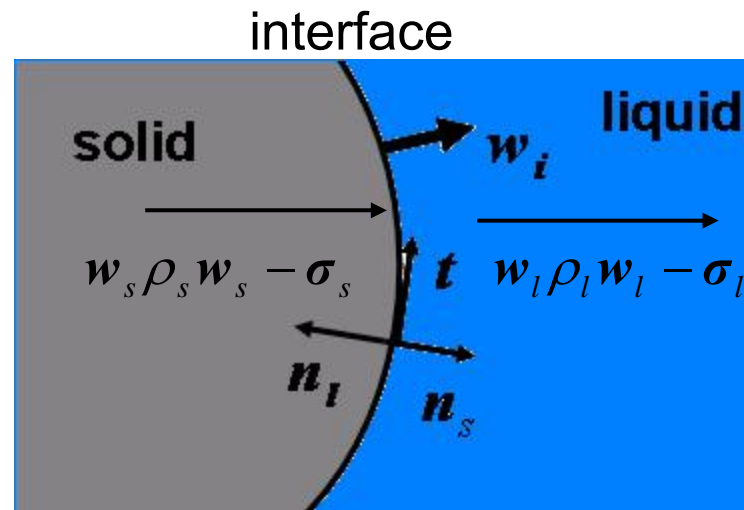
$$-\nabla p + \rho f = (\rho - \rho_o) f = \beta_T (T - T_r) + \sum_j \beta_{C_j} (C_j - C_{jr})$$



Modelowanie procesów transportu



Bilans pędu na granicy międzyfazowej
ciecz / ciało stałe



$$[\rho_s w_s (w_s - w_i) - \sigma_s] \cdot n_s + [\rho_l w_l (w_l - w_i) - \sigma_l] \cdot n_l = 2\kappa\gamma_{ls} n_s - \nabla \gamma_{ls} \cdot t$$

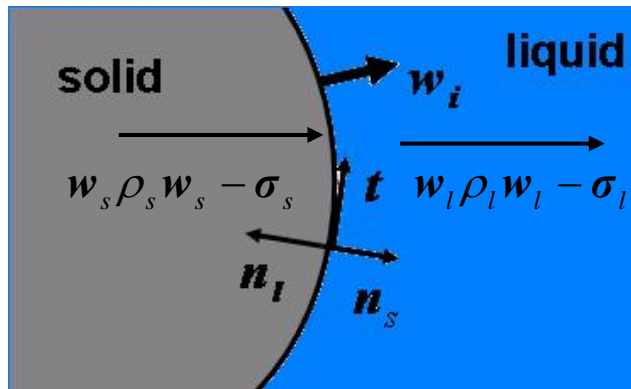
gdzie: κ - krzywizna granicy międzyfazowej



Modelowanie procesów transportu

Bilans pędu na ruchomej granicy międzyfazowej
ciecz / ciało stałe

interface



Z bilansu masy na granicy międzyfazowej

$$\rho_l (\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_l = -\rho_s (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_s$$



$$(\sigma_s - \sigma_l) \cdot \mathbf{n}_s = \rho_s (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_l) (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_l - 2\kappa \gamma_{ls} \mathbf{n}_s - \nabla \gamma_{ls} \cdot \mathbf{t}$$

gdzie: \mathbf{n} - jednostkowy wektor normalny do powierzchni
 \mathbf{t} - Jednostkowy wektor styczny do powierzchni



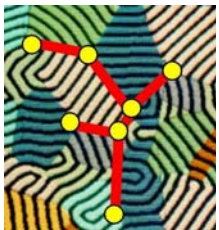
Modelowanie procesów transportu

Związki termodynamiczne – napięcie powierzchniowe

$$\gamma_{sl} = \gamma_{sl}(T, [C_j])$$

gdzie: C_j - Stężenie składnika j -tego (udział masowy)

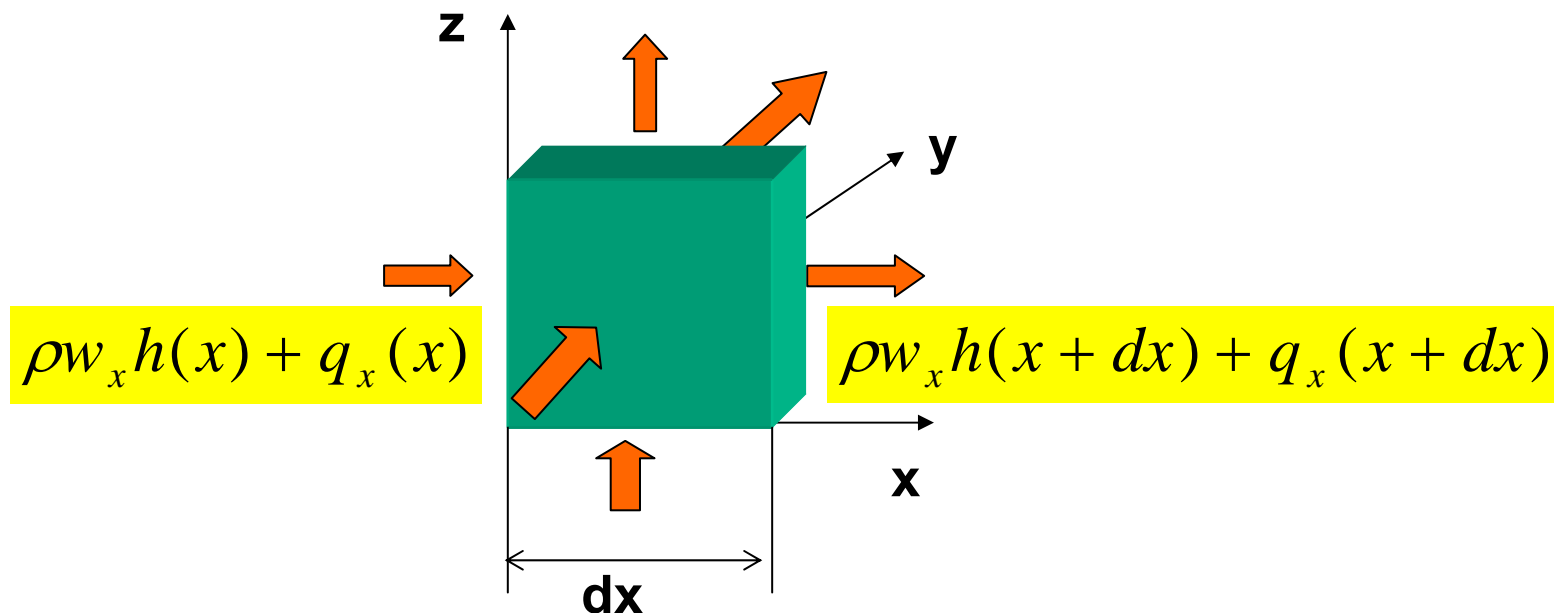
$$\nabla \gamma_{ls} \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial \gamma_{sl}}{\partial T} \nabla T \cdot \mathbf{t} + \sum_j \frac{\partial \gamma_{sl}}{\partial C_j} \nabla C_j \cdot \mathbf{t}$$



Modelowanie procesów transportu



Równanie energii



gdzie: h - entalpia właściwa

q - gęstość strumienia ciepła



Modelowanie procesów transportu



Równanie energii

$$\frac{\partial(\rho dVh)}{\partial t} = [(w_x \rho h(x) + q_x(x)) - (w_x \rho h(x + dx) + q_x(x + dx))] dy dz +$$
$$+ [(w_y \rho h(y) + q_y(y)) - (w_y \rho h(y + dy) + q_x(y + dy))] dx dz +$$
$$+ [(w_z \rho h(z) + q_z(z)) - (w_z \rho h(z + dz) + q_z(z + dz))] dx dy$$

$$[(w_x \rho h(x) + q_x(x)) - (w_x \rho h(x + dx) + q_x(x + dx))] dy dz =$$
$$= (w_x \rho h + q_x) dy dz - \left[(w_x \rho h + q_x) + \frac{\partial(w_x \rho h + q_x)}{\partial x} dx \right] dy dz =$$
$$= - \frac{\partial(w_x \rho h + q_x)}{\partial x} dV$$



Modelowanie procesów transportu



Równanie energii

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} dV = - \left[\frac{\partial (w_x \rho h + q_x)}{\partial x} + \frac{\partial (w_y \rho h + q_y)}{\partial y} + \frac{\partial (w_z \rho h + q_z)}{\partial z} \right] dV$$



$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{w} \rho h + \mathbf{q}) \quad \leftarrow \text{RÓWNANIE ENERGII}$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho h) = -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

człon unoszenia człon dyfuzji



Modelowanie procesów transportu

Związek konstytutywny dla gęstości strumienia ciepła

$$q = -\lambda \nabla T$$

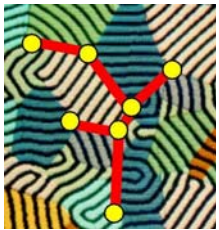


PRAWO FOURIERA

gdzie:

λ - współczynnik przewodzenia ciepła

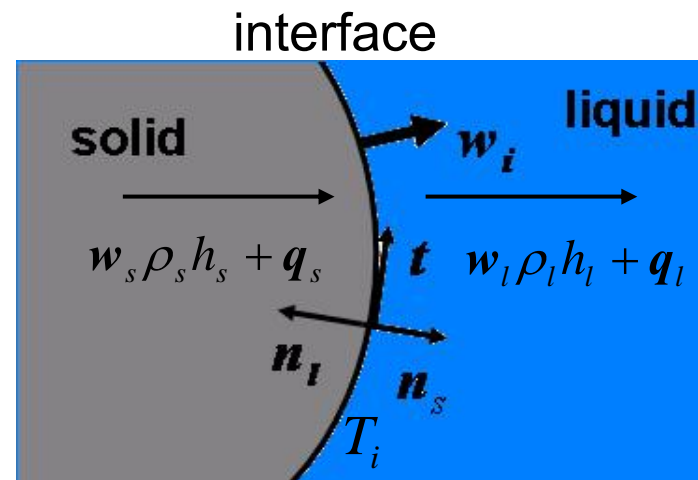
Współczynniki przewodzenia ciepła fazy ciekłej i stałej są różne i zależą od rodzaju substancji, temperatury, kierunku, składu i mikrostruktury fazy stałej



Modelowanie procesów transportu

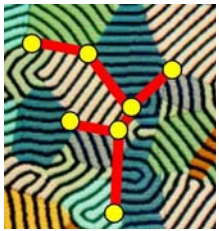


Bilans energii dla ruchomej granicy ciecz / ciało stałe



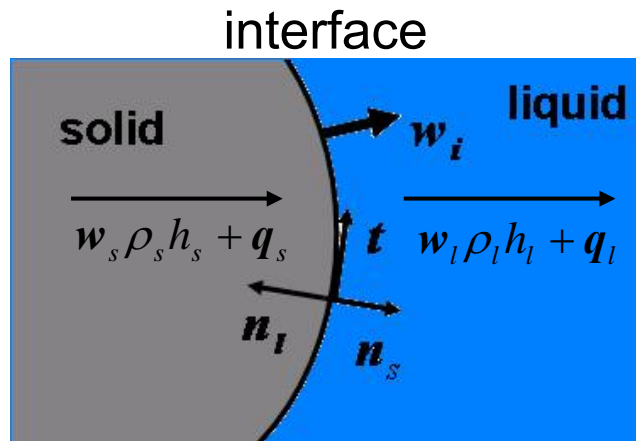
$$[\rho_s h_s (w_s - w_i) + q_s] \cdot n_s + [\rho_l h_l (w_l - w_i) + q_l] \cdot n_l = 0$$

$$T_i = T_m + m_l(w_i)C_l - \frac{RT^2}{L_m} \frac{w_i}{w_s} - \frac{2\gamma_{ls}V_a T_m}{L_m} K$$



Modelowanie procesów transportu

Bilans energii dla ruchomej granicy
ciecz / ciało stałe



Z bilansu masy dla granicy międzyfazowej

$$\rho_l (\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_l = -\rho_s (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_s$$



$$(q_s - q_l) \cdot \mathbf{n}_s = \rho_s (h_l - h_s) (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_l$$

ENTALPIA WŁAŚCIWA



$$h = h(T, [C_j])$$



Modelowanie procesów transportu



Związki termodynamiczne – entalpia właściwa

- dla fazy stałej

$$h_s(T, [C_j]) = h_r(T_r, 0) + \sum_j \int_0^{C_j} h_{js}^*(T_r, [C_j]) dC_j + \int_{T_r}^T c_s(T, [C_j]) dT$$

gdzie:

h_r - entalpia właściwa odniesienia

c_s - ciepło właściwe dla fazy stałej

h_{js}^* - entalpia cząstkowa dla fazy stałej



Modelowanie procesów transportu



Związki termodynamiczne – entalpia właściwa

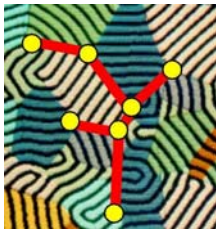
- dla fazy ciekłej

$$h_l(T, [C_j]) = h_r(T_r, 0) + \int_{T_r}^{T_m} c_s(T, 0) dT + L_f + \\ + \sum_j \int_0^{C_j} h_{jl}^*(T, [C_j]) dC_j + \int_{T_m}^T c_l(T, [C_j]) dT$$

gdzie: c_l - ciepło właściwe cieczy

L_f - ciepło krzepnięcia dla przeważającego składnika

h_{jl}^* - entalpia cząstkowa dla cieczy

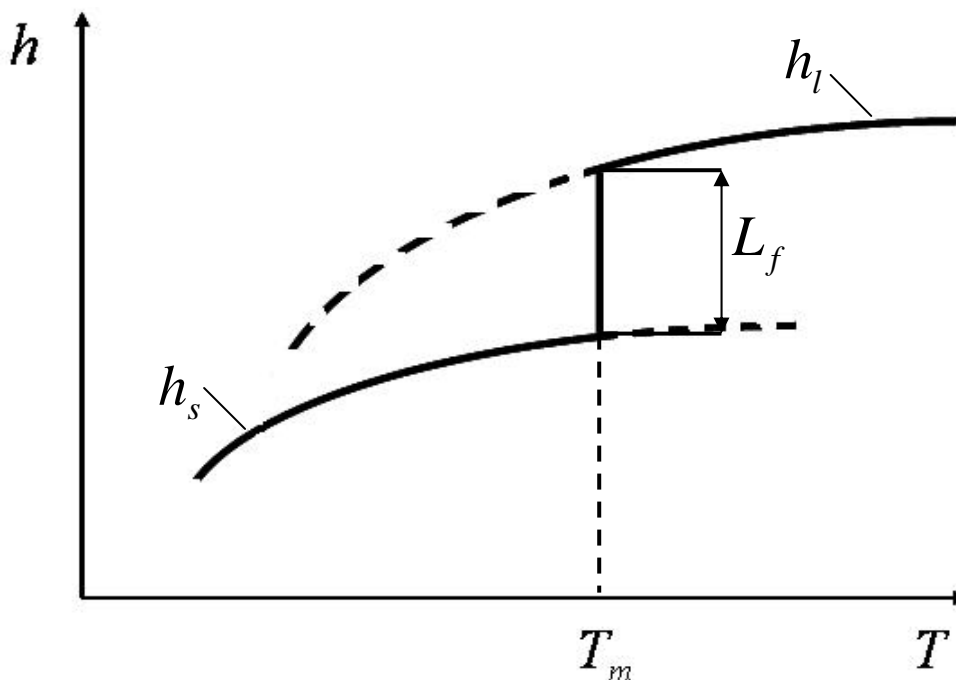


Modelowanie procesów transportu



Związki termodynamiczne – entalpia właściwa

Dla czystych substancji





Modelowanie procesów transportu



Związki termodynamiczne – entalpia właściwa

Dla stałych wartości ciepła właściwego i pomijalnego wpływu stężeń składników na entalpię właściwą (stopy o małej ilości dodatków)

- dla fazy stałej

$$h_s(T, [C_j]) = h_r(T_r) + c_s(T - T_r)$$

- dla fazy ciekłej

$$h_l(T, [C_j]) = h_r(T_r) + c_s(T_m - T_r) + L_f + c_l(T - T_m)$$

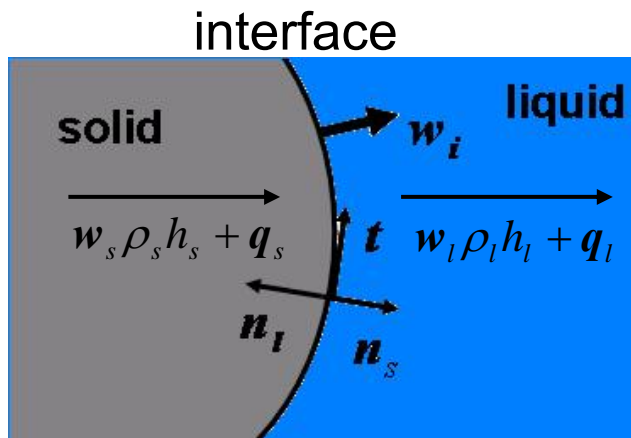


Modelowanie procesów transportu



Bilans energii na ruchomej granicy ciecz / ciało stałe

Dla nieruchomej fazy stałej, stałych wartości ciepła właściwego faz i przy pomijalnym wpływie stężenia składników na entalpię właściwą (mała ilość dodatków stopowych)



$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial n_s} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial n_s} = \rho_s (h_l - h_s) w_i$$

gdzie:

$$h_l - h_s = (c_s - c_l)(T_m - T_i) + L_f$$

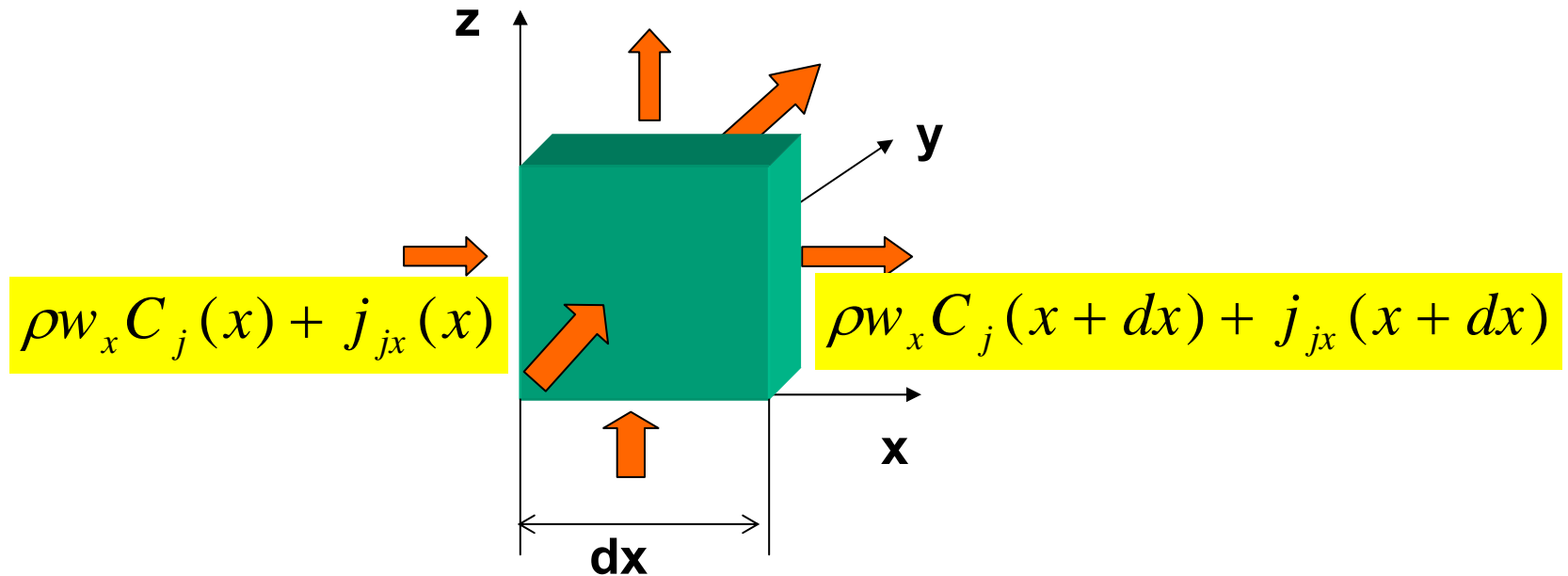
T_i - temperatura granicy międzyfazowej



Modelowanie procesów transportu



Bilans masy poszczególnych dodatków stopowych



gdzie:

C_j - stężenie j -tego składnika (udział masowy)

j_{jx} - x -składowa wektora gęstości strumienia masy j -tego składnika



Modelowanie procesów transportu



Bilans masy dodatków stopowych

$$\frac{\partial \rho C_j}{\partial t} = [(w_x \rho C_j(x) + j_{jx}(x)) - (w_x \rho C_j(x + dx) + j_{jx}(x + dx))] dy dz +$$

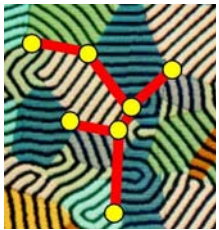
$$+ [(w_y \rho C_j(y) + j_{jy}(y)) - (w_y \rho C_j(y + dy) + j_{jy}(y + dy))] dx dz +$$

$$+ [(w_z \rho C_j(z) + j_{jz}(z)) - (w_z \rho C_j(z + dz) + j_{jz}(z + dz))] dx dy$$

$$[(w_x \rho C_j(x) + j_{jx}(x)) - (w_x \rho C_j(x + dx) + j_{jx}(x + dx))] dy dz =$$

$$= (w_x \rho C_j + j_{jx}) dy dz - \left[(w_x \rho C_j + j_{jx}) + \frac{\partial (w_x \rho C_j + j_{jx})}{\partial x} dx \right] dy dz =$$

$$= - \frac{\partial (w_x \rho C_j + j_{jx})}{\partial x} dV$$



Modelowanie procesów transportu



Bilans masy dodatków stopowych

$$\frac{\partial \rho C_j}{\partial t} dV = - \left[\frac{\partial (w_x \rho C_j + j_{jx})}{\partial x} + \frac{\partial (w_y \rho C_j + j_{jy})}{\partial y} + \frac{\partial (w_z \rho C_j + j_{jz})}{\partial z} \right] dV$$



$$\frac{\partial \rho C_j}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{w} \rho C_j + \mathbf{j}_j)$$



RÓWNANIE BILANSU
DODATKÓW STOPOWYCH



$$\frac{\partial \rho C_j}{\partial t} + \mathbf{w} \nabla (\rho C_j) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_j$$

człon unoszenia

człon dyfuzji



Modelowanie procesów transportu

Związek konstytutywny na gęstość strumienia masy *j*-tego dodatku stopowego

$$\mathbf{j}_j = -D_j \nabla C_j$$



PRAWO FICKA

gdzie:

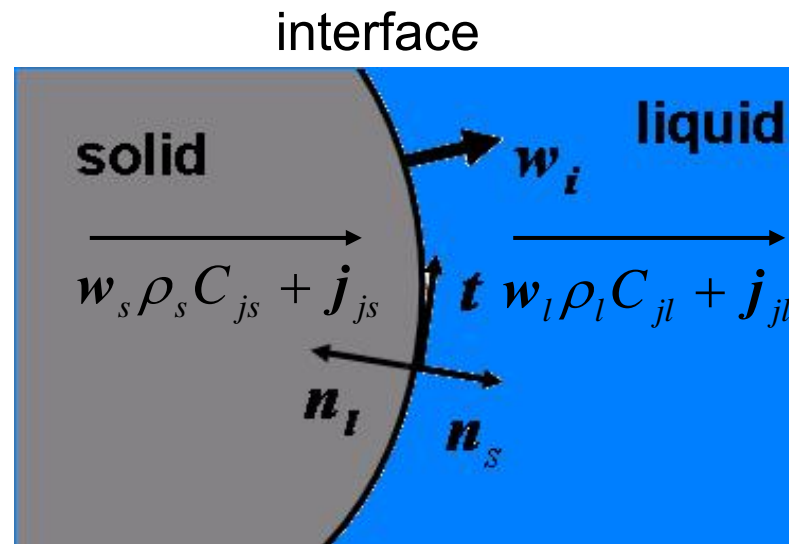
D_j - współczynnik dyfuzji *j*-tego dodatku stopowego

Współczynniki dyfuzji w fazie ciekłej i stałej znacznie się różnią i zależą od rodzaju substancji, temperatury, kierunku, składu i mikrostruktury fazy stałej

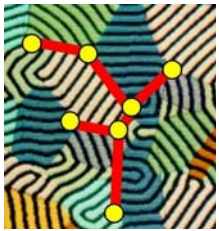


Modelowanie procesów transportu

Bilans masy *j-tego* dodatku stopowego na ruchomej granicy ciecisz / ciało stałe



$$[\rho_s C_{js} (w_s - w_i) + j_{js}] \cdot n_s + [\rho_l C_{jl} (w_l - w_i) + j_{jl}] \cdot n_l = 0$$

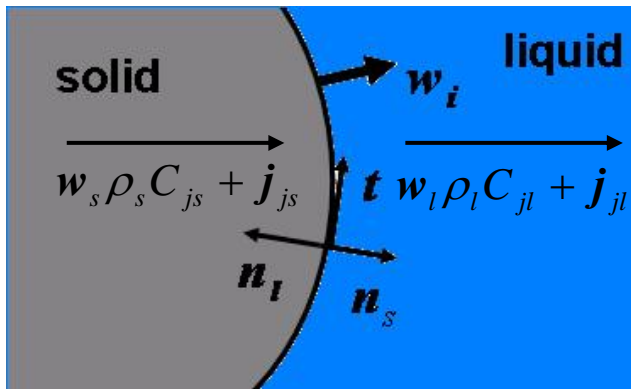


Modelowanie procesów transportu



Bilans masy *j-tego* dodatku stopowego na ruchomej granicy ciecz / ciało stałe

interface



Z równania bilansu masy na granicy międzyfazowej

$$\rho_l (\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_l = -\rho_s (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_s$$



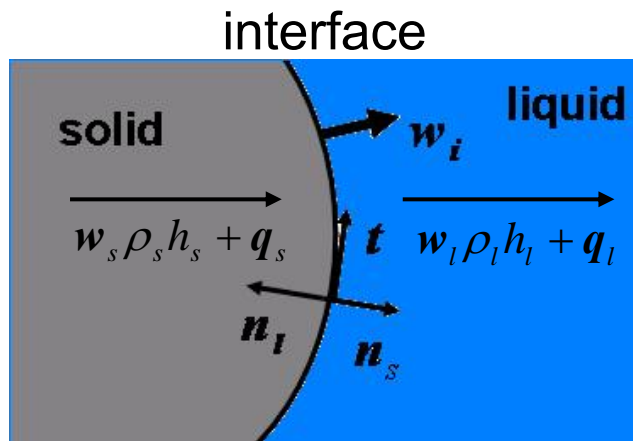
$$(\mathbf{j}_{js} - \mathbf{j}_{jl}) \cdot \mathbf{n}_s = \rho_s (C_{js} - C_{jl}) (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_l$$



Modelowanie procesów transportu



Bilans masy *j*-tego dodatku stopowego na ruchomej granicy ciecz / ciało stałe



Dla nieruchomej fazy stałej, stopu dwuskładnikowego i niewielkiej ilości dodatku stopowego

$$D_l \frac{\partial C_l}{\partial n_s} - D_s \frac{\partial C_s}{\partial n_s} = \rho_s (C_l - C_s) w_i$$

gdzie:

$$C_l - C_s = (1 - \kappa_p) C_l$$

κ_p - współczynnik rozdziału



Modelowanie procesów transportu

Równanie transportu masy j -tego dodatku stopowego na swobodnej powierzchni cieczy lub granicy ciecz - forma

$$\frac{\partial \rho C_j^s}{\partial t} = -\nabla_s \cdot (\mathbf{w} \rho C_j^s + \mathbf{j}_j^s) + S_j$$

gdzie:

C_j^s - powierzchniowe stężenie (udział masowy) j -tego dodatku stopowego

∇_s - operator dywergencji we współrzędnych powierzchniowych

\mathbf{j}_j^s - powierzchniowa gęstość strumienia masy j -tego dodatku

S_j - wymiana netto masy j -tego dodatku spowodowana adsorpcją



Modelowanie procesów transportu

Związki dla transportu masy j -tego dodatku stopowego na swobodnej powierzchni cieczy lub granicy ciecz - forma

$$\mathbf{j}_j^s = -D_j^s \nabla_s C_j^s$$

adsorpcja

desorpcja

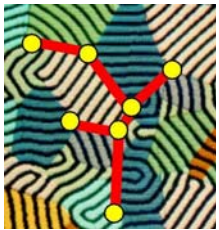
$$S_j = \mathbf{j}_j \cdot \mathbf{n}_l = \beta_{sj} C_j (C_{j\infty}^s - C_j^s) - \alpha_{sj} C_j^s$$

gdzie:

D_j^s - powierzchniowy współczynnik dyfuzji j -tego dodatku

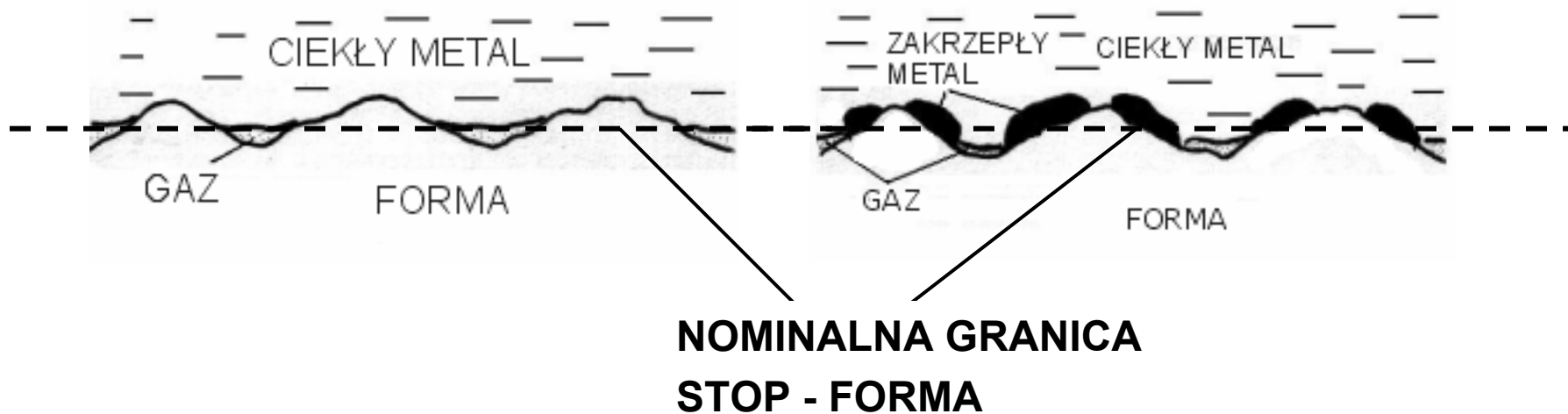
β_{sj}, α_{sj} - kinetyczne współczynniki adsorpcji i desorpcji

$C_{j\infty}^s$ - górne ograniczenie na stężenie j -tego dodatku stopowego dla przypadku adsorpcji w monowarstwie powierzchniowej



Modelowanie procesów transportu

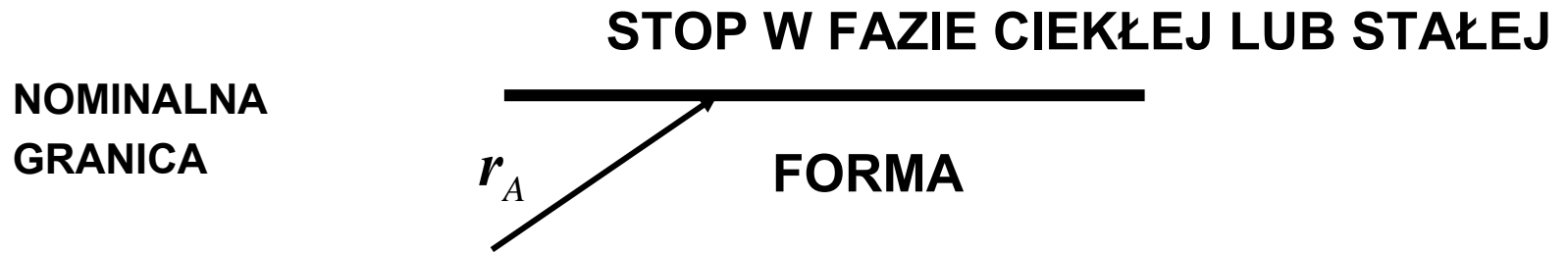
Wymiana ciepła na granicy faza ciekła lub stała /
powierzchnia formy





Modelowanie procesów transportu

Wymiana ciepła na granicy faza ciekła
lub stała / powierzchnia formy



$$q_A(\mathbf{r}_A) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_l = \alpha_T(\mathbf{r}_A)(T - T_w)$$

gdzie: α_T - lokalna termiczna konduktancja powierzchniowa

T_w - temperatura powierzchni formy



Modelowanie procesów transportu



Podsumowanie

Podstawowe równania opisujące krzepnięcie stopów zawierają:

- Modele zarodkowania
- Modele transportu energii i dodatków stopowych i ruchu faz