



METRO

MEtalurgiczny TRening *On-line*



Modelowanie komputerowe przemian fazowych w stanie stałym stopów ze szczególnym uwzględnieniem odlewów ADI

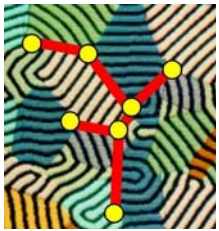
Wykład III: Metoda różnic skończonych dla transportu ciepła i masy

Wojciech Kapturkiewicz

AGH



Edukacja i Kultura



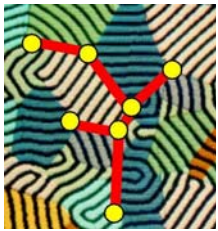
Metoda różnic skończonych

Wstęp

Procesy wymiany ciepła i masy w technologii ADI opisują równania paraboliczne, których rozwiązanie numeryczne przeprowadzić można Metodą Różnic Skończonych (*Finite Difference Method* - FDM) lub Metodą Elementów Skończonych (*Finite Element Method* - FEM).

Równanie przewodnictwa ciepła (prawo Fouriera) ma identyczną formę jak równanie transportu masy (prawo Ficka). W związku z powyższym te obydwa procesy rozważyć można na przykładzie jednego z nich, np. przewodzenia ciepła. Biorąc pod uwagę rozważania dotyczące transportu masy, w miejsce dyfuzyjności cieplnej " a ", wprowadzimy dyfuzyjność masy " D ", o tych samych jednostkach (m^2/s). Pewne różnice wystąpić mogą w przypadku warunków brzegowych, które są zaprezentowane w Wykładzie III, równania 3 - 10.

W niniejszym wykładzie zaprezentowano uproszczoną wersję FDM



Metoda różnic skończonych

(wersja uproszczona)

Rozwiązywanie równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych dokonuje się poprzez rozwiązywanie układu równań algebraicznych, których liczba równa jest liczbie węzłów siatki dyskretyzacji. Sposób przeprowadzenia dyskretyzacji zmiennych zostanie przedstawiony na przykładzie równania różniczkowego przewodzenia ciepła w jednowymiarowym płaskim stałym ciele, bez wewnętrznych źródeł ciepła, przy stałej wartości dyfuzyjności cieplnej "a" :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

gdzie: T – temperatura,
 τ - czas,
 x – współrzędna.



Metoda różnic skończonych

Lewą stronę równania możemy zastąpić pierwszym członem szeregu Taylora :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^k = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau} - \frac{\Delta \tau}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}\right)_i^k + \dots \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau}$$

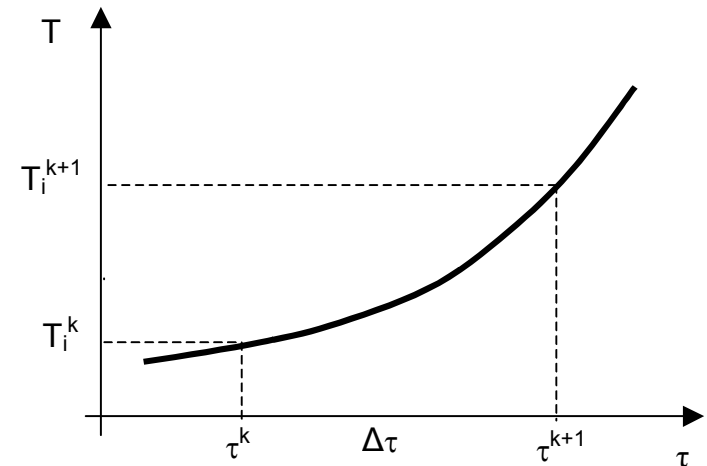
i w zależności od sposobu rozwinięcia pochodną zastępuje się ilorazem różnicowym

przednim (rys.1): $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^k = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau}$ (2)

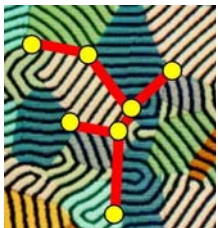
wstecznym: $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^k = \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\Delta \tau}$

lub centralnym : $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^k \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^{k-1}}{2 \Delta \tau}$

gdzie $\Delta \tau$ – krok czasowy



Rys.1. Funkcja temperatura – czas



Metoda różnic skończonych

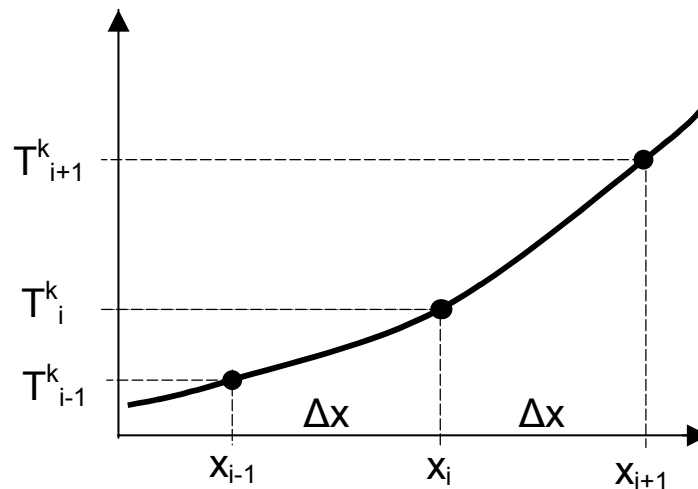


Najczęściej stosowane i najbardziej dogodne w obliczeniach jest przybliżenie lewej strony równania różniczkowego ilorazem różnicowym przednim.

Prawą stronę równania różniczkowego przewodzenia ciepła, czyli pochodną temperatury względem przestrzeni, oblicza się za pomocą ilorazu różnicowego centralnego drugiego rzędu (rys. 2):

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k \approx \frac{\frac{T_{i-1}^k - T_i^k}{\Delta x} - \frac{T_i^k - T_{i+1}^k}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{\Delta x^2} \quad (3)$$

gdzie Δx — krok przestrzenny



Rys.2. Funkcja temperatura - odległość



Metoda różnic skończonych

Metoda Cranka –Nicolsona

W metodzie Cranka-Nicolsona za przybliżoną wartość temperatury względem czasu iloraz różnicowy symetryczny w chwili $k+0,5$; daje ona wartości przybliżone oscylujące wokół wartości rozwiązania dokładnego.

Dla przybliżenia pochodnej temperatury przyjmuje się iloraz różnicowy przedni:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^{k+0,5} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau}$$

natomiast drugą pochodną temperatury względem współrzędnej przestrzeni zastępuje się średnią arytmetyczną ilorazów różnicowych symetrycznych drugiego rzędu w przedziałach czasu $k+1$ oraz k :



Metoda różnic skończonych

Metoda Cranka –Nicolsona

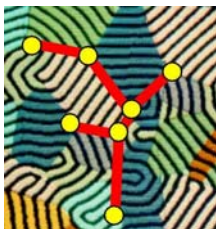
$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{k+0,5} \approx \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta x} - \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x} + \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta x} - \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} \right)$$

Podstawienie przybliżeń do (1) daje:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau} = \frac{a}{2(\Delta x)^2} \left(T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^k + T_{i-1}^k \right)$$

skąd po uwzględnieniu definicji liczby F otrzymuje się:

$$T_i^{k+1} = \frac{1-F}{1+F} T_i^k + \frac{F}{2(1+F)} \left(T_{i+1}^{k+1} + T_{i-1}^{k+1} + T_{i+1}^k + T_{i-1}^k \right)$$



Metoda różnic skończonych

Metoda Cranka –Nicolsona

Ze względu na dużą dokładność aproksymacji pochodnej istnieje możliwość zastosowania dużych kroków czasowych; z tej przyczyny metoda Cranka-Nicolsona uważana jest za najefektywniejszą metodę różnicową nieustalonego przewodzenia ciepła (dla układu 1-wymiarowego - 1D).

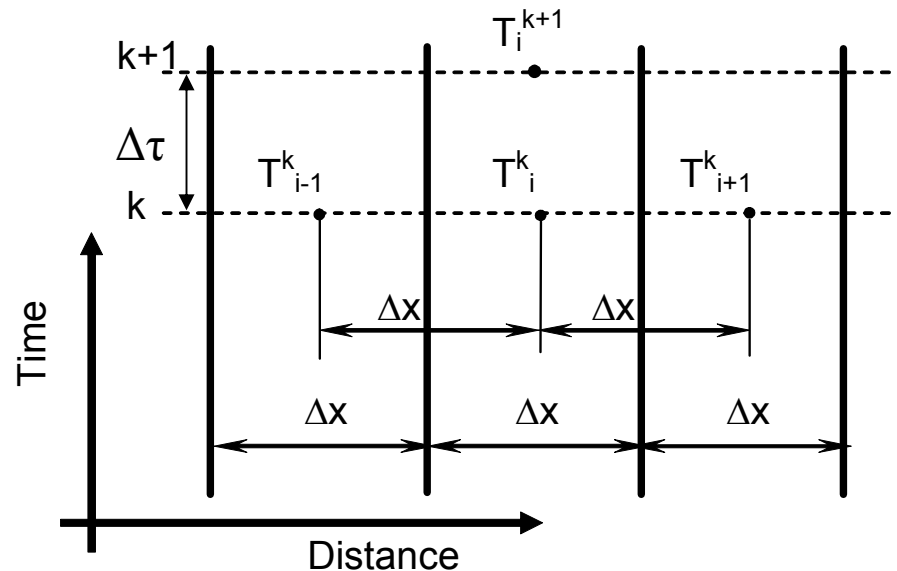


Metoda różnic skończonych

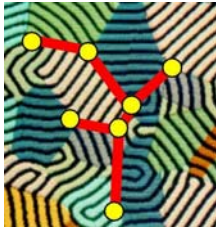
Metoda bilansów elementarnych

Równanie (4) wyprowadzić można poprzez zbilansowanie ustalonych strumieni cieplnych (lub strumieni masy). Sposób ten jest szczególnie przydatny przy zestawianiu równań dla siatki niejednorodnej, zawierającej zróżnicowane kroki przestrzenne, charakteryzujące się różnymi parametrami termofizycznymi.

Wydzielimy w przestrzeni jednowymiarowej trzy płaskie elementy o wymiarze liniowym Δx . Środki tych elementów na poziomie czasowym k mają temperatury odpowiednio T_{i-1}^k , T_i^k oraz T_{i+1}^k (Rys. 3).



Rys. 3. Schemat bilansu elementarnego



Metoda różnic skończonych

Metoda bilansów

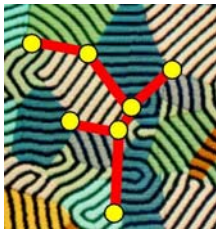
Zakładając w danym przedziale czasowym $\Delta\tau$ ustalony przepływ ciepła i stałe parametry termofizyczne λ , c i ρ , bilans cieplny dla środkowego elementu o temperaturze T_i można przedstawić następująco:

$$\frac{\lambda}{\Delta x} (T_{i-1}^k - T_i^k) \Delta\tau + \frac{\lambda}{\Delta x} (T_{i+1}^k - T_i^k) \Delta\tau = c\rho\Delta x (T_i^{k+1} - T_i^k) \quad (6)$$

gdzie λ , c , ρ - dyfuzyjność cieplna, ciepło właściwe i gęstość

Powyższy bilans przekształca się do postaci równania (4):

$$T_i^{k+1} = T_i^k (1 - 2F) + (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) F$$



Metoda różnic skończonych

Bezwymiarowa postać równania różnicowego

W obliczeniach można stosować dowolną skalę temperatury, a więc i zapis równania (4) w postaci:

$$\Theta_i^{k+1} = \Theta_i^k (1 - 2F) + (\Theta_{i-1}^k + \Theta_{i+1}^k)F$$

gdzie:

$$\Theta_{i-1}^k = \frac{T_{i-1}^k - T_{srf}}{T_0 - T_{srf}} \quad \Theta_{i+1}^k = \frac{T_{i+1}^k - T_{srf}}{T_0 - T_{srf}}$$

$$\Theta_{i-1}^k = \frac{T_{i-1}^k - T_{amb}}{T_0 - T_{amb}} \quad \Theta_{i+1}^k = \frac{T_{i+1}^k - T_{amb}}{T_0 - T_{amb}}$$

T_{srf} , T_{amb} – temperatura powierzchni i otoczenia



Metoda różnic skończonych

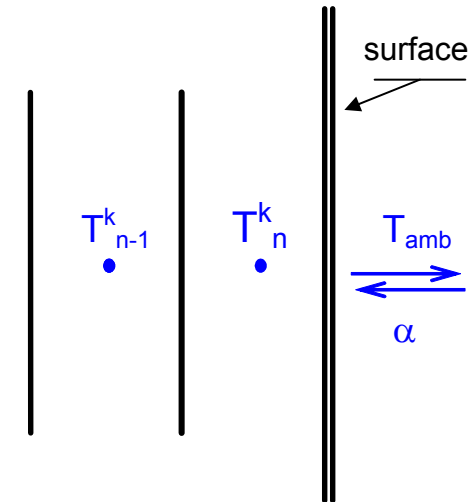
Równanie różnicowe dla warunku brzegowego

Warunek brzegowy 3-go rodzaju

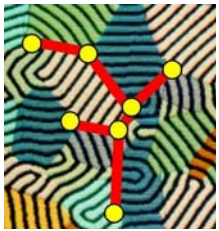
Równanie różnicowe dla temperatury elementu przy powierzchni ciała wyprowadzić można w oparciu o metodę bilansów elementarnych. Bilans cieplny zestawiony dla elementu przy powierzchni ma postać (rys. 4):

$$\frac{\lambda}{\Delta x} (T_{n-1}^k - T_n^k) \Delta \tau + \frac{T_{amb} - T_n^k}{\frac{\Delta x}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha}} \Delta \tau = c\rho\Delta x (T_n^{k+1} - T_n^k) \quad (7)$$

gdzie α - współczynnik wymiany ciepła, W/m^2K



Rys. 4



Metoda różnic skończonych

Warunek brzegowy 3-go rodzaju

Wyrażenie $\left(\frac{\Delta x}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha}\right)$ w równaniu (7) ma sens oporu cieplnego pomiędzy środkiem elementu a otoczeniem.

Przekształcając równanie (7) otrzymujemy::

$$T_i^{k+1} = T_i^k (1 - F - G) + T_{i-1}^k F + T_{i+1}^k G \quad (8)$$

$$\text{lecz dla } i = n \quad T_{i+1}^k = T_{amb} \quad G = \frac{2FN}{2 + N} \quad N = \frac{\alpha}{\lambda} \Delta x$$

Bezwymiarowy parametr N ma sens kryterium Biota, odniesionego do wymiaru elementu różnicowego Δx i można go nazwać różnicowym kryterium Biota. Wielkość G można natomiast nazwać różnicowym kryterium warunku brzegowego 3-go rodzaju.



Metoda różnic skończonych

Warunek brzegowy 3-go rodzaju

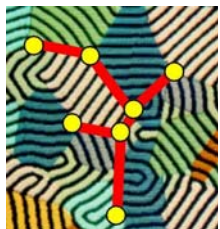
Warunkiem stabilności obliczeń według równania (8) jest, aby:

$$1 - F - G \geq 0$$

skąd $1 - F - \frac{2FN}{2 + N} \geq 0$

Z powyższej nierówności wynika, że: $N \geq \frac{2F - 2}{1 - 3F}$

Przy wcześniejszym założeniu, że $F < 1/3$, warunek powyższy jest zawsze spełniony, bowiem dla tej wartości F prawa strona nierówności przyjmuje wartość ujemną, zaś lewa (kryterium N), z racji sensu fizycznego, jest dodatnia.



Metoda różnic skończonych

Warunek brzegowy 3-go rodzaju

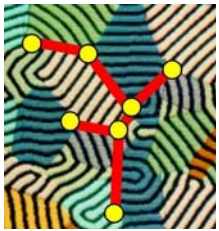
Równanie (8) korzystnie jest przedstawić w postaci bardziej uogólnionej:

$$T_i^{k+1} = T_i^k (1 - A_i - B_i) + T_{i-1}^k A_i + T_{i+1}^k B_i \quad (9)$$

Parametry A_i oraz B_i odzwierciedlają (dla przyjętego układu współrzędnych) oddziaływanie cieplne na element „ i ” elementu leżącego odpowiednio z lewej i prawej strony tego elementu (przy umownie przyjętym układzie współrzędnych).

Równanie (9) można traktować jako uogólniony zapis równania (4), przy czym kryterium A_i oraz B_i przyjmują wartość zależną od położenia elementu „ i ” w obszarze siatki 1D:

Kryterium/ Element nr	A_i	B_i
$i = 1$	0	F
$i \in (2, n-1)$	F	F
$i = n$	F	$\frac{2FN}{2+N}$



Metoda różnic skończonych

Uwzględnienie przemiany fazowej

Ciepło krystalizacji, stała temperatura przemiany

Najistotniejszą przemianą fazową w odlewach jest przejście metalu ze stanu ciekłego w stan stały, połączone z uwalnianiem utajonego ciepła przemiany, czyli ciepła krystalizacji. Na ile jest istotna ta przemiana ilościowo, ocenić to można, dzieląc wartość ciepła krystalizacji danego metalu lub stopu przez jego ciepło właściwe. Uzyskuje się wówczas liczbę H , wyrażoną w stopniach [K], którą można traktować jako „zapas temperaturowy ciepła krystalizacji”.

Dla typowego żeliwa:

ciepło krystalizacji $L = 270 \text{ J/g}$

ciepło właściwe $c = (0.753 + 0.837)/2 = 0.795 \text{ J/g K}$ (średnie ciepło właściwe dla stanu ciekłego i stałego)

otrzymujemy: $H = L/c = 270/0.795 \approx 340 \text{ K}$.



Metoda różnic skończonych

Ciepło krystalizacji

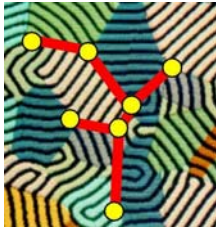
Wartość H , po podzieleniu przez temperaturę przemiany, daje wskaźnik istotności tego ciepła przemiany. Istotność ciepła przemiany S_L , przy założeniu temperatury krystalizacji dla żeliwa T_{kr} :

$$S_L = H/T_{kr} \approx 0.29$$

Można przyjąć, że od momentu osiągnięcia przez stygnący w stanie ciekłym metal temperatury przemiany, metal ten posiada „zapas temperaturowy ciepła krystalizacji”. Temperatura danego elementu nie spada poniżej temperatury krystalizacji do momentu wyczerpania „zapasu” temperatury, to znaczy dopóki będzie spełniony warunek:

$$\sum_k \Delta T_i^k \leq H \quad (10)$$

gdzie $\Delta T_i^k = T_{kr} - T_i^{k+1}$ - obniżenie temperatury w danym kroku czasowym poniżej temperatury krystalizacji .



Metoda różnic skończonych

Ciepło krystalizacji

Jeśli będzie spełniony warunek (10), wówczas temperatura pozostaje na stałym poziomie, czyli ($T_i^{k+1} = T_{kr}$). Czas zużycia zapasu temperatury H będzie czasem krystalizacji metalu w obszarze danego elementu różnicowego.



Metoda różnic skończonych

Ciepło krystalizacji

Krystalizacja w zakresie temperatury

Ciepło krystalizacji w zakresie temperatury ΔT_{kr} uwzględnić można poprzez zastosowanie pojęcia efektywnego ciepła właściwego::

$$c_{ef} = c + \frac{L}{\Delta T_{kr}} \quad (11)$$

gdzie $\Delta T_{kr} = T_{lik} - T_{sol}$

T_{lik} i T_{sol} - temperatura liquidus i solidus dla stopu

Jeżeli temperatura danego elementu różnicowego znajduje się w zakresie ΔT_{kr} , wówczas w miejsce F w równaniach różnicowych należy wprowadzić (dla $T_{sol} \leq T_i^k \leq T_{lik}$):

$$F_{ef} = \frac{a_{ef} \Delta \tau}{\Delta x^2} \quad (12)$$

gdzie $a_{ef} = \frac{\lambda}{c_{ef} \rho}$



Metoda różnic skończonych

Ciepło krystalizacji

Krystalizacja w zakresie temperatury

W przypadku, gdy dysponujemy funkcją spektralnego ciepła krzepnięcia η_T wówczas również można skorzystać z pojęcia efektywnego ciepła właściwego c_{ef} (oraz odpowiednio F_{ef}), obliczając jego wartości dla aktualnej temperatury metalu (temperatury danego przedziału różnicowego), przy założeniu że:

$$c_{ef} = c + \eta_T \quad (13)$$

gdzie $\eta_T = A_0 + A_1 T + A_2 T^2$

A_0, A_1, A_2 – regression coefficients

Wprowadzenie kryterium F_{ef} nie pogarsza stabilności obliczeń ze względu na jego mniejszą wartość w porównaniu z F .



Metoda różnic skończonych

Uogólniona postać równania dla układu jednowymiarowego

Przyjmujemy, że elementy różnicowe mogą charakteryzować się odmiennymi wymiarami i właściwościami termofizycznymi. Dla jednokierunkowego przewodzenia ciepła (rys. 3) elementarny bilans ciepła można zapisać:

$$\frac{(T_{i-1}^k - T_i^k)\Delta\tau}{\frac{\Delta x_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} + \frac{\Delta x_i}{2\lambda_i}} + \frac{(T_{i+1}^k - T_i^k)}{\frac{\Delta x_i}{2\lambda_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{2\lambda_{i+1}}} = c_i \rho_i \Delta x_i (T_i^{k+1} - T_i^k)$$

gdzie “ i ” –indeks parametru odniesionego do i -tego elementu

Po przekształceniu otrzymujemy postać równania (9):

$$T_i^{k+1} = T_i^k (1 - A_i - B_i) + T_{i-1}^k A_i + T_{i+1}^k B_i \quad (14)$$



Metoda różnic skończonych

Uogólniona postać równania dla układu 1D

gdzie

$$A_i = \frac{2F_i}{1 + \frac{\lambda_i \Delta x_{i-1}}{\lambda_{i-1} \Delta x_i}} \quad B_i = \frac{2F_i}{1 + \frac{\lambda_i \Delta x_{i+1}}{\lambda_{i+1} \Delta x_i}} \quad F_i = \frac{a_i \Delta \tau}{\Delta x_i^2} \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}$$

a warunek stabilności: $(A_i + B_i) \leq 1$

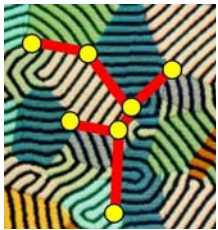
Jeśli założymy równomierny podział różnicowy, wówczas stałe w równaniu (14) przyjmują postać:

$$A_i = \frac{2F_i}{1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}} \quad B_i = \frac{2F_i}{1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}}$$

Jeśli elementy różnicowe będą dodatkowo charakteryzowały się jednakowymi współczynnikami przewodzenia ciepła (układ jednorodny), wówczas:

$$A_i = B_i = F$$

i równanie (15) przyjmie postać równania (4): $T_i^{k+1} = T_i^k (1 - 2F) + (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) F$

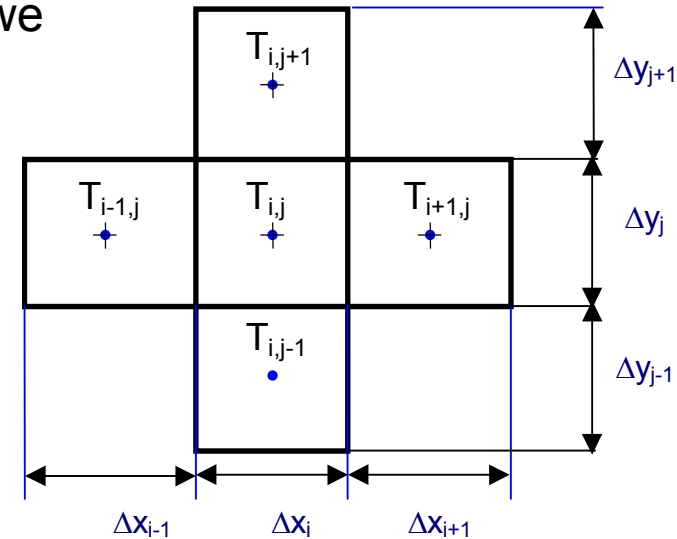


Metoda różnic skończonych

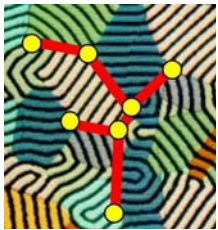
Układ dwuwymiarowy (2D)

Dla układu dwuwymiarowego siatki równanie różnicowe wyprowadzić można metodą elementarnych bilansów (rys. 5):

$$\begin{aligned} & \frac{(T_{i-1,j}^k - T_{i,j}^k)\Delta\tau\Delta y_j}{\frac{\Delta x_{i-1}}{2\lambda_{i-1,j}} + \frac{\Delta x_i}{2\lambda_{i,j}}} + \frac{(T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k)\Delta\tau\Delta y_j}{\frac{\Delta x_i}{2\lambda_{i,j}} + \frac{\Delta x_{i+1}}{2\lambda_{i+1,j}}} + \frac{(T_{i,j-1}^k - T_{i,j}^k)\Delta\tau\Delta x_i}{\frac{\Delta y_j}{2\lambda_{i,j}} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2\lambda_{i,j-1}}} + \\ & + \frac{(T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k)\Delta\tau\Delta x_i}{\frac{\Delta y_j}{2\lambda_{i,j}} + \frac{\Delta y_{j+1}}{2\lambda_{i,j+1}}} = c_{i,j} \rho_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j (T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k) \end{aligned}$$



(Rys. 5)



Metoda różnic skończonych

Układ 2D

i po przekształceniach względem temperatury w nowym kroku czasowym:

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k \left(1 - A_{i,j} - B_{i,j} - C_{i,j} - D_{i,j} \right) + A_{i,j} T_{i-1,j}^k + B_{i,j} T_{i+1,j}^k + C_{i,j} T_{i,j-1}^k + D_{i,j} T_{i,j+1}^k \quad (15)$$

gdzie

$$A_{i,j} = \frac{2F_{x_{i,j}}}{1 + \frac{\lambda_{i,j} \Delta x_{i-1}}{\lambda_{i-1,j} \Delta x_i}} \quad B_{i,j} = \frac{2F_{x_{i,j}}}{1 + \frac{\lambda_{i,j} \Delta x_{i+1}}{\lambda_{i+1,j} \Delta x_i}} \quad C_{i,j} = \frac{2F_{y_{i,j}}}{1 + \frac{\lambda_{i,j} \Delta y_{j-1}}{\lambda_{i,j-1} \Delta y_j}} \quad D_{i,j} = \frac{2F_{y_{i,j}}}{1 + \frac{\lambda_{i,j} \Delta y_{j+1}}{\lambda_{i,j+1} \Delta y_j}}$$

$$F_{x_{i,j}} = \frac{a_{i,j} \Delta \tau}{(\Delta x_i)^2} \quad F_{y_{i,j}} = \frac{a_{i,j} \Delta \tau}{(\Delta y_j)^2} \quad a_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{c_{i,j} \cdot \rho_{i,j}}$$



Metoda różnic skończonych

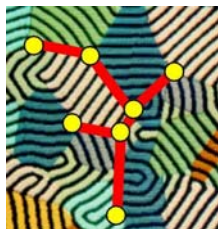
Układ 2D

Warunkiem stabilności rozwiązania równania (15) jest, aby:

$$A_{i,j} + B_{i,j} + C_{i,j} + D_{i,j} \leq 1$$

Dla regularnej siatki różnicowej ($A_{i,j} = B_{i,j} = C_{i,j} = D_{i,j} = F$), gdzie F jest kryterium wyznaczone równaniem (4), warunek stabilności wynosi:

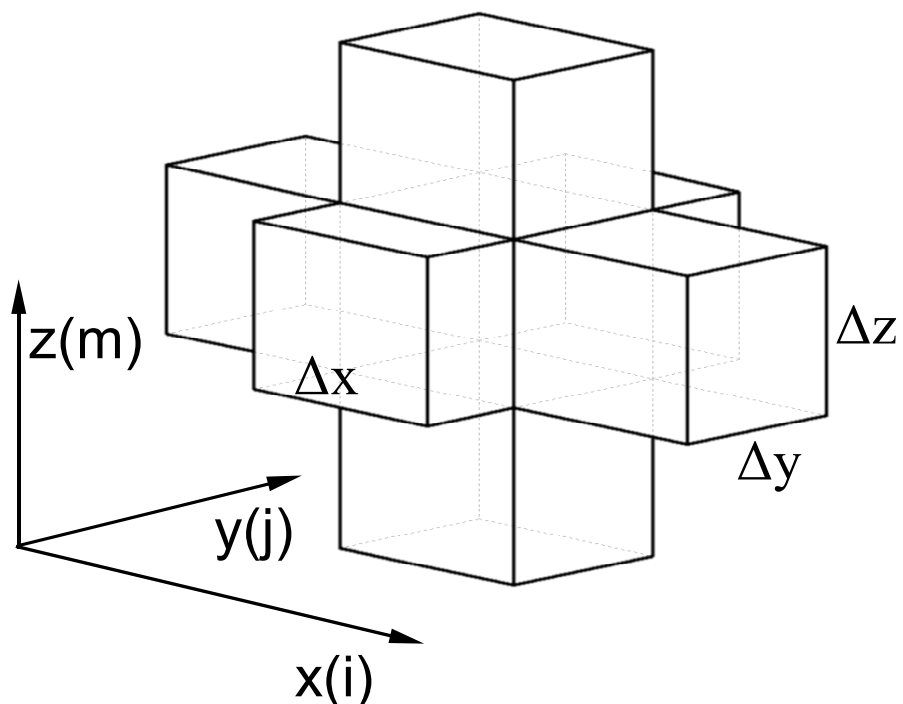
$$F \leq 0.25$$



Metoda różnic skończonych

Układ trójwymiarowy (3D)

Równanie różnicowe dla układu 3D uzyskać można poszerzając elementarny bilans cieplny, w porównaniu do układu 2D, o bilans w kierunku osi „z” (rys. 6). Równanie różnicowe przyjmuje wówczas postać



(Rys. 6)



Metoda różnic skończonych

Układ 3D

Dla układu 3D równanie można zapisać:

$$\begin{aligned} T_{i,j,m}^{k+1} = & T_{i,j,m}^k \left(1 - A_{i,j,m} - B_{i,j,m} - C_{i,j,m} - D_{i,j,m} - E_{i,j,m} - G_{i,j,m} \right) + \\ & + A_{i,j,m} T_{i-1,j,m}^k + B_{i,j,m} T_{i+1,j,m}^k + C_{i,j,m} T_{i,j-1,m}^k + D_{i,j,m} T_{i,j+1,m}^k + \\ & + E_{i,j,m} T_{i,j,m-1}^k + G_{i,j,m} T_{i,j,m+1}^k \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_{i,j,m} &= \frac{2Fx_{i,j,m}}{1 + \frac{\lambda_{i,j,m}\Delta x_{i-1}}{\lambda_{i-1,j,m}\Delta x_i}} & B_{i,j,m} &= \frac{2Fx_{i,j,m}}{1 + \frac{\lambda_{i,j,m}\Delta x_{i+1}}{\lambda_{i+1,j,m}\Delta x_i}} & C_{i,j,m} &= \frac{2Fy_{i,j,m}}{1 + \frac{\lambda_{i,j,m}\Delta y_{j-1}}{\lambda_{i,j-1,m}\Delta y_j}} & D_{i,j,m} &= \frac{2Fy_{i,j,m}}{1 + \frac{\lambda_{i,j,m}\Delta y_{j+1}}{\lambda_{i,j+1,m}\Delta y_j}} \\ E_{i,j,m} &= \frac{2Fz_{i,j,m}}{1 + \frac{\lambda_{i,j,m}\Delta z_{m-1}}{\lambda_{i,j,m-1}\Delta z_m}} & G_{i,j,m} &= \frac{2Fz_{i,j,m}}{1 + \frac{\lambda_{i,j,m}\Delta z_{m+1}}{\lambda_{i,j,m+1}\Delta z_m}} \end{aligned}$$



Metoda różnic skończonych



Układ 3D

Warunkiem stabilności równania (16) jest:

$$A_{i,j,m} + B_{i,j,m} + C_{i,j,m} + D_{i,j,m} + E_{i,j,m} + G_{i,j,m} \leq 1$$

Dla układu jednorodnego (elementy sześciennie z takim samym współczynnikiem przewodzenia ciepła) równanie (16) przyjmuje postać:

$$T_{i,j,m}^{k+1} = T_{i,j,m}^k (1 - 6F) + F (T_{i-1,j,m}^k + T_{i+1,j,m}^k + T_{i,j-1,m}^k + T_{i,j+1,m}^k + T_{i,j,m}^k + T_{i,j,m-1}^k + T_{i,j,m+1}^k) \quad (17)$$

gdzie F – kryterium różnicowe Fouriera związane z siatką jednorodną.

Warunkiem stabilności rozwiązania powyższego równania jest, aby $F \leq 1/6$ czyli otrzymuje się 3-krotnie ostrzejszy warunek niż w przypadku rozwiązania 1D.