

INTENSYFIKACJA PROCESU MIESZANIA W MIKRO-PRZEPŁYWACH

Projekt finansowany przez
Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego
Grant # N N501 0087 33

RAPORT KOŃCOWY

KIEROWNIK PROJEKTU
TOMASZ A. KOWALEWSKI

GŁÓWNI WYKONAWCY
SŁAWOMIR BŁOŃSKI & JACEK SZUMBARSKI

**INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

WARSZAWA 2010

INTENSYFIKACJA PROCESU MIESZANIA W MIKRO-PRZEPŁYWACH

grant Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego numer N N501 0087 33

RAPORT KOŃCOWY

SPIS TREŚCI:

1. Wstęp.....	4
2. Wybór konfiguracji geometrycznej ścianek kanału prowadzącej do destabilizacji przepływu	6
3. Analiza teoretyczna i numeryczna wpływu orientacji kierunku pofalowania względem gradientu ciśnienia	11
4. Analiza wpływu ścian bocznych na opory przepływu	12
5. Wpływ ścian bocznych na stateczność przepływu w pofalowanym kanale.....	13
6. Badanie nieliniowej saturacji zaburzenia przy pomocy modelu niskowymiarowego.....	14
7. Lagranżowska symulacja procesów mieszania	16
8. Analiza struktury przepływu w geometrii uproszczonej	21
9. Symulacja DNS przepływu cieczy w kanale z poprzecznym pofalowaniem ścianek metodą objętości skończonych	22
10. Analiza eksperymentalna wpływu pofalowania ścianek kanału na strukturę i charakter przepływu	24

SPIS ZAŁĄCZNIKÓW:

1. Załącznik nr 1: Opis metodyki symulacji DNS (Direct Numerical Simulation).....	28
2. Załącznik nr 2: Opis techniki PIV (Particle Image Velocimetry)	30
3. Załącznik nr 3: Analiza stateczności przepływu w kanale z pofalowanymi ścianami i dowolnie zorientowanym gradientem ciśnienia	45
4. Załącznik nr 4: Wpływ ścian bocznych na opory hydrauliczne przepływu	62
5. Załącznik nr 5: Wpływ ścian bocznych na stateczność przepływu	84

6. Załącznik nr 6: Nieliniowa ewolucja pola zaburzeń w przepływie	123
7. Załącznik nr 7: Analiza struktury przepływu w geometrii uproszczonej	135
8. Załącznik nr 8: Analiza numeryczna CFD wpływu rodzaju pofalowania geometrii na opory hydrauliczne, strumień ciepła oraz strukturę przepływu	149
9. Załącznik nr 9: Analiza eksperymentalna wpływu rodzaju pofalowania geometrii na opory hydrauliczne, strumień ciepła oraz strukturę przepływu	160
10. Załącznik nr 10: Spis publikacji powstałych w ramach projektu	213

1. WSTĘP

W projekcie podjęta została próba budowy mikrosystemu przepływowego intensyfikującego procesy wymiany masy i ciepła w zminiaturyzowanych urządzeniach konstruowanych współcześnie do analiz biologicznych i chemicznych, tzw. Lab-on-Chip. Podstawowym elementem badanego układu był system mieszania składników koniecznych dla przeprowadzenia żądanej reakcji chemicznej lub analizy. Zapewnienie wydajnego mieszania i efektywnego transportu cieczy stanowią nietrywialny problem dla urządzeń przepływowych w skali mikro z uwagi na brak turbulencji. Stąd też proces mieszania w takich przepływach polega głównie na bardzo powolnej dyfuzji molekularnej. Zaproponowana w projekcie metoda intensyfikacji mieszania opiera się na idei wymuszenia chaotycznej konwekcji w kanale o odpowiednio zmodyfikowanej geometrii ścianki. Wykazano, że odpowiednie dobranie charakterystyk geometrycznych pofalowania ścianki, dzięki wzmacnianiu szczególnej postaci zaburzeń (poprzeczny mod Squire'a), prowadzi do destabilizacji przepływu w kanale, aż do uzyskania nowej, złożonej formy ruchu. Dodatkowo pokazano, że zaproponowana modyfikacja geometrii ścianek kanału, w zakresie niskich liczb Reynoldsa, nie wprowadza żadnych dodatkowych oporów hydraulicznych przepływu.

Punktem wyjścia badań realizowanych w projekcie były wyniki uzyskane w pracach [1] i [2] dotyczące możliwości uzyskania efektu destabilizacji przepływu laminarnego w kanale pomiędzy równoległymi płaskimi ścianami (przepływu Poiseuille'a) poprzez wprowadzenie ich poprzecznego pofalowania (rys. 2.1). Wykazano możliwość radykalnego obniżenia krytycznej liczby Reynoldsa Re_L , nawet poniżej 60, tj. o dwa rzędy wielkości w porównaniu z konfiguracją wyjściową (dla przepływu Poiseuille'a wartość Re_L to 5772). Warunkiem destabilizacji przy tak niskich liczbach Reynoldsa jest wprowadzenie jednoczesnego pofalowania obu ścian, z przesunięciem w fazie o pół okresu (pofalowanie takie nazywane jest dalej symetrycznym). Długość fali powinna być przy tym około 3-krotnie większa niż średnia wysokość przekroju poprzecznego kanału. Efekt destabilizacji zależy od amplitudy pofalowania i w przypadku pofalowania sinusoidalnego o optymalnej długości fali osiąga maksimum dla amplitudy równej ok. 20% średniej wysokości kanału. Okazuje się również, że dokładny kształt pofalowania ma znaczenie drugorzędne, istotne jest jedynie, aby w widmie fourierowskim pofalowania występowała wielkość harmoniczna o odpowiedniej długości fali i dostatecznie wielkiej amplitudzie. Wynik ten ma istotne znaczenie praktyczne, oznacza bowiem, że przygotowanie pofalowania gwarantującego skuteczną destabilizację nie powinno narażać na trudności technologiczne.

Innym wynikiem o istotnym znaczeniu praktycznym było stwierdzenie, że pofalowanie o parametrach odpowiednich dla destabilizacji przepływu przy niskich liczbach Reynoldsa nie tylko nie zwiększa, ale nawet w pewnym stopniu redukuje opór hydrauliczny! Ta cecha różni zasadniczo pofalowanie poprzeczne od powszechnie stosowanego pofalowania zorientowanego wzdłużnie, gdzie wzrost oporów hydraulicznych w porównaniu z konfiguracją „gładką” jest typowy i często bardzo znaczący.

Analizę struktury przepływu przez zaproponowany kanał, jak i optymalizację jego geometrii, wykonano w pracach podzielonych na trzy etapy. W pierwszym wykonano analizę teoretyczno-numeryczną przepływu (niskowymiarowa aproksymacja Galerkina, analiza stateczności i nieliniowej saturacji zaburzeń oraz efektywności i transportu masy) w kanale o różnych konfiguracjach geometrycznych. Dzięki temu zaproponowano najbardziej optymalną geometrię, w której efekt destabilizacji przepływu zachodzi przy najniższej liczbie Reynoldsa

oraz zidentyfikowano tę najniższą, teoretyczną liczbę Reynoldsa (tzw. krytyczną wartość liczby Reynoldsa), powyżej której każde najmniejsze zaburzenie przepływu będzie ulegać wzmacnianiu. Jednocześnie wytypowano kilka dodatkowych wariantów modyfikacji geometrii, których analiza pozwoli określić wpływ zmian geometrii na obserwowaną destabilizację przepływu.

W drugim etapie pracy przeprowadzono symulacje numeryczne przepływu w wytypowanych w etapie pierwszym geometriach. Obliczenia wykonano jako tzw. bezpośrednie symulacje numeryczne (DNS – Direct Numerical Simulations), dające dokładne i pełne rozwiązania równań Naviera-Stokesa, które ściśle opisują analizowany przepływ płynu przez rozważane kanały. Jako wynik otrzymano dokładne charakterystyki przepływu, dla wszystkich skal, zarówno czasowych jak i przestrzennych. Pozwoliło to wstępnie zweryfikować poprawność założeń przyjętych w rozważaniach teoretycznych, jak i potwierdzić optymalny dobór analizowanych geometrii. Opis użytej metody numerycznej zamieszczony został w niniejszym opracowaniu jako Załącznik 1.

Końcowym etapem pracy, było przeprowadzenie analizy eksperymentalnej przepływu w geometriach zaproponowanych w etapie pierwszym (analiza teoretyczna) i wstępnie zweryfikowanych w etapie drugim (symulacje numeryczne). W przeciwieństwie do modeli teoretycznych i numerycznych eksperymentalny kanał ma skończoną długość. Sprawdzenia wymagało więc czy dla realnych w praktyce wymiarów można osiągnąć wystarczająco duże wzmocnienie przewidywanych modelem zaburzeń poprzecznych przepływu. W tym celu wykonano eksperymentalne modele kanału w 5 wariantach konfiguracji geometrycznej ścianek oraz jeden kanał bazowy, o ściankach niezmodyfikowanych (klasyczny przepływ Poiseuille’a). Pozwoliło to określić wpływ wytypowanych modyfikacji geometrycznych kanału na przepływ płynu przez ten kanał, w odniesieniu do przepływu Poiseuille’a przez kanał o ściankach płaskich. Wstępną, jakościową analizę eksperymentalną przeprowadzono jako powtórzenie doświadczenia Reynoldsa w analizowanych kanałach. Dzięki wprowadzeniu niewielkiego strumienia zabarwionej cieczy do przepływu, określono wstępnie moment utraty stabilności przepływu i zawężono zakres liczb Reynoldsa, dla których wykonano dalsze, już ilościowe pomiary interesujących parametrów przepływu. Kolejnym krokiem prac eksperymentalnych były pomiary oporów hydraulicznych dla poszczególnych geometrii. Pomiary ciśnienia wykonano różnicowo pomiędzy 4 wybranymi punktami wzdłuż kanału, co pozwoliło precyzyjnie wyznaczyć panujący gradient ciśnienia, niezakłócony wlotem i wylotem z kanału. Pomiary te wykonano na specjalnie zaprojektowanym i zbudowanym stanowisku, pozwalającym mierzyć różnicowo ciśnienia z dokładnością poniżej 1Pa. Dzięki temu możliwe było potwierdzenie przypuszczeń teoretycznych i wyników numerycznych, że zaproponowana modyfikacja geometrii kanałów nie wprowadza istotnych, dodatkowych oporów hydraulicznych przepływu. Jako kolejny krok analizy, wykonano precyzyjne pomiary struktury pola prędkości wykorzystując bezinwazyjną technikę μ PIV, pozwalającą na uzyskanie dwuwymiarowych pól prędkości analizowanego przepływu (opis techniki μ PIV zamieszczony został jako Załącznik 2). W pomiarach tych dokładnie określono krytyczną liczbę Reynoldsa, która rozdziela zakresy, w których początkowe zaburzenia ulegają wygaszaniu lub wzmacnianiu. Porównanie otrzymanych pól prędkości z polami uzyskanymi teoretycznie i numerycznie, pozwoliło określić poprawność obliczeń teoretycznych oraz numerycznych. Jako końcowy etap prac wykonano analizę wpływu zaproponowanej modyfikacji geometrycznej kanału na intensywność wymiany ciepła pomiędzy ściankami kanału a cieczą nim płynącą. Do pomiarów tych wykorzystano nowatorską technikę pomiaru pola temperatury opartą na pokryciu analizowanej powierzchni warstwą zawiesiny ciekłokrystalicznej (tzw. TLC – Termohromic Liquid Crystals), których

barwa silnie zależy od lokalnej temperatury powierzchni nimi pomalowanej. W przeciwieństwie do punktowych pomiarów jakie wykonano wykorzystując termo sondy PT100, zmiana barwy pokrycia ciekłokrystalicznego pozwala na ocenę zmian temperatury dla całej analizowanej powierzchni, minimalizując błędy spowodowane lokalnymi fluktuacjami temperatury. Odpowiednie dobranie warunków chłodzenia/grzania ścianek kanału oraz temperatury przepływającej kanałem cieczy chłodzącej, po uprzednim wykalibrowaniu wskazań warstwy ciekłokrystalicznej, pozwoliło na wyznaczenie intensywności wymiany ciepła w funkcji liczby Reynoldsa i rodzaju modyfikacji ścianek kanału.

2. WYBÓR KONFIGURACJI GEOMETRYCZNEJ ŚCIANEK KANAŁU PROWADZĄCEJ DO DESTABILIZACJI PRZEPŁYWU

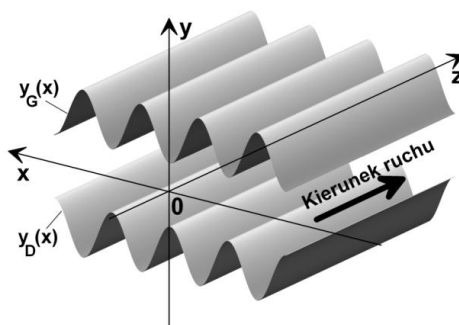
W ramach niniejszego projektu podjęto próbę wyznaczenia wpływu kształtu geometrii ścianek kanału na strukturę przepływu przez taki kanał oraz na intensywność destabilizacji przepływu. Wykonano analizę teoretyczną, numeryczną oraz eksperymentalną w szeregu konfiguracji geometrycznych, co pozwoliło znaleźć optymalną geometrię kanału oraz określić zależność pomiędzy kształtem ścianek i zachowaniem się przepływu.

Zaproponowany kanał utworzony jest przez dwie sinusoidalnie pofalowane powierzchnie, przedstawione na rysunku 2.1. Kształt pofalowania ścian kanału opisany jest za pomocą bezwymiarowych, x-okresowych funkcji:

$$y_D(x) = -1 + S \cos(\alpha x),$$

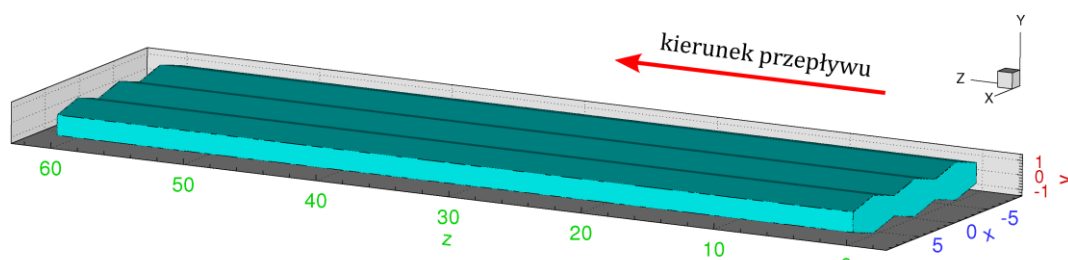
$$y_G(x) = 1 - S \cos(\alpha x),$$

gdzie $S \geq 0$ jest amplitudą pofalowania, a α jego liczbą falową. Przepływ płynu w kanale odbywa się w kierunku rosnących wartości osi z, tak jak wskazuje czarna strzałka na rysunku.

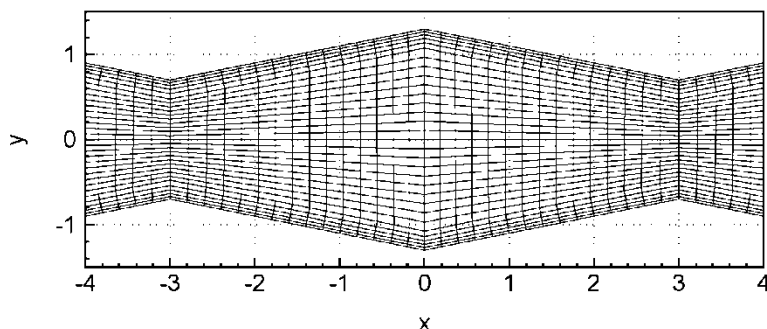


Rys. 2.1. Schematyczny obraz pofalowania poprzecznego ścianek kanału z naniesionym układem współrzędnych i zaznaczonym kierunkiem przepływu płynu

W początkowej fazie badań przeanalizowano teoretycznie i numerycznie uproszczoną geometrię kanału, gdzie sinusoidalne pofalowanie zastąpiono ściankami składającymi się z płaskich powierzchni, jak na rysunkach 2.2 i 2.3. Taka modyfikacja geometrii podyktowana została chęcią wygenerowania na potrzeby wstępnych obliczeń geometrii o jak najmniejszym stopniu skomplikowania oraz o jak najmniejszej liczbie węzłów siatki obliczeniowej.



Rys. 2.2. Geometria kanału zdefiniowana na potrzeby symulacji numerycznych, z zaznaczonym czerwoną strzałką kierunkiem przepływu wzdłuż osi z



Rys. 2.3. Przekrój poprzeczny przez fragment kanału o uproszczonej geometrii z naniesioną siatką obliczeniową. Symulowany przepływ odbywa się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku

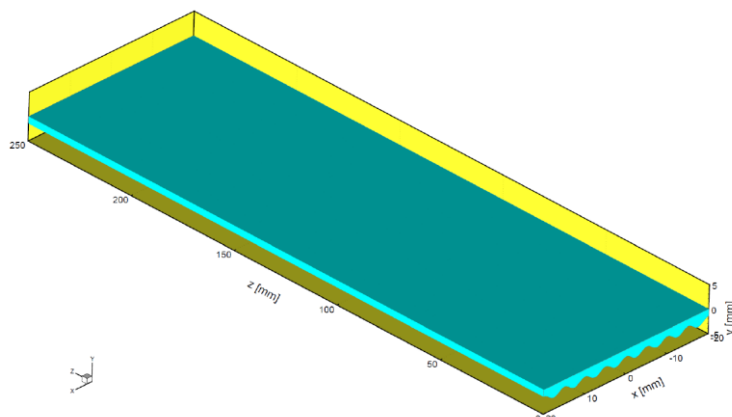
Wstępne jakościowe badania eksperymentalne, mające na celu próbę potwierdzenia poprawności przewidywań teoretycznych i symulacji numerycznych, wykonane zostały w uproszczonym modelu mikrokanałów wykonanym z poliwęglanu, pokazanym na rysunku 2.4. Model ten został wykonany na precyzyjnej mikro-frezarce numerycznej i składał się z 20 segmentów pofalowania. Jego minimalna i maksymalna wysokość wynosiły odpowiednio 0.4mm i 1mm (średnia wysokość była równa 793 μ m), długość 75mm, zaś całkowita szerokość 33.6mm. W celu zapewnienia niezakłóconego dostępu optycznego do wnętrza kanału, górną ściankę wykonano jako płaską powierzchnię. Umożliwiło to rejestrację obrazów bez zniekształceń, które spowodowałyby krzywizna powierzchni, przez którą prowadzona by była obserwacja.



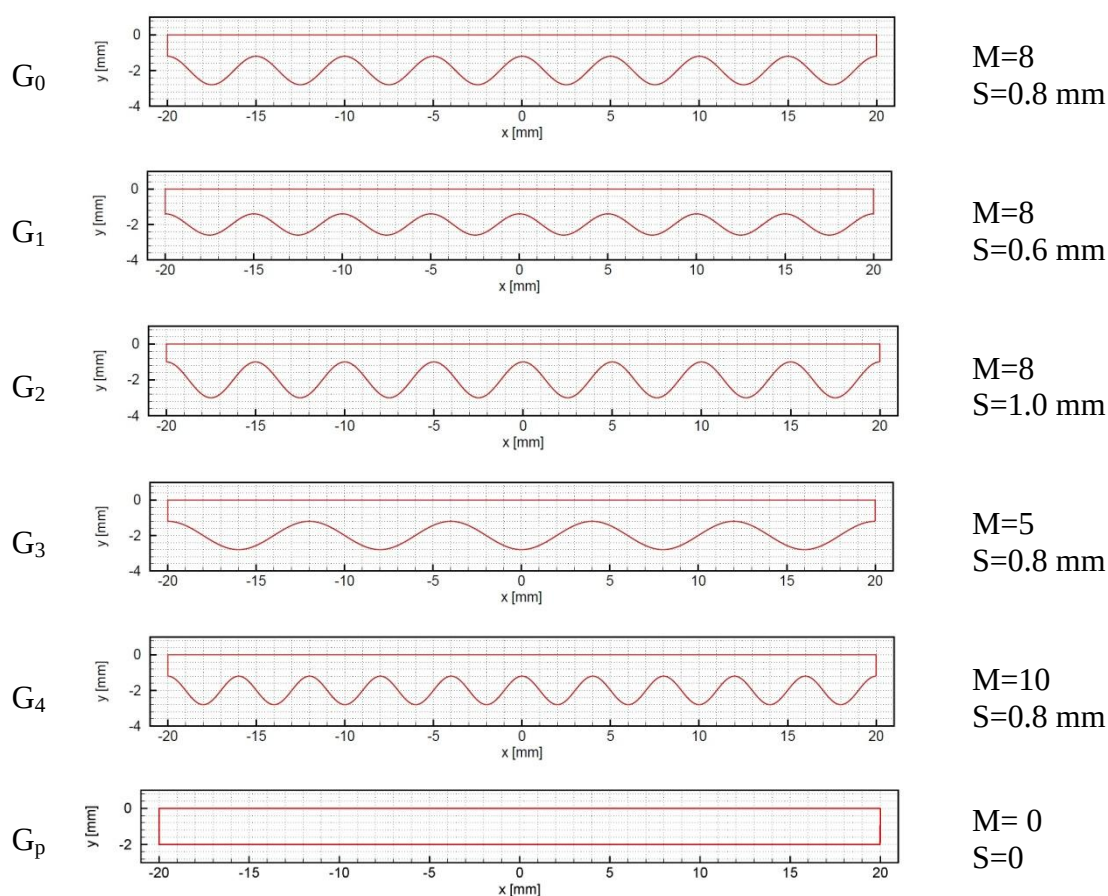
Rys. 2.4. Wstępny model eksperymentalny kanału z pofalowanymi ściankami wykonany z poliwęglanu, składający się z 20 segmentów pofalowania; ścianka górna jest płaska, aby zapewnić niezakłócony dostęp optyczny do wnętrza kanału.

Dzięki wstępnym analizom teoretyczno-numerycznym i eksperymentalnym, wykonanym w uproszczonych geometriach, możliwe było zaproponowanie geometrii optymalnej kanału oraz podanie zakresu modyfikacji geometrycznych, których analiza pozwoli w sposób parametryczny opisać wpływ geometrii ścian na zachowanie się przepływu. Stwierdzono

m.in. konieczność zwiększenia wymiarów modelu na tyle aby długość rozwijania się profilu przepływu i ewentualnego wzmacniania niestabilności była rzędu stu średnic pojedynczego kanału. Wymiary kanałów uległy powiększeniu do kilku milimetrów, tak aby ułatwić pomiar pól prędkości. Z tego względu dalsze badania wykonano zgodnie z nomenklaturą mikroprzepływów w milikanalach.



Rys. 2.5. Ostateczny system kanałów zdefiniowany na potrzeby symulacji numerycznych oraz badań eksperymentalnych. Długość całkowita systemu 250mm, szerokość 40mm. W zależności od konfiguracji analizowanego systemu w dolnej ścianie wyżłobiono od 5 do 10 milikanalów.



Rys. 2.6. Szkice przekrojów poprzecznych wybranych konfiguracji geometrycznych kanału wraz z liczbą okresów pofalowania M oraz amplitudą pofalowania S.

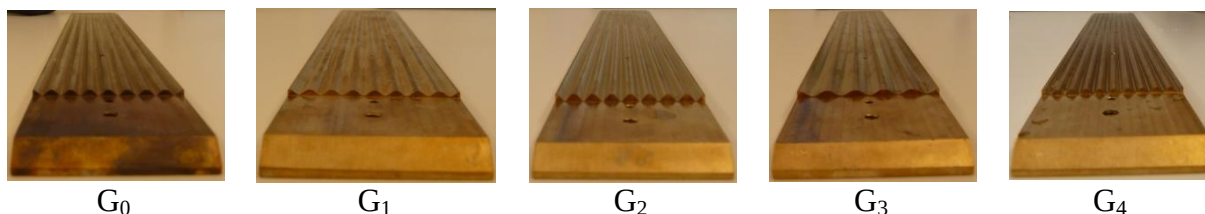
Dla przeanalizowania wpływu pofalowania na generowanie i wzmocnienie niestabilności badania przeprowadzono dla geometrii optymalnej z punktu widzenia symulacji oznaczonej dalej G_0 oraz dla 4 konfiguracji o zmienionych parametrach geometrii ścianki (G_1 , G_2 , G_3 oraz G_4). Modele te różnią się od geometrii optymalnej liczbą pofalowań i amplitudą (rys. 2.6). W każdej rozpatrzonej geometrii zmodyfikowana (pofalowana) była jedynie dolna ścianka kanału. Pozostawienie górnej ścianki jako płaskiej pozwoliło na niezakłócony dostęp optyczny do wnętrza kanału i umożliwiło wykorzystanie optycznych metod pomiarowych podczas eksperymentalnej części badań.

Geometria optymalna z punktu widzenia modeli teoretycznych i numerycznych G_0 składała się z 8 okresów pofalowania, z amplitudą równą 0.8mm, przy średniej wysokości kanału równej 2mm. Pozostałe warianty pofalowań wybierano jako odchylenia od teoretycznego optimum, które być może dla skończonego kanału ma nieco inne charakterystyki. W każdym zbadanym przypadku długość kanału była stała i wynosiła 250mm, a szerokość całej sekcji wszystkich kanałów wynosiła 40mm. Stała również była średnia wysokość kanału, dzięki czemu w każdym badanym wariancie modyfikacji geometrii pole przekroju poprzecznego kanału było stałe. Ułatwiło to późniejszą analizę i porównywanie wyników, gdyż przy zachowanej liczbie Reynoldsa strumień objętościowy płynu przepływający przez poszczególne geometrie nie ulegał zmianie.

W ramach projektu dla porównania rozpatrzono również jako referencyjny kanał o geometrii bazowej (G_p), bez wprowadzonej modyfikacji kształtu ścianek (przepływ między dwoma płaskimi ściankami). Znajomość zachowania się przepływu w takim kanale bazowym pozwoliła na identyfikację efektów wywołanych jedynie pofalowaniem ścian kanału.

Schematyczny rysunek optymalnej geometrii kanału pokazany został na rysunku 2.5, a szkice i fotografie poszczególnych geometrii na rysunkach 2.6 i 2.7. W tabeli 1 przedstawiono natomiast parametryczny opis poszczególnych rozpatrywanych wariantów modyfikacji kształtu ścianek kanału. Warto zwrócić uwagę na zmiany wielkości powierzchni w funkcji jej pofalowania. Dla geometrii uznanej za optymalną (G_0) wzrost powierzchni wyniósł niemal 22% a dla geometrii G_4 nawet 32,1%. Wartości te mają jak się okazuje niewielki wpływ na wzrost oporów przepływu natomiast skutecznie zwiększają wymian ciepła.

Na potrzeby symulacji numerycznych w zdefiniowanych geometriach wygenerowane były strukturalne siatki obliczeniowe, składające się, w zależności od liczby okresów pofalowania (M) od 10 mln komórek (dla $M=5$) do 20 mln komórek (dla $M=10$).

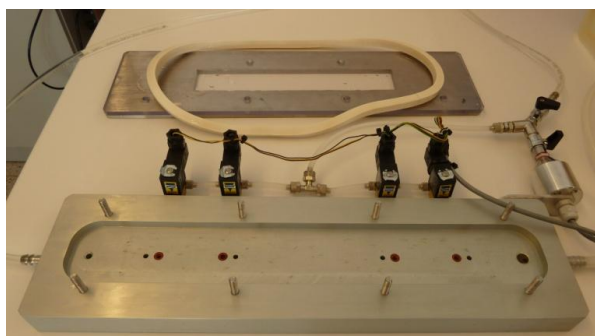


Rys. 2.7. Fotografie wybranych konfiguracji geometrycznych kanału.

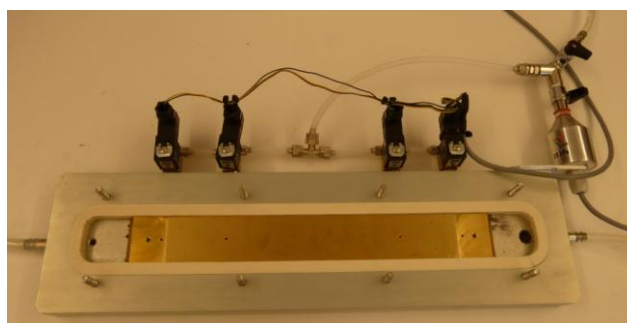
Tabela 1. Parametryczny opis wybranych konfiguracji geometrycznych kanału.

	Ścianka górna	Ścianka dolna	liczba okresów amplituda	wysokość $h_{\min} / h_{\max}$	powierzchnia A/A_p
G_0	$y_D = -2 + 0.8 \cos\left(\frac{\pi}{2.5}x\right)$	$y_G = 0$	M=8 S=0.8 mm	$h_{\min}=1.2$ mm $h_{\max}=2.8$ mm	1.218
G_1	$y_D = -2 + 0.6 \cos\left(\frac{\pi}{2.5}x\right)$	$y_G = 0$	M=8 S=0.6 mm	$h_{\min}=1.4$ mm $h_{\max}=2.6$ mm	1.130
G_2	$y_D = -2 + 1.0 \cos\left(\frac{\pi}{2.5}x\right)$	$y_G = 0$	M=8 S=1.0 mm	$h_{\min}=1.0$ mm $h_{\max}=3.0$ mm	1.320
G_3	$y_D = -2 + 0.8 \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right)$	$y_G = 0$	M=5 S=0.8 mm	$h_{\min}=1.2$ mm $h_{\max}=2.8$ mm	1.032
G_4	$y_D = -2 + 0.8 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	$y_G = 0$	M=10 S=0.8 mm	$h_{\min}=1.2$ mm $h_{\max}=2.8$ mm	1.321
G_p	$y_D = -2$	$y_G = 0$	M=0 S=0	$h=2$ mm	1.000

W układzie eksperymentalnym poszczególne płytki będące dolną pofalowaną powierzchnią kanału (rys. 2.7) umieszczane były w specjalnie zaprojektowanym i zbudowanym kanale (rys. 2.8 i 2.9), którego wysokość była dobrana tak, aby w każdym wariancie zapewnić stałą wysokość średnią powstałego kanału pomiarowego. Kanał ten miał również zapewnić stałe warunki zasilania cieczą kanału pomiarowego oraz zapewnić niezmiennie parametry pomiaru wybranych, interesujących charakterystyk przepływu.



Rys. 2.8. Stanowisko eksperymentalne – kanał umożliwiający montaż wkładek zapewniających zmianę konfiguracji pofalowań dolnej ścianki. Powyżej zdemontowana górna ścianka. Widoczny również układ pomiaru ciśnienia.



Rys. 2.9. Stanowisko eksperymentalne – kanał umożliwiający montaż wkładek zapewniających wybraną konfigurację geometryczną układu z zamontowaną płytką G_0 .

3. ANALIZA TEORETYCZNA I NUMERYCZNA WPŁYWU ORIENTACJI KIERUNKU POFALOWANIA WZGLĘDEM GRADIENTU CIŚNIENIA

Proponowane badania oparte są na wyidealizowanym kanale zaproponowanym w modelu teoretycznym. Ze względów praktycznych wymagane jest oszacowanie zakresu zmian parametrów geometrycznych dopuszczalnych z punktu widzenia modelu, przy których przewidywane wzmocnienie niestabilności może być zaobserwowane. W pierwszej kolejności należało odpowiedzieć na pytanie, jaka jest wymagana precyzja wykonania kanałów. Ponieważ efekty związane z niedokładnie poprzecznym ustawieniem pofalowania względem gradientu ciśnienia mają znaczenie dla przepływu w kanale o dużej szerokości, analizę przeprowadzono dla kanału o szerokości nieskończonej (bez ścian bocznych). Nawet przy takim uproszczeniu zadanie jest nietrywialne, bowiem przepływ główny (niezaburzony) ma trzy niezerowe składowe pola prędkości. Wyznaczenie takiego przepływu (nie wspominając o analizie jego stateczności) jest znacznie bardziej złożone niż w przypadku referencyjnym, tj. gdy pofalowanie jest zorientowane idealnie poprzecznie. W tym ostatnim przypadku, przepływ główny jest jednokierunkowy, a jedyna niezerowa składowa pola prędkości jest wyznaczana z liniowego równania Poissona. W przypadku zmiany kierunku pofalowania, przepływ jest nieliniowy. Aczkolwiek celem analizy było wyznaczenie wpływu małych odchyłeń kierunku pofalowania, zdecydowano się jednak na rozwinięcie teorii ogólnej, słusznej dla dowolnej orientacji pofalowania względem średniego gradientu ciśnienia w przepływie. Szczegółowy opis tej teorii oraz zastosowanej metody numerycznej (wykorzystującej koncepcję zanurzonych granic i gwarantującej spektralną zbieżność) zawiera Załącznik nr 3. Przedstawiono tam również wyniki obliczeń uzyskane za pomocą autorskiego programu komputerowego.

Podstawowe wnioski wypływające z przeprowadzonych badań można podsumować następująco:

1. Odchylenie kierunku pofalowania od położenia idealnie poprzecznego skutkuje zmniejszeniem amplitudy poprzecznej modulacji wzdłużnej składowej pola prędkości przepływu głównego. Przy odchyleniu równym 10 stopni efekt modulacji praktycznie zanika.
2. Wraz ze wzrostem odchylenia kierunku pofalowania rosną opory hydrauliczne przepływu.
3. Nawet niewielkie (kilkustopniowe) odchylenie kierunku pofalowania prowadzi do znaczącego wzrostu krytycznej liczby Reynoldsa modu normalnego odpowiedzialnego za efekt destabilizacji przepływu. Destabilizacja poniżej liczby Reynoldsa równej 100 jest możliwa jedynie wtedy, gdy błąd ustawienia orientacji idealnie poprzecznej nie przekracza dwóch stopni.

Otrzymane wyniki potwierdzają, że kluczowe znaczenie dla efektu destabilizacji ma stopień modulacji poprzecznej pola prędkości przepływu głównego: zanikowi tej modulacji towarzyszy natychmiastowy wzrost krytycznej liczby Reynoldsa. Z przeprowadzonych badań wynika też wniosek praktyczny o konieczności dość dokładnej kontroli sposobu wprowadzenia strumienia do kanału z poprzecznym pofalowaniem; ewentualne odchylenie tego strumienia może całkowicie wyeliminować możliwość wzmocnienia zaburzeń i wywołanie niestateczności.

Opracowana w trakcie realizacji projektu teoria oraz wyniki obliczeń dotyczące wpływu przekoszenia kierunku pofalowania były prezentowane w formie referatów zaprezentowanych podczas:

- międzynarodowych warsztatów „Workshop on LES in Science and Technology” (Poznań, kwiecień, 2008 r.)
- XVIII Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów (Jastrzębia Góra, wrzesień 2008)

4. ANALIZA WPŁYWU ŚCIAN BOCZNYCH NA OPORY PRZEPŁYWU

Jednym z powodów, dla których pofalowanie poprzeczne wydaje się być interesującą opcją jest wspomniany wyżej korzystny wpływ na opory hydrauliczne. Podjęto zatem badania mające na celu ustalenie w jakim stopniu własność ta przenosi się na przepływy w rzeczywistych kanałach, tzn. kanałach o skończonej szerokości zakończonych płaskimi ścianami bocznymi. Z matematycznego punktu widzenia, wyznaczenia przepływu przez taki kanał jest zadaniem dość prostym i polega na wyznaczeniu rozwiązania liniowego równania różniczkowego Poissona w obszarze, będącym przekrojem poprzecznym pofalowanego kanału. Na brzegu obszaru stawiane są oczywiście warunki znikania prędkości (zerowe warunki typu Dirichleta). Skonstruowano metodę numeryczną pozwalającą na wyznaczenie rozwiązania przybliżonego przy dowolnym w zasadzie kształcie pofalowania ścian w wariancie pofalowania symetrycznego oraz pofalowania jednostronnego (tj. dno kanału pozostaje płaskie, pofalowana jest tylko ściana górna).

Z uwagi na zamiar uwzględnienia pofalowania o dużych amplitudach zrezygnowano z wcześniej stosowanego sformułowania bazującego na koncepcji zanurzonych granic i wprowadzono transformację obszaru fizycznego do regularnego (kwadratowego) obszaru obliczeniowego. W tym ostatnim skonstruowano bazę wielomianów ortogonalnych, a samo równanie Poissona poddano dyskretyzacji spektralnej. Otrzymany w wyniku dyskretyzacji układ równań liniowych rozwiązano stosując standardową metodę dekompozycji LU. Otrzymane pole prędkości spełnia warunek brzegowy ściśle, a nie jedynie w sposób przybliżony jak to ma miejsce w metodzie zanurzonych granic. Ceną tej pożądanej właściwości rozwiązania jest komplikacja formy równania różniczkowego i wynikająca stąd złożoność algorytmu numerycznego.

Opis sformułowania matematycznego, metody numerycznej i uzyskanych wyników zawiera zamieszczony w Załączniku nr 4 artykuł, przygotowany do złożenia do druku w czasopiśmie Archives of Mechanical Engineering. W artykule tym przedstawiono wyniki badań parametrycznych dla oporów hydraulicznych w kanale ze ścianami pofalowanymi sinusoidalnie. Rozważono oba warianty pofalowania: symetryczne i jednostronne, z różną liczbą podziałek pofalowania w poprzek kanału. Przypadkiem referencyjnym jest przepływ w kanale o przekroju prostokątnym o takim samym polu i stosunku szerokość/wysokość.

Podstawowe wnioski z przeprowadzonych badań można podsumować następująco:

1. Obecność ścian bocznych wpływa na zwiększenie oporów hydraulicznych, ale znaczenie ścian bocznych maleje wraz ze wzrostem stosunku szerokości do (średniej) wysokości przekroju poprzecznego kanału (wniosek jak najbardziej oczekiwany).
2. Zastosowanie pofalowania sinusoidalnego o długiej fali (tj. małej liczbie podziałek w poprzek kanału) pozwala zmniejszyć efektywne opory przepływu, tj. uzyskać wzrost wydatku w porównaniu z przepływem referencyjnym o tym samym gradiencie ciśnienia. Podobnie jak w przypadku kanału o nieskończonej szerokości, efekt ten jest pozornie paradoksalny, bowiem pofalowanie zwiększa powierzchnię zwilżoną (zmniejsza promień

hydrauliczny). W pracy podano uzasadnienie tego efektu pokazując asymptotyczne rozwiązanie dla kanału nieskończonego i pofalowania o dużej podziałce.

3. Pofalowanie poprzeczne, dla którego długość fali jest ok. 2.5 większa niż średnia wysokość kanału jest w zasadzie neutralne, tj. jego wpływ na opory przepływu jest znikomy, nawet gdy amplituda pofalowania jest duża. Długość fali „neutralnej” dla pofalowania symetrycznego jest nieznacznie mniejsza niż dla pofalowania jednostronnego o podwojonej amplitudzie.
4. Pofalowanie o mniejszej długości fali powoduje wzrost oporów ruchu rosnący szybciej niż liniowo z amplitudą pofalowania.

Otrzymane wyniki mają znaczenie praktyczne. W szczególności, pofalowanie o charakterystyce neutralnej dla oporów hydraulicznych okazuje się (w obu wariantach: symetrycznym i jednostronnym) tym właśnie, dla którego efekt destabilizacji jest najsilniejszy.

5. WPŁYW ŚCIAN BOCZNYCH NA STATECZNOŚĆ PRZEPŁYWU W POFALOWANYM KANALE

Kluczowym etapem analizy teoretycznej w projekcie było zbadanie jak obecność ścian bocznych wpływa na parametry krytyczne przepływu, tj. czy potwierdzi się przewidywanie odnośnie możliwości naturalnej destabilizacji przepływu przy niskich liczbach Reynoldsa. W tym celu sformułowano model matematyczny ewolucji małych zaburzeń w przepływie przez kanał o skończonej szerokości. Opis ten dość istotnie różni się od podejścia zastosowanego w przypadku kanału nieskończonego, opisanego w pracach [1,2] i uogólnionego w projekcie na przypadek pofalowania zorientowanego pod dowolnym kątem (Załącznik 3). Po pierwsze opis ten został sformułowany w zmiennych prędkość-ciśnienie, a nie – jak w poprzednich parach – prędkość-wirowość. Po drugie, zrezygnowano z techniki zanurzonych granic na rzecz transformacji obszaru. W efekcie, pole zaburzeń spełnia w sposób ścisły jednorodne warunki brzegowe, niestety kosztem znacznego skomplikowania równań różniczkowych opisujących ewolucję tego pola. Pola zaburzeń prędkości i ciśnienia przedstawiono w postaci kombinacji liniowej ortogonalnych wielomianów zdefiniowanych w regularnym obszarze obliczeniowym. Gwarantuje to spektralną zbieżność (w przypadku rozwiązań gładkich). Po zastosowaniu metody projekcyjnej typu Galerkina otrzymano skończenie wymiarowy, algebraiczny problem własny dla tzw. modów normalnych pola małych zaburzeń w przepływie. Wykazano, że problem ten może być przekształcony równoważnie do zagadnienia o dwukrotnie mniejszym rozmiarze, co ma znaczenie dla efektywności obliczeń w przypadku, gdy zachodzi potrzeba wyznaczenia większej liczby modów normalnych. Na potrzeby śledzenia zmienności parametrycznej wybranych modów normalnych opracowano efektywny obliczeniowo wariant metody odwrotnych iteracji.

Obliczenia przeprowadzono w dwóch fazach. W fazie pierwszej określono obszar w przestrzeni parametrów zagadnienia, w którym zachodzi destabilizacja z możliwie niskimi liczbami Reynoldsa. W szczególności, zidentyfikowano krytyczny mod normalny, czyli mod podlegający najsilniejszemu wzmocnieniu. Następnie przeprowadzono badania parametryczne, określając jego zmienność w funkcji geometrii pofalowania (liczba falek w poprzek kanału, amplituda pofalowania, szerokość kanału), dla dwóch wariantów: pofalowania symetrycznego i jednostronnego. Wykonano również pracochłonne obliczenia krzywych neutralnej stateczności dla kanałów o różnym stosunku szerokości do średniej wysokości (10 i 20) i liczbie falek dobranej w taki sposób, aby maksymalizować efekt

destabilizacji. W końcu, określono formę pola zaburzeń odpowiadającą niestatecznemu modowi normalnemu.

Szczegółowy opis sformułowania matematycznego, opracowanej metody numerycznej i otrzymanych wyników przedstawiono w przygotowanym do druku artykule zamieszczonym w całości z Załączniku nr 5.

Wnioski wynikające z tej części badań można podsumować następująco:

1. Zgodnie z przewidywaniami, obecność ścianek bocznych stabilizuje przepływ również w kanale z poprzecznym pofalowaniem (efekt ten dla kanału o przekroju prostokątnym znany jest od 20 lat). Wpływ ścian bocznych maleje wraz ze wzrostem szerokości kanału, ale nawet przy stosunku szerokość/ wysokość równym 20, najmniejsza krytyczna liczba Reynoldsa przepływu jaką udało się uzyskać wynosi ok. 64.
2. Maksimum efektu destabilizacji uzyskuje się stosując obustronne pofalowanie symetryczne. W klasie równomiernego pofalowania sinusoidalnego, optymalny stosunek długości fali do średniej wysokości kanału wzrasta wraz z szerokością kanału. Np. dla pofalowania jednostronnego w kanale, w którym stosunek szerokości do średniej wysokości jest równy 20, należy wprowadzić 8 podziałek pofalowania.
3. Od szerokości kanału i wariantu pofalowania zależy również wielkość optymalnej amplitudy pofalowania. Generalna prawidłowość jest taka, że amplituda ta zmniejsza się wraz ze wzrostem szerokości kanału. W przypadku pofalowania symetrycznego jest ona typowo równa 21-22 % średniej wysokości kanału; w pofalowaniu jednostronnym optymalna amplituda jest większa i wynosi ok. 37-38 % średniej wysokości kanału.
4. Forma pola zaburzeń prędkości odpowiadających najsilniej wzmacnianemu modowi normalnemu jest dokładnym odpowiednikiem formy wykrytej wcześniej dla kanału o szerokości nieskończonej. Z oczywistych powodów, różnica pojawia się w sąsiedztwie ścian bocznych, ale dalej od nich obserwowany jest analogiczny obraz matrycy naprzemiennych wirów. Dla dostatecznie dużej liczby Reynoldsa pojawiają się kolejne mody niestateczne o podobnej budowie lokalnej, ale dodatkowych symetriach.

Reasumując: dla kanałów o dostatecznie dużej szerokości efekt destabilizacji przy niskich liczbach Reynoldsa nadal występuje (choć jest nieco słabszy) i forma pola zaburzeń jest analogiczna jak w przypadku kanału bez ścian bocznych (z zastrzeżeniem bliskiej okolicy tych ścian).

6. BADANIE NIELINIOWEJ SATURACJI ZABURZENIA PRZY POMOCY MODELU NISKOWYMIAROWEGO

W tym punkcie podsumowano badania nad konstrukcją niskowymiarowego modelu dynamicznego służącego do opisu nieliniowych stanów przepływu w kanale z poprzecznym pofalowaniem i o skończonej szerokości. Szczegółowy opis przeprowadzonych badań podano w Załączniku 6.

W wyniku pierwotnej niestateczności małe zaburzenie wprowadzone do przepływu narasta początkowo zgodnie z teorią liniową czyli w tempie wykładniczym. Z czasem zaburzenie to osiąga wielkość przy której efekty nieliniowe nie są już do pominięcia. W nieliniowej fazie ewolucji ma miejsce dynamiczna interakcja pomiędzy różnymi modami normalnymi, która ostatecznie doprowadza do ustalenia się nowej formy ruchu. W przypadku ruchu w kanale

pofalowanym poprzecznie, ruch płynu jaki pojawi się po nieliniowej saturacji pierwotnego zaburzenia jest - dla liczb Reynoldsa nieco większych niż wartość krytyczna - okresowo zmienny w czasie i w pełni trójwymiarowy.

Permanentna postać przepływu uzyskana w procesie saturacji pierwotnego zaburzenia ma kluczowe znaczenie, ponieważ to od jej cech kinematycznych zależy czy w przepływie może zachodzić efektywne mieszanie. Naturalnym sposobem określenia postaci tego przepływu jest po prostu wykonanie symulacji komputerowej, czyli numeryczne rozwiązanie równań ruchu. Jednym z zamierzeń projektu była jednak również próba konstrukcji niskowymiarowej aproksymacji przepływu. Idea takiej aproksymacji polega na założeniu, że chwilowy stan przepływu w trakcie procesu nieliniowej saturacji i po jego zakończeniu można przedstawić jako zmienną w czasie kombinację liniową pewnej niewielkiej liczby odpowiednio wybranych modów normalnych, które wyznacza się metodami liniowej teorii stateczności. Milczącym założeniem tego podejścia jest, że właściwy podzbiór takich modów normalnych można a priori określić, np. posługując się kryterium wielkości wzmocnienia/tłumienia, tj. kierując się wielkością części urojonej częstości własnej modów. Ewentualny sukces w konstrukcji takiego niskowymiarowego opisu ma znaczenie zarówno teoretyczne (do badania dynamiki przepływu można zastosować dobrze rozwinięte techniki dla skończonego wymiarowych układów dynamicznych) jak i praktyczne (efektywność obliczeniowa).

W pierwszym etapie realizacji prac zmierzających do konstrukcji modelu niskowymiarowego opracowano jego podstawy matematyczne: wyprowadzono równania ogólne modelu oraz związki pomocnicze niezbędne do obliczenia jego współczynników. Z matematycznego punktu widzenia, uproszczony opis przepływu ma formę układu zespolonych i nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych dla zmiennych w czasie współczynników rozkładu pola prędkości przepływu w bazie modów normalnych. W modelu wykorzystano fakt, że przepływ wykazuje okresowość przestrzenną, okres geometryczny pola prędkości w głównym kierunku ruchu płynu jest de facto zakładany i jest parametrem modelu.

W dalszym etapie podjęto próbę konstrukcji modelu dla konkretnego przypadku, a mianowicie rozważono przepływ w kanale z sinusoidalnym pofalowaniem poprzecznym ściany górnej (ściana dolna pozostaje płaska). Przyjęto, że stosunek szerokości do średniej wysokości kanału wynosi 20, a amplituda pofalowania jest równa 40% średniej wysokości kanału. Oznacza to, że stosunek maksymalnej wysokości lokalnej do jej wartości minimalnej wynosi 7/3. Długość fali sinusoidy jest 2.5 raza większa niż średnia wysokość kanału, co daje 8 okresów tej fali rozmieszczonych w poprzek kanału. Szczegółowy opis geometrii pofalowania podano w Załącznikach 4 i 5.

Istotną cechą procesu nieliniowej saturacji jest to, że w zakresie nieliniowym ma miejsce modyfikacja przepływu średniego. Oznacza to, że model niskowymiarowy musi uwzględniać tzw. mody zerowe, czyli mody normalne opisujące pola zaburzeń zależne wyłącznie od współrzędnych w płaszczyźnie przekroju poprzecznego (współrzędne x i y). Odpowiadająca tym zaburzeniom wartość wzdłużnej liczby falowej (oznaczonej w Załączniku nr 5 symbolem β) jest równa zero. Obliczenie modów zerowych wymagało przygotowania osobnego wariantu programu komputerowego. Po wykonaniu obliczeń okazało się, że mody zerowe przepływu w kanale o skończonej rozpiętości i poprzecznym pofalowaniu grupują się w podzbiory (zawierające po 8 modów) charakteryzujące się bardzo zbliżonym poziomem tłumienia. Różnice w strukturze pola zaburzeń również nie dają wskazówki do znaczenia tych modów w procesie nieliniowej saturacji. Wydaje się, że poprawny opis tego procesu wymaga po prostu użycia wielu modów zerowych (przynajmniej jednego kompletnego oktetu).

Problem z aprioryczną identyfikacją modów dynamicznie istotnych dotyczy również modów superharmonicznych, tj. modów, których wzdluzna liczba falowa jest całkowitą wielokrotnością liczby podstawowej.

W efekcie przeprowadzonych badań uznano, że konstrukcja efektywnego obliczeniowo modelu niskowymiarowego (wykorzystującego mniej niż, powiedzmy, 10 modów), który poprawnie odzwierciedli przebieg i efekt końcowy procesu nieliniowej saturacji jest przypuszczalnie niemożliwa. Budowę modeli wykorzystujących większą liczbę modów uznano za niecelowe ze względu na duży koszt obliczeniowy związany z wyznaczaniem od nowa modów bazowych przy jakiegokolwiek zmianie geometrii pofalowania lub liczby Reynoldsa. Ostatecznie podjęto decyzję, że forma uzyskana przez przepływ w wyniku nieliniowej saturacji zaburzenia pierwotnego będzie wyznaczana numerycznie metodą objętości skończonych wykorzystując komercyjny pakiet Fluent.

7. LAGRANŻOWSKA SYMULACJA PROCESÓW MIESZANIA

Jednym z podstawowych celów projektu była ocena efektywności procesów mieszania zachodzących w przepływie cieczy przez poprzecznie pofalowany kanał o skończonej szerokości. W tym celu posłużono się metodą symulacji komputerowej polegającej na śledzeniu ewolucji chmury markerów, czyli punktowych cząstek pozbawionych masy i poruszających się wzdluz trajektorii elementów płynu.

Jak już wcześniej wspomniano, pole prędkości otrzymane w symulacji procesu nieliniowej saturacji pierwotnego zaburzenia przepływu ma formę zbliżoną do przepływu otrzymanego w wyniku superpozycji przepływu niezaburzonego i pola prędkości niestatecznego modu normalnego o odpowiednio dobranej amplitudzie. Wielkość tej amplitudy można ustalić odejmując pole przepływu średniego od zmiennego w czasie pola prędkości przepływu otrzymanego w wyniku symulacji numerycznych metodą objętości skończonych. Badania tego typu przeprowadzono dla kanału o względnej szerokości $L = 20$ (oznaczenia jak w Załącznikach 4 i 5) i poprzecznym pofalowaniu jednostronnym z okresem geometrycznym równym 5 ($M = 8$) i o amplitudzie $S = 0.8$. Stwierdzono, że maksymalna wartość pola prędkości zaburzeń wynosi przy liczbie Reynoldsa $Re = 100$ ok. 10% maksymalnej prędkości przepływu niezaburzonego.

Z uwagi na opisane wyżej podobieństwo uznano, że efektywnym obliczeniowo sposobem oceny efektywności mieszania jest przeprowadzenie symulacji ruchu cząstek bezmasowych w polu prędkości zdefiniowanym jako suma przepływu niezaburzonego i pola prędkości modu niestatecznego wyznaczonego z teorii liniowej. Założono, że amplituda modu jest stała w czasie i dobrana w taki sposób, aby maksymalna wartość prędkości pola zaburzeń była równa wartości wyznaczonej w rozwiązaniu numerycznym. Zachowano również oryginalną wartość prędkości fazowej oraz wzdluzną liczbę falową modu normalnego.

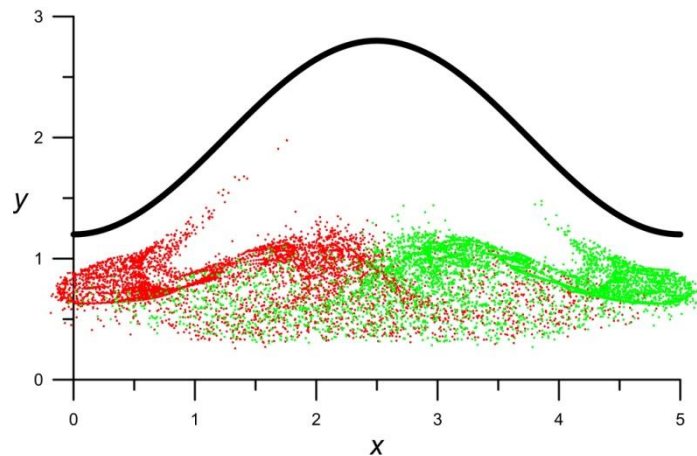
Przygotowano program komputerowy, który obliczał trajektorie markerów w zmiennym w czasie trójwymiarowym polu przepływu. Symulowano ewolucję strumienia cząstek wprowadzanych co pewną ilość kroków czasowych w wybranym punkcie obszaru ruchu. Trajektoriami każdej cząstki jest rozwiązaniem układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci

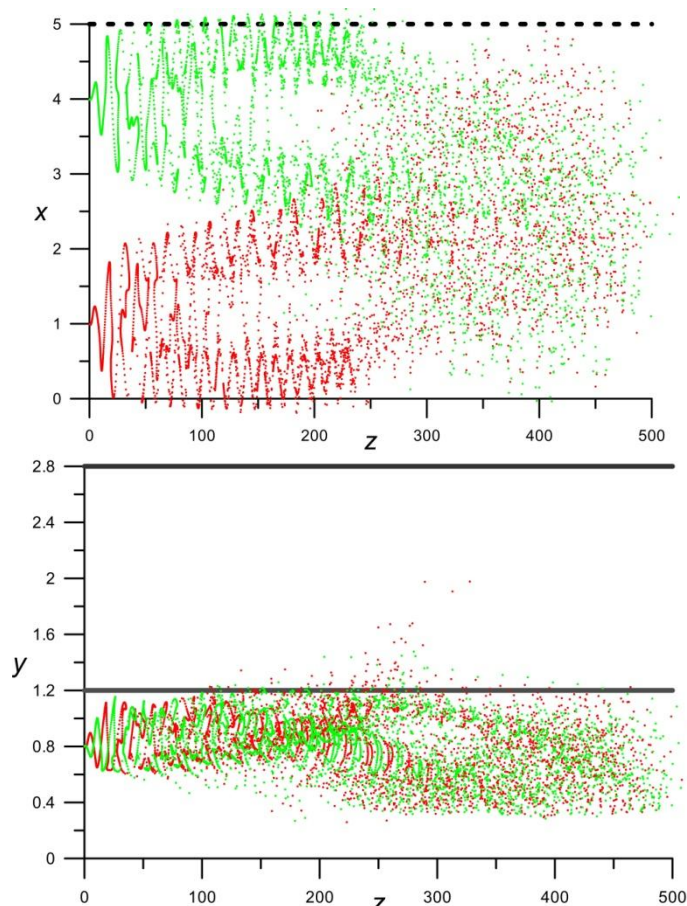
$$\begin{cases} x'(t) = u(t, x, y, z) = A \cdot R \cdot e^{\{ \hat{u}(x, y) \exp[i(\beta z - \sigma_R t)] \}} \\ y'(t) = v(t, x, y, z) = A \cdot R \cdot e^{\{ \hat{v}(x, y) \exp[i(\beta z - \sigma_R t)] \}} \\ z'(t) = W(x, y) + w(t, x, y, z) = W(x, y) + A \cdot R \cdot e^{\{ \hat{w}(x, y) \exp[i(\beta z - \sigma_R t)] \}} \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $x(t=T) = x_0$, $y(t=T) = y_0$, $z(t=T) = 0$. W równaniach symbolem A oznaczyliśmy amplitudę modu, a symbole β i σ_R oznaczają, odpowiednio, liczbę falową i częstotliwość rzeczywistą częstotliwości własnej modu (prędkość fazowa fali zaburzeń to σ_R / β). W warunkach początkowych symbol T oznacza chwilę „injektacji” markera do przepływu, a punkt iniekcji ma współrzędne $(x_0, y_0, 0)$.

Równania trajektorii każdej cząstki były całkowane numerycznie z zastosowaniem metody Rungego-Kutty 2-ego rzędu. Krok całkowania był stały i równy $\Delta t = 0.001$. Przedział całkowania miał długość równą 400 lub 500 (wykonywano 400 lub 500 tysięcy kroków całkowania). Kolejne cząstki były wprowadzane do przepływu co 100 kroków całkowania, jednocześnie w dwóch punktach iniekcji. Wynika stąd, że na końcu przedziału całkowania zbiór markerów zawierał 8 lub 10 tys. cząstek.

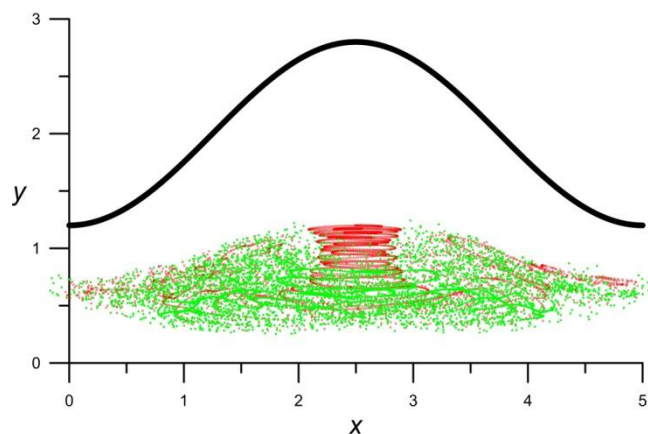
Omówimy wyniki wybranych symulacji. Na rys. 7.1 pokazano w trzech rzutach kształt chmury cząstek uzyskany dla chwili $t = 500$. Punkty iniekcji mają współrzędne $(1, 0.8)$ i $(4, 0.8)$. Na schemacie pokazującym widok chmury w płaszczyźnie Oxy zaznaczono czarną linią kontur górnej pofalowanej ściany. Cząstki rozpoczynające ruch z punktu $(1, 0.8)$ zaznaczono kolorem czerwonym, a rozpoczynające ruch z punktu $(4, 0.8)$ – kolorem zielonym. Jest ewidentne, że obszar zajęty przez cząstki rozciąga się w kierunku poziomym na szerokość równą, a nawet nieco większą niż długość okresu geometrycznego pofalowania górnej ściany kanału. W całym obszarze widoczne są cząstki zaznaczone oboma kolorami, co dowodzi zdolności przepływu do mieszania. Z drugiej strony, mieszanie zachodzi jedynie w obrębie jednego okresu geometrycznego. Efektywność rozciągania chmury cząstek ma wybitnie anizotropowy charakter, tj. zachodzi przede wszystkim w kierunku poziomym. Widok chmury w rzucie na płaszczyznę Oxz pozwala ocenić jaki dystans wzdłuż kanału jest potrzebny do rozproszenia i zmieszania chmury cząstek z wybranych punktów iniekcji. Efekt ten obserwowany jest dla współrzędnej z większej niż 300, czyli dystans ten mierzony długością okresu pofalowania to nie mniej niż 60.

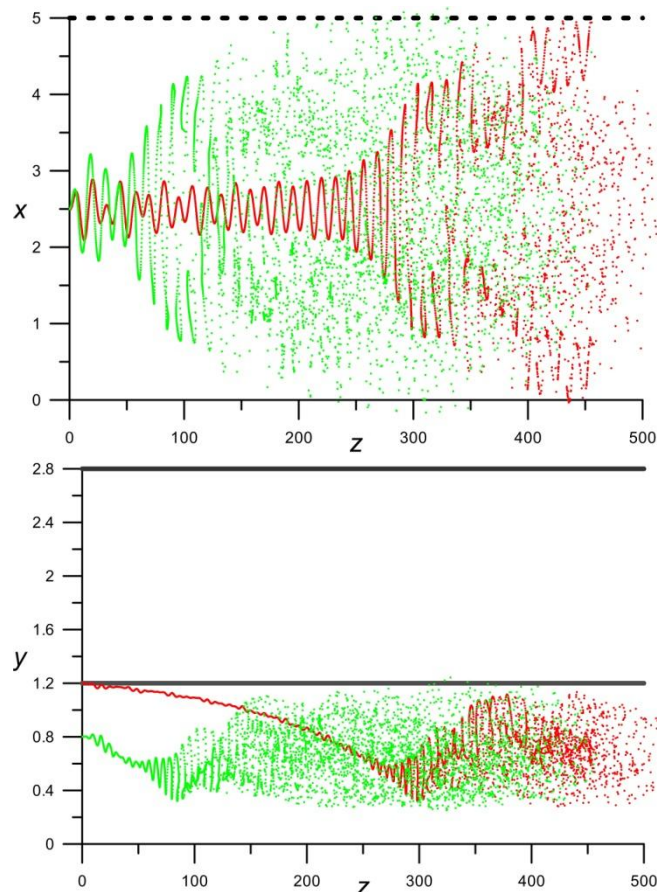




Rys. 7.1. Kształt chmury cząstek uzyskany dla chwili $t = 500$ widoczny w trzech rzutach (x-y, x-z oraz y-z); punkty iniekcji mają współrzędne (1,0.8) i (4,0.8); cząstki rozpoczynające ruch z punktu (1,0.8) zaznaczono kolorem czerwonym, a rozpoczynające ruch z punktu (4,0.8) – kolorem zielonym; czarna linia na rzucie x-y pokazuje kontur górnej pofalowanej ściany kanału

Interesujący efekt można zaobserwować wprowadzając cząstki w innej parze punktów iniekcyjnych, a mianowicie (2.5,0.8) i (2.5,1.2). Punkty te są położone na linii pionowej odpowiadającej miejscu maksymalnej wysokości lokalnej kanału. Widoki w rzutach kształtu chmur cząstek emitowanych z obu punktów pokazano na rys. 7.2.





Rys. 7.2. Kształt chmury cząstek uzyskany dla chwili $t = 500$ widoczny w trzech rzutach (x - y , x - z oraz y - z); punkty iniekcji mają współrzędne $(2.5, 0.8)$ i $(2.5, 1.2)$ i są położone na linii pionowej odpowiadającej miejscu maksymalnej wysokości lokalnej kanału; cząstki rozpoczynające ruch z punktu $(2.5, 1.2)$ zaznaczono kolorem czerwonym, a rozpoczynające ruch z punktu $(2.5, 0.8)$ – kolorem zielonym; czarna linia na rzucie x - y pokazuje kontur górnej pofalowanej ściany kanału

Chmura cząstek wprowadzona w punkcie położonym niżej ulega szybkiemu rozproszeniu – już w odległości równej około 40 okresów pofalowania od miejsca iniekcji poprzeczny rozmiar chmury jest porównywalny z długością tego okresu. Mimo bliskości górnego punktu iniekcji, cząstki emitowane z tego punktu zachowują się inaczej, tworząc zwarty (choć pofalowany) strumień na dystansie przekraczającym 50 okresów pofalowania. Do pełnego rozproszenia i wymieszania obu chmur dochodzi dopiero w odległości równej około 80 długości okresu pofalowania.

Opisane wyżej przypadki pokazują, że wybór punktów emisji cząstek ma istotne znaczenie, a ich bliskość nie musi oznaczać szybszego zmieszania rozproszonych chmur cząstek.

Następny przypadek pokazuje, że „konwekcyjne” mieszanie chmur markerów może w ogóle nie zachodzić, chociaż chmury zostały znacząco rozproszone. Na rysunku 7.3 pokazano w trzech rzutach chmury cząstek emitowanych w punktach $(2.5, 0.5)$ i $(2.5, 2.0)$. W chwili $t = 500$ obie chmury zajmują szerokość całego całej „komórki” pofalowanego kanału, ale mieszanie pomiędzy nimi nie zachodzi. Pokazuje to wyraźnie obraz w płaszczyźnie $0xy$, a także widok boczny czyli rzut w płaszczyźnie $0yz$. Widoczna na tym pierwszym granica rozdziału pomiędzy chmurami cząstek nie może być przekroczona na drodze konwekcji. Jest to bowiem powierzchnia na której prędkość normalna jest równa zero. W przypadku

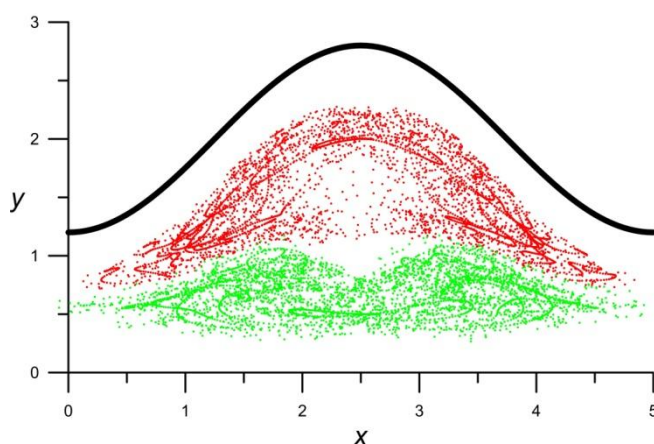
pofalowania symetrycznego obu ścian kanału, nieprzekraczalną granicą transportu konwekcyjnego jest płaszczyzna środkowa kanału $y = 0$.

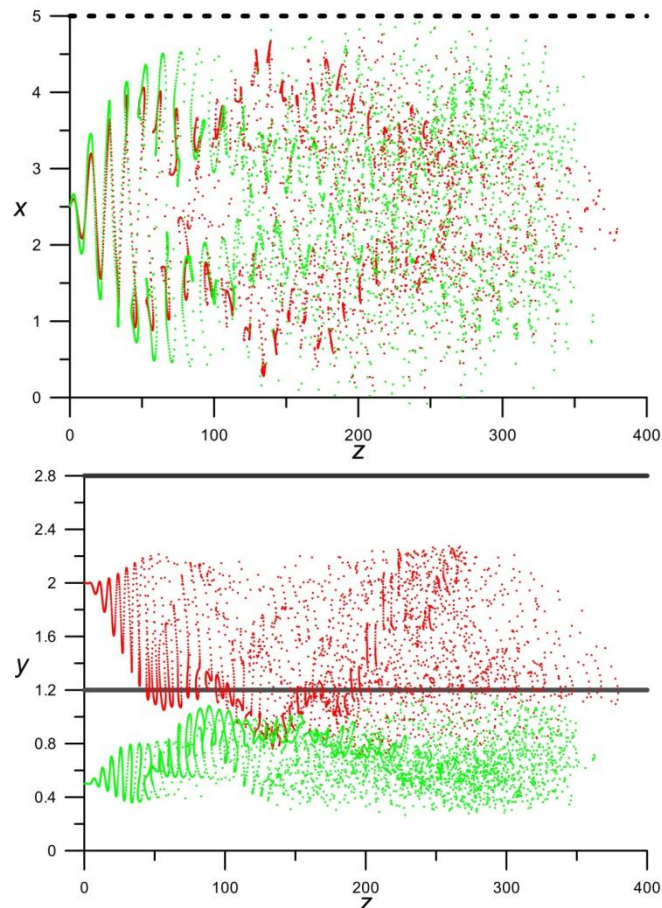
Na widoku w płaszczyźnie Oxy widoczny jest również inny efekt. Otóż górny brzeg chmury cząstek emitowanych z górnego punktu iniekcji (zaznaczonych kolorem czerwonym) naśladuje kształt pofalowanej ściany kanału. Po między ścianą a brzegiem czerwonej chmury pojawia się obszar o mniej więcej stałej grubości równej ok. 0.5 (25% średniej wysokości kanału) całkowicie wolny od cząstek. Podobny efekt widoczny jest w pierwszym z omówionych przypadków. Na analogicznym rysunku widoczne są nieliczne cząstki przemieszczające się poprzecznie wzdłuż konturu ściany, najwyraźniej wzdłuż zewnętrznej granicy niedostępnego obszaru przy pofalowanej ścianie kanału. Również przy ścianie płaskiej istnieje obszar pozbawiony cząstek (o średniej grubości ok. 0.4).

Wnioski wypływające z tej części badań można podsumować następująco.

Przepływ w kanale z poprzecznie pofalowaną górną ścianą przyjmuje poza granicą stateczności liniowej trójwymiarową i okresowo zmienną w czasie postać charakteryzującą się złożonością wystarczającą do uzyskania efektu chaotycznego mieszania. Jednak cechy kinematyczne pola zaburzeń wprowadzają pewne ograniczenia, które mogą rzutować na praktyczną stosowalność tego efektu:

1. Mieszanie ma wyraźnie anizotropowy charakter, tj. deformacja i rozpraszanie chmury cząstek zachodzi przede wszystkim w kierunku poprzecznym, równoległe do ścian kanału
2. Mieszanie ma charakter strefowy, tj. jest ograniczone do obszaru o szerokości pojedynczej podziałki pofalowania, a poza tym zachodzi intensywnie w pewnych podobszarach, ale nie pomiędzy nimi.
3. Obszary bezpośrednio sąsiadujące ze ścianami o szerokości 20-25% średniej wysokości kanału są „konwekcyjnie niedostępne” z wnętrza kanału. Wynika stąd, że nie może zachodzić czystko konwekcyjny transport masy/ciepła pomiędzy obszarami położonymi w sąsiedztwie ściany dolnej i górnej (dna i pokrywy) kanału.
- 4.





Rys. 7.3. Kształt chmury cząstek uzyskany dla chwili $t = 500$ widoczny w trzech rzutach (x-y, x-z oraz y-z); punkty iniekcji mają współrzędne $(2.5, 2)$ i $(2.5, 0.5)$; cząstki rozpoczynające ruch z punktu $(2.5, 1.2)$ zaznaczono kolorem czerwonym, a rozpoczynające ruch z punktu $(2.5, 0.8)$ – kolorem zielonym; czarna linia na rzucie x-y pokazuje kontur górnej pofalowanej ściany kanału

8. ANALIZA STRUKTURY PRZEPŁYWU W GEOMETRII UPROSZCZONEJ

Liniowa analiza stateczności przepływu przez nieskończony kanał (periodyczne warunki brzegowe w obu kierunkach), przeprowadzona w [1, 2], wskazała, że maksymalny efekt wzmocnienia zachodzi dla pofalowania o amplitudzie równej $S = 0.392$ i liczbie falowej $\alpha = 1.039$. Dla takiej geometrii krytyczna liczba Reynoldsa, powyżej której początkowe zaburzenia przepływu ulegać będą wzmocnieniu, zredukowana została do $Re_{cr} = 57.4$ [3]. Ważne jest, że pofalowanie to nie spowodowało wzrostu oporów przepływu, w porównaniu z przepływem Poiseuille’a wymuszonym identycznym gradientem ciśnienia. Co więcej, prace [1, 2] oraz przeprowadzone w ramach niniejszego projektu wykazały nieznaczny, około 5% spadek tych oporów [2].

Wstępna próba potwierdzenia efektów przewidzianych w liniowej analizie stateczności, zarówno numeryczna, jak i eksperymentalna, wykonana została w uproszczonej geometrii, pokazanej na rysunkach 2.2, 2.3 i 2.4 i opisanej w rozdziale 2. Sinusoidalne pofalowanie ścianek kanału postanowiono tutaj zastąpić segmentami, których ścianki składały się z płaskich powierzchni, tworzących obszary o zwiększonej i zmniejszonej wysokości (rys. 2.2

i 2.3). Takie ukształtowanie podyktowane zostało chęcią wyeliminowania trudności w późniejszym konstruowaniu modelu eksperymentalnego. Wstępne rozeznanie wykazało, że wytworzenie kanału o przyjętym uproszczonym kształcie będzie łatwiejsze i znacznie tańsze, porównując z wytworzeniem frezowanej powierzchni o krzywoliniowym, sinusoidalnym pofalowaniu. Taki kształt pozwolił również na wykonanie prostszego modelu numerycznego, którego domena była mniej skomplikowana, a wygenerowana siatka składała się z mniejszej ilości elementów. Pozwoliło to na przeprowadzenie dłuższych symulacji dla większej ilości różnych wariantów konfiguracyjnych. Wykonano tutaj symulacje dla kanału o nieskończonej szerokości i długości oraz dla kanału ograniczonego fizycznymi ściankami bocznymi z różną ilością segmentów składowych, odzwierciedlających pofalowanie ścianek. Symulacje te dały odpowiedź, jak silny jest wpływ ścianek bocznych na spodziewany efekt destabilizacji przepływu i wzmacniania początkowych zaburzeń.

Szczegółowe wyniki wykonanej analizy zamieszczono w Załączniku nr 7. Najważniejszym wnioskiem z wykonanych analiz jest informacja, że powstawanie niestabilności zachodzi już przy bardzo niskich liczbach Reynoldsa. Krytyczna liczba Reynoldsa wyznaczona została jako $Re=75$. Ważnym wnioskiem jest również to, że ścianki boczne mają niewielki wpływ na obserwowane efekty destabilizacji, jeśli szerokość kanału jest dostatecznie duża (5 segmentów pofalowania, co w efekcie dało stosunek szerokości do wysokości kanału około 15). Istotne jest również to, że przy niskich liczbach Reynoldsa (poniżej wartości krytycznej) wprowadzenie pofalowania redukuje opory hydrauliczne przepływu. Po przekroczeniu krytycznej wartości liczby Reynoldsa obserwujemy szybki wzrost fluktuacji poprzecznych prędkości, z jednoczesnym powolnym wzrostem oporów hydraulicznych. Dla przykładu w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=100$ poprzeczne zaburzenia przepływu osiągają wartość rzędu kilkunastu procent średniej prędkości przepływu i postać złożonej, trójwymiarowej struktury (zobacz rys. 9.11 i 9.12 w załączniku 7), a opory hydrauliczne wzrastają jedynie o 0.3% w porównaniu do oporów przepływu Poiseuille'a.

Ostatecznie jednak zdecydowano się badania eksperymentalnej wykonać w kanale o sinusoidalnym pofalowaniu ścianek. Rozwiązanie takie było co prawda bardziej kosztowne i trudne do wykonania, niemniej jednak było bardziej zgodne z przewidzianą teoretycznie optymalną geometrią kanału. Pomimo tego, badania przepływu przez geometrię uproszczoną przedstawione w tym rozdziale dostarczyły istotnych informacji o naturze obserwowanych zjawisk i pozwoliły na głębsze zrozumienie parametrów mających wpływ na ich przebieg.

9. SYMULACJA DNS PRZEPŁYWU CIECZY W KANALE Z POPRZECZNYM POFALOWANIEM ŚCIANEK METODĄ OBJĘTOŚCI SKOŃCZONYCH

W załączniku 8 przedstawiono szczegóły analizy numerycznej przeprowadzonej metodą DNS dla wybranych wcześniej 5 geometrii pofalowanego kanału wybranego do analiz w rozdziale 2 (rys. 2.5 i tabela 1). Analiza numeryczna miała na celu weryfikację przewidywań modelu teoretycznego, który wskazał na możliwość powstania zaburzeń poprzecznych destabilizujących przepływ już przy liczbach Reynoldsa rzędu 100. Symulacja numeryczna przepływu wykonana została metodą objętości skończonych, wykorzystując komercyjny pakiet do obliczeń przepływowych Fluent (Ansys Inc.). Uzyskanie poprawnych rozwiązań dla przepływu zaburzonego niestabilnościami poprzecznymi wymagało wykonania obliczeń dla bardzo małych kroków czasowych i bardzo gęstej siatki obliczeniowej. Z uwagi na wymiary rozpatrywanych kanałów uniemożliwiło to rozpatrywanie przepływu w bardzo długim kanale

i śledzenie narastania zaburzeń. Wobec tego, w celu detekcji możliwych do wystąpienia zaburzeń przepływu w modelu numerycznym założono przepływ w nieskończonym kanale przyjmując okresowe warunki brzegowe na wlocie i wylocie kanału. Na potrzeby obliczeń wygenerowano zdefiniowane w rozdziale 2 (por. zał. 8) geometrie kanału o identycznych do planowanych w eksperymencie wymiarach i pofalowaniach ścianki ($G_0 - G_4$) oraz geometrię obliczeniową dla referencyjnego kanału płaskiego G_p . Przeprowadzono obliczenia dla narastających wartości liczb Reynoldsa z zakresu od $Re = 50$ do $Re = 3000$.

Podstawowym rezultatem wykonanych symulacji numerycznych było potwierdzenie wyników analizy teoretycznej o możliwości destabilizacji przepływu w kanałach o proponowanej geometrii już przy niewielkich liczbach Reynoldsa. Stwierdzono pojawianie się wzmocnienia poprzecznych zaburzeń przepływu dla wszystkich analizowanych geometrii pofalowanej ścianki. Potwierdzono, że wybrana w toku analizy teoretycznej optymalna geometria pofalowań G_0 w porównaniu z 4 pozostałymi wariantami pofalowania faktycznie pozwala na najwcześniejszą destabilizację przepływu. Pokazano, że wyznaczona numerycznie krytyczna liczba Reynoldsa, rozdzielająca reżim wygaszania i wzmacniania początkowych zaburzeń poprzecznych wynosi dla poszczególnych geometrii odpowiednio:

- dla G_0 : $50 < Re_{kr} < 75$, przypuszczalnie blisko wartości 75;
- dla G_1 : $75 < Re_{kr} < 100$;
- dla G_2 : $100 < Re_{kr} < 200$, przypuszczalnie blisko wartości 100;
- dla G_3 : $100 < Re_{kr} < 150$,

Można wobec tego przyjąć, że najbardziej optymalną z punktu widzenia jak najwcześniejszej destabilizacji przepływu jest geometria G_0 (co zostało przewidziane w analizie teoretycznej).

W rezultacie symulacji numerycznych potwierdzono, że zgodnie z modelem teoretycznym zaprojektowana geometria pofalowania kształtu ścianki kanału nie wprowadza istotnych dodatkowych oporów hydraulicznych, a dla małych liczb Reynoldsa może je nawet obniżyć. W zakresie niewielkich liczb Reynoldsa, zbliżonych do 100, w każdym z analizowanych wariantów konfiguracji geometrii kanału, wyznaczone numerycznie gradienty ciśnienia są zbliżone do teoretycznych oporów hydraulicznych (wartości zbliżone do 1 na rysunku 3 w załączniku 8). W geometrii G_0 , uznanej na podstawie modelu teoretycznego za optymalną z punktu widzenia najniższej krytycznej liczby Reynoldsa dla której zachodzi wzmocnienie destabilizacji przepływu, wzrost oporów przepływu dla liczby Reynoldsa $Re=100$ wynosi zaledwie 8%. Natomiast ze względu na opory hydrauliczne stwierdzono, że najbardziej optymalną geometrią jest geometria G_3 , dla której ma miejsce nawet niewielki spadek oporów przepływu.

Wykonując symulacje numeryczne zbadano wpływ modyfikacji geometrii ścianek na warunki wymiany ciepła w układzie. Stwierdzono, że dla geometrii o optymalnym kształcie G_0 i przepływu z liczbą Reynoldsa równą $Re=100$ obliczony strumień ciepła osiąga wartość ponad 50% wyższą niż analogiczny przepływ w płaskim kanale (G_p). Wzrost strumienia ciepła spowodowany jest tylko częściowo z 22% wzrostem powierzchni wymiany związanej z pofalowaniem ścianki. Pozostały zysk jest niewątpliwie spowodowany analizowanymi poprzecznymi fluktuacjami przepływu. Podkreślić należy, że wprowadzone pofalowanie ścianki, przy rozpatrywanej liczbie Reynoldsa $Re=100$, wprowadziło jedynie 8% wzrost oporów hydraulicznych.

10. ANALIZA EKSPERYMENTALNA WPLYWU POFALOWANIA ŚCIANEK KANAŁU NA STRUKTURĘ I CHARAKTER PRZEPŁYWU

Zamieszczona w Załączniku 9 eksperymentalna analiza wpływu pofalowania geometrii na opory hydrauliczne, strumień ciepła oraz strukturę przepływu została przeprowadzona dla sekwencji 5 pofalowań ścianki (G_0 - G_4) i kanału referencyjnego z płaską ścianką (G_p). Badania eksperymentalne dotyczą przepływu w skończonym, stosunkowo krótkim kanale. Z tego względu porównanie fizycznych efektów związanych z pojawianiem się poprzecznych zaburzeń przepływu z przewidywaniami teoretycznymi i numerycznymi ma niezmiernie ważne znaczenie dla praktycznego wykorzystania tego zjawiska. Poniżej podsumowujemy rezultaty tych badań.

Stabilność przepływu

Na podstawie pomiarów stabilności przepływu metodą smugową stwierdzono, że wprowadzenie modyfikacji kształtu dolnej ścianki kanału spowodowało zauważalne oznaki destabilizacji przepływu. Dla pofalowania oznaczonego jako G_4 , destabilizacja była widoczna już przy liczbie Reynoldsa $Re=109$. Przy wzroście liczby Reynoldsa do 255 we wszystkich przeanalizowanych geometriach o zmodyfikowanym kształcie, niestabilności przepływu były już wyraźnie widoczne. Przy tej samej liczbie Reynoldsa w geometrii referencyjnej G_p niestabilności przepływu były niemal niezauważalne. Świadczy to o tym, że wprowadzona modyfikacja geometrii obniżyła krytyczną liczbę Reynoldsa do wartości około 100.

Opory hydrauliczne

Analiza oporów hydraulicznych przeprowadzono w badanym kanale dla 15 różnych, narastających liczb Reynoldsa z zakresu od 36 do 1314 ($Re=36, 73, 109, 146, 182, 219, 255, 292, 328, 365, 547, 730, 912, 1095$ oraz 1314) dla wszystkich wariantów modyfikacji geometrii ścianek ($G_0 - G_4$) oraz dla geometrii bazowej G_p o ściankach płaskich. Wykonano w sumie 90 niezależnych pomiarów gradientu ciśnienia. Stwierdzono, że dla niskich liczb Reynoldsa wprowadzona modyfikacja geometrii ścianek w większości przypadków nie dość, że nie wprowadza żadnych dodatkowych oporów hydraulicznych przepływu, to nawet opory te nieznacznie redukuje. Jest to szczególnie widoczne dla geometrii G_3 . Stanowi to potwierdzenie numerycznych i teoretycznych wyników uzyskanych we wcześniejszych etapach niniejszego projektu, gdzie stwierdzono, że odpowiednio wprowadzona modyfikacja geometrii może powodować obniżenie strat hydraulicznych dla przepływów laminarnych. Wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa stosunek oporów hydraulicznych wyznaczonych eksperymentalnie i teoretycznie również rośnie. Dla $Re > 100$ efekt obniżania oporów hydraulicznych znika. Do podobnych wniosków prowadzi analiza teoretyczna.

Struktura przepływu

Analiza struktury pola przepływu wymagała zbadania wielu tysięcy jednostkowych pól prędkości zmierzonych metoda μPIV dla dwóch lokalizacji w kanale: w okolicach wlotu do kanału i w okolicach wylotu. Obie lokalizacje umiejscowione były na wzdłużnej osi symetrii układu. Pomiary miały wykazać ewentualną zmianę struktury przepływu i pojawienie się lateralnych fluktuacji pola prędkości w funkcji zmian pofalowania ścianki kanału.

Stwierdzono, że optymalna modyfikacja (G_0) powierzchni dolnej ścianki kanału, polegająca na wprowadzeniu pofalowania składającego się z 8 segmentów o amplitudzie $S=0.8\text{mm}$ spowodowała wzrost podłużnych i poprzecznych fluktuacji prędkości wzdłuż kanału. Wzrost ten jest bardzo mały, ale zauważalny, i ma miejsce już dla liczby Reynoldsa równej $Re=109$. Dla geometrii innych niż optymalna zależność pomiędzy wzmacnianiem poprzecznych fluktuacji prędkości a liczbą Reynoldsa przebiegało inaczej. Dla geometrii G_1 , która składała się również z 8 segmentów, ale amplituda pofalowania zmniejszona została do 0.6mm , dla liczby Reynoldsa $Re=109$ zaobserwowane zostało nieznaczne wygaszanie fluktuacji, zarówno podłużnych, jak i poprzecznych. Modyfikacja geometrii polegająca na wprowadzeniu 5 segmentów pofalowania (czyli „fale” są dłuższe w porównaniu z pofalowaniem optymalnym, gdzie było 8 segmentów) o amplitudzie $S=0.8$ w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=109$ nie zapewniała wzmacniania fluktuacji prędkości. Zarówno podłużne, jak i poprzeczne składowe zaburzenia przepływu uległy tutaj zauważalnemu wygaszeniu. Wzrost liczby Reynoldsa do $Re=255$ spowodował jednak, że fluktuacje prędkości, zarówno podłużne, jak i poprzeczne, zaczęły być wzmacniane. Dla porównania pomiary pola prędkości wykonane w kanale bazowym G_p , tzn. w kanale o płaskich wszystkich ściankach, bez wprowadzanych modyfikacji kształtu pozostają na bardzo niskim poziomie bliskim granicy dokładności użytej techniki PIV.

Efekt pofalowania na fluktuacje pola prędkości wyraźnie pokazała analiza punktowa, przeprowadzona dla lokalnych wartości prędkości wyekstrahowanych z pól prędkości zmierzonych techniką μPIV . Zbadane przebiegi czasowe wyraźnie pokazują, że już przy liczbie Reynoldsa $Re=109$ amplituda fluktuacji na wylocie wzrasta ponad 3 krotnie osiągając nawet 15% prędkości średniej. Bazując na zmierzonych przebiegach poprzecznych fluktuacji prędkości można jednoznacznie stwierdzić istotny wpływ pofalowania ścianki kanału na wzmacnianie początkowych zaburzeń przepływu.

Wymiana ciepła

Badania miały na celu empiryczne sprawdzenie wpływu ewentualnych fluktuacji pola prędkości na intensyfikację wymiany ciepła. Badania przeprowadzono analizując barwy pokrycia ciekłokrystalicznego. Zastosowana technika pozwoliła na wizualizację wpływu modyfikacji geometrii kanału na zmiany temperatury badanej ścianki. Wyniki pomiarów uzyskano w postaci czasowego przebiegu średniej temperatury ścianki kanału wyznaczonej dla poszczególnych konfiguracji geometrycznych. Stwierdzono, że najbardziej intensywne chłodzenie pojawia się dla konfiguracji G_2 . Natomiast geometria uważana za optymalną (G_0) w niniejszych pomiarach charakteryzowała się stosunkowo niską intensywnością wymiany ciepła. Jedną z przyczyn tej niejednoznaczności pomiarów może być silna nieliniowość zmian mierzonej barwy (Hue) z temperaturą. Pomiary obarczone są również trudnym do uwzględnienia efektem wynikającym ze zmiany powierzchni oddającej ciepło, innej dla każdej z konfiguracji.

PODSUMOWANIE

- Geometrią najbardziej optymalną ze względu na opory hydrauliczne jest geometria G_3 . Stwierdzone to zostało teoretycznie, numerycznie i eksperymentalnie. CFD i pomiary pokazały, że w przepływie z $Re=100$ w tej geometrii następuje ok. 10% redukcja oporów hydraulicznych w porównaniu z gradientem ciśnienia wyznaczonym dla przepływu Poiseuille'a.
- Geometrią najbardziej optymalną ze względu na jak najniższą wartość krytycznej liczby Reynoldsa jest geometria G_0 (nazywana też optymalną). CFD pokazało, że Re_{kr} jest tutaj równe około 75.
- Eksperymenty pokazały, że ze względu na wymianę ciepła najbardziej optymalna jest geometria G_2 (najszybszy zanotowany spadek temperatury przy pomiarach TLC – ale nie uwzględniono tam różnic w polu powierzchni poszczególnych geometrii). Symulacje numeryczne transportu ciepła wykonano jedynie dla geometrii G_0 i G_p (geometria bazowa o ściankach bez pofalowania). Symulacje pokazały wzrost strumienia ciepła pomiędzy G_p i G_0 w przepływie z $Re=100$ aż o 53%, przy czym opory hydrauliczne wzrosły jedynie o 8%. Powierzchnia dolnej modyfikowanej ścianki kanału wzrosła tutaj o niespełna 22%.
- Stwierdzono, że wprowadzana modyfikacja geometrii ścianki może mieć niewielki wpływ na intensyfikację mieszania – aby to osiągnąć należałoby zbudować kanał o znacznej długości – co najprawdopodobniej okaże się kłopotliwe, a nawet niemożliwe; w skali makro taki mieszalnik nie mógłby też być konkurencyjny – bo tam dominują mieszalniki turbulentne.
- Celem projektu było zbadanie wpływu pofalowania ścianek na intensyfikację mieszania – i jak napisano w punkcie wyżej, wpływ ten jest raczej niewielki. Zauważono jednak ciekawy i godny dalszych badań efekt znaczącego wzrostu możliwego do przekazania strumienia ciepła w takim pofalowanym kanale, przy jednoczesnym niewielkim wzroście oporów hydraulicznych. Można przypuszczać, że proponowane w niniejszym projekcie modyfikacje geometrii ścianek kanałów mogą okazać się ciekawym i wydajnym sposobem zwiększenia sprawności kompaktowych, niewielkich wymienników ciepła, w których z uwagi na niewielkie wymiary i brak możliwości wymuszenia przepływów ze znacznymi prędkościami (i co z tym idzie ze znacznymi ciśnieniami), nie jest możliwe wygenerowanie przepływu turbulentnego, który zapewniłby dostateczną ilość odbieranego ciepła.
- Dla praktycznego wykorzystania w wymiennikach ciepła przewidzianego teoretycznie i potwierdzonego numerycznie i eksperymentalnie efektu destabilizacji przepływu w kanałach przy liczbach Reynoldsa rzędu 100 konieczne jest wstępne wymuszenie zaburzeń o charakterystycznej liczbie falowej i odpowiedniej amplitudzie. W przeciwnym wypadku długi czas narastania zaburzeń (a więc konieczna długość kanału) zniweczy korzystny wzrost wydajności cieplnej układu.

Bibliografia

1. Szumbariski J.: Niestateczność ruchu cieczy lepkiej w pofalowanym kanale. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika z. 218. OWPW. Warszawa, 2007
2. Szumbariski J.: Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 45, 3, pp. 659-683, 2007.
3. Blonski S., Szumbariski J., Kowalewski T.A.: Low-Reynolds-number instability of the laminar flow between wavy walls. Paper in the Proceedings of the Sixth International ASME Conference on Nanochannels, Microchannels and Minichannels (ICNMM2008), June 23-25, 2008, Darmstadt, Germany.
4. L.D. Landau, E.M. Lifszyc, Hydrodynamika, Wydawnictwa naukowe PWN, Warszawa 1994

Załącznik 1: Symulacje DNS (Direct Numerical Simulation)

Analiza numeryczna przepływów wykonana została metodą objętości skończonych przy użyciu komercyjnego pakietu do obliczeń przepływowych Fluent (ANSYS Inc.) [1]. Trójwymiarowy przepływ newtonowskiej, nieściśliwej cieczy modelowano poprzez bezpośrednie rozwiązywanie pełnego, trójwymiarowego, niestacjonarnego układu równań Naviera-Stokesa (tzw. DNS – Direct Numerical Simulation). Symulacje te dostarczyły dokładnych informacji o chwilowych rozkładach ciśnienia oraz chwilowych polach prędkości dla całego zakresu skal zarówno przestrzennych, jak i czasowych.

Wszystkie obliczenia przeprowadzone zostały w laboratorium numerycznym Zakładu Mechaniki i Fizyki Płynów IPPT PAN, wyposażonym w dwa komputery dużej mocy¹.

Symulacje DNS

Ruch ośrodków ciągłych, w tym również ruch burzliwy, opisuje równanie Naviera-Stokesa, będące równaniem zachowania pędu. Uzupełniając je równaniem ciągłości (zasada zachowania masy) i odpowiednimi warunkami brzegowymi otrzymujemy zamknięty układ równań. Dla rozpatrywanego zagadnienia równanie Naviera-Stokesa można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right).\end{aligned}$$

a uzupełniające równanie ciągłości jako:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

W podanym układzie równań niewiadomymi są trzy składowe prędkości: u_x , u_y i u_z oraz ciśnienie p . Otrzymaliśmy zatem zamknięty układ równań, w którym liczba równań i niewiadomych jest równa. Poprawne sformułowanie zadania wymaga jednak podania jeszcze warunków brzegowych, które uzależnione są od fizycznego charakteru symulowanego problemu oraz geometrii domeny obliczeniowej. Dla rozpatrywanego przepływu przyjęto warunki brzegowe I rodzaju (warunek Dirichleta), które zapisano jako:

$\vec{u} = \vec{u}_{inlet}$ – dla ścianki będącej wlotem do kanału

$p = p_{atm}$ – dla ścianki będącej wylotem z kanału (p_{atm} – ciśnienie otoczenia)

$\vec{u} = 0$ – na pozostałych ściankach domeny obliczeniowej (warunek braku poślizgu).

Układ wymienionych wyżej równań różniczkowych wraz z warunkami brzegowymi ściśle opisuje rozpatrywany w pracy problem fizyczny. Bezpośrednie numeryczne rozwiązywanie takiego układu równań, tzn. rozwiązywanie bez wprowadzania żadnych

¹ 24-procesorowy serwer numeryczny wyposażony w 128GB pamięci operacyjnej RAM oraz 8-procesorowy serwer z 32GB pamięci RAM.

dodatkowych modeli turbulencji, w numerycznej mechanice płynów nazywane jest w skrócie jako *DNS* (ang. Direct Numerical Simulation). W metodzie tej wymienione równania rozwiązywane są dla całego zakresu skal turbulencji, zarówno przestrzennego jak i czasowego. Dlatego też, jako wynik symulacji otrzymujemy dokładny, pełny opis chwilowego pola prędkości i ciśnienia.

W pracy wymieniony powyżej układ równań rozwiązywany był numerycznie metodą objętości skończonych. Do rozwiązania równań różniczkowych zastosowano algorytm SIMPLE (ang. Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations), który polega na obliczaniu iteracyjnym na przemian składowych prędkości oraz ciśnienia [2; 3]. Dodatkowo wykorzystano standardowe wartości współczynników podrelaksacji w celu ustabilizowania procesu obliczeniowego oraz schemat różnicowy drugiego rzędu „pod prąd” (ang. second-order upwind), w którym pochodna aproksymowana jest ilorazem różnicowym „wstecz” lub „w przód”, w zależności od kierunku przepływu.

Literatura

- [1] Fluent 6. *User's Guide*. Fluent Inc., Lebanon, NH, 2002.
- [2] R. Gryboś, *Podstawy mechaniki płynów*, PWN 1998.
- [3] S.V. Pantakar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation. Washington 1980.

Załącznik 2: Opis techniki PIV (Particle Image Velocimetry)

1. Klasyczna (makroskalowa) anemometria obrazowa

Anemometria obrazowa, zwana w skrócie PIV (ang. Particle Image Velocimetry), jest metodą pomiaru chwilowego pełnego pola prędkości poruszającego się płynu [1], a jej głównymi zaletami są bezinwazyjność oraz brak teoretycznych ograniczeń co do charakteru badanego przepływu. Wymagany jest jedynie optyczny dostęp do interesującego nas poruszającego się płynu, który musi być przezroczysty. Możliwe są tu pomiary przepływów laminarnych charakteryzujących się niewielką prędkością, jak też przepływów burzliwych o znacznych prędkościach. Zakres pomiarowy limitowany jest głównie posiadaną aparaturą, umożliwiającą rejestrację obrazów dostatecznie wysokiej jakości, a w przypadku przepływów z dużymi prędkościami, dodatkowo z odpowiednio dużą częstotliwością. Pomiar polega na zarejestrowaniu w znanych odstępach czasowych sekwencji obrazów cząstek znacznikowych dodanych do przepływającego czynnika oraz późniejszym wyznaczeniu przemieszczeń tych cząstek, a tym samym prędkości unoszącego je płynu. Ważne jest, aby cząstki znacznikowe, zwane posiewem, były odpowiednio dobrane w zależności od analizowanego przepływu. Głównym kryterium ich doboru jest konieczność spełnienia warunku, że ruch cząstek musi być tożsamy z ruchem unoszącego je płynu. Aby spełnić ten wymóg i wyeliminować wpływ grawitacji oraz czynników inercyjnych, ich rozmiar powinien być dostatecznie mały, a gęstość jak najbardziej zbliżona do gęstości płynącego medium. Różnice tych gęstości, szczególnie w przypadku przepływów niestacjonarnych, powodować będą, że prędkości płynu i cząstek znacznikowych będą różne. Dla cząstek kulistych różnica ta wynosi [2]:

$$u_p - u_f = d_p^2 \frac{(\rho_p - \rho_f)}{18\mu} \frac{du_f}{dt}, \quad (1)$$

gdzie u_p i u_f są odpowiednio prędkościami cząstek znacznikowych i prędkością płynu, ρ_p i ρ_f – gęstościami cząstek i gęstością płynu, d_p – średnicą cząstek, a μ – lepkością dynamiczną płynu. Warunek o równości gęstości cząstek i płynu jest łatwy do spełnienia w przypadku pomiarów prędkości w cieczach. Dla gazów natomiast warunek ten spełnić jest bardzo trudno – stosunek ρ_p/ρ_f tutaj na ogół jest rzędu tysiąca. Aby zminimalizować wpływ grawitacji i czynników inercyjnych dąży się do używania bardzo małych cząstek, o średnicach z zakresu $0.5\mu m < d_p < 5\mu m$. W przepływie niestacjonarnym, szczególnie z dużymi prędkościami, niemożliwe jest jednak całkowite wyeliminowanie różnicy prędkości cząstek i unoszącego je płynu. Czas relaksacji, po którym cząstki znacznikowe osiągają prędkość medium płynącego ze skokowo zmienną prędkością, zdefiniowany jest jako:

$$\tau = d_p^2 \frac{\rho_p}{18\mu}. \quad (2)$$

Cząstki posiewu muszą być tak dobrane, aby podany czas relaksacji był krótszy od najmniejszych skal czasowych analizowanego przepływu.

Zgodność prędkości cząstek znacznikowych i rzeczywistej prędkości unoszącego je płynu, co jest szczególnie ważne w analizie szybkozmiennych przepływów turbulentnych, określa liczba Stokesa cząstek S_K , zdefiniowana jako [2]:

$$S_K = \frac{\tau}{\tau_f}, \quad (3)$$

gdzie τ_f jest charakterystyczną skalą czasową analizowanego przepływu. W praktyce przyjmuje się, że dla $S_K < 0.1$ cząstki znacznikowe odwzorowują strukturę przepływu z dokładnością większą niż 99% [2].

Przy przeprowadzaniu pomiarów techniką PIV należy również pamiętać, że nawet w przepływach laminarnych, zgodnych z prawem Poiseuille’a, prędkość cząstek znacznikowych nie jest dokładnie równa prędkości unoszącego je płynu, ale od niej mniejsza. Wielkość tego „poślizgu” (ang. slip velocity) zależy od względnego wymiaru cząstki i w przybliżeniu wynosi [3]:

$$u_s = \frac{1}{2} u_m \left(\frac{d_p}{H} \right)^2, \quad (4)$$

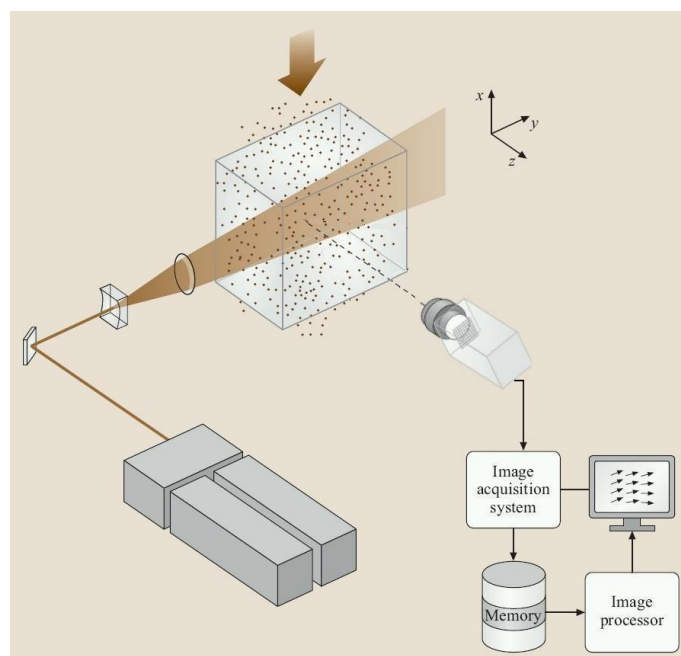
gdzie u_m jest średnią prędkością przepływu, a H wysokością kanału. Przy założeniu, że wartość tego poślizgu może wynosić maksymalnie 1% prędkości średniej przepływu, otrzymujemy, że cząstki mogą mieć średnicę do 14% wysokości kanału. W praktyce warunek ten jest zawsze spełniony, gdyż wcześniej wymienione wymagania narzucają konieczność użycia cząstek o znacznie mniejszych średnicach.

Należy także pamiętać, że cząstki znacznikowe mogą błędnie odwzorowywać strukturę przepływu w bezpośrednim sąsiedztwie ścianek kanału. Dostępne w literaturze badania podają, że cząstka unoszona przez przepływ osiąga prędkość równą 99% prędkości tego przepływu w odległości około 2 średnic tej cząstki od ścianki kanału [4].

Cząstki znacznikowe, oprócz spełniania wyżej wymienionych warunków, muszą również w dostatecznym stopniu rozpraszać światło, którym oświetlony jest przepływ, tzn. współczynniki załamania światła materiału cząstek i unoszącego je płynu muszą być w dostatecznym stopniu różne. Dodatkowo koncentracja posiewu nie powinna być zbyt duża, aby jego obecność nie modyfikowała struktury badanego przepływu oraz nie zmieniała parametrów mechanicznych, chemicznych i termodynamicznych układu. Cząstki posiewu nie powinny też być wykonane z materiałów, których wdychanie jest trujące albo szkodliwe, jak również nie powinny powodować korozji i niszczenia elementów stanowiska pomiarowego. Najczęściej jako cząstki znacznikowe, w przypadku pomiarów PIV w gazach, stosuje się kropelki (aerozole) olejów syntetycznych (np. DEHS – Di-Ethyl-Heksyl-Sebacate) i roślinnych, kropelki mieszaniny glikolu i wody, na ogół o średnicach od $1\mu m$ do $3\mu m$. Używane są również cząstki z tlenku tytanu o średnicach $0.2 \div 0.5\mu m$. Pomiary PIV

przepływu cieczy wykonuje się na ogół z użyciem cząstek wielkości od kilku do kilkudziesięciu mikrometrów wykonanych z lateksu albo innych tworzyw sztucznych. Jako posiew dość często używane są również w pomiarach przepływu cieczy puste w środku kulki szklane, często nasycone metalem w celu zwiększenia stopnia rozpraszania światła. Dobrymi cząstkami znacznikowymi, dawniej często a obecnie coraz rzadziej używanymi, są również pyłki roślin, np. sosny albo widłaka (*lycopodium*) [5].

W tradycyjnej, makroskalowej technice PIV [1, 2], aby uwidocznić cząstki znacznikowe w postaci jasnych punktów na jednej, wybranej płaszczyźnie przepływu, która podlega rejestracji cyfrową kamerą, należy badany przepływ oświetlić w zadanym przekroju wąską warstwą świetlną, tzw. nożem świetlnym, uformowanym najczęściej przez soczewkę cylindryczną. W ten sposób widoczny jest tylko badany przekrój, a pozostała część przepływu jest zaciemniona i nie podlega rejestracji (rys. 1).



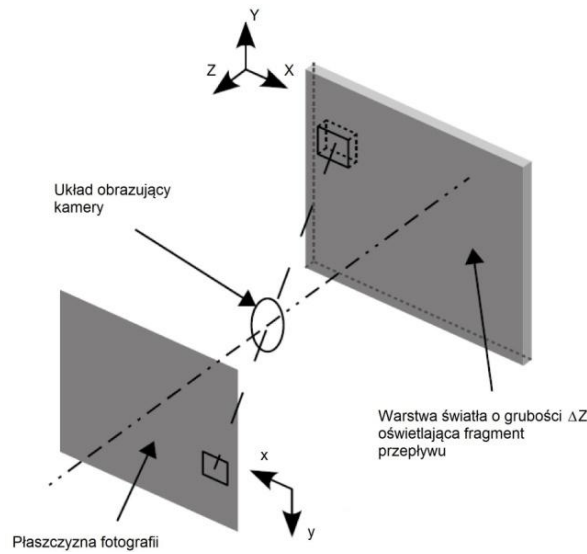
Rys. 1. Schemat standardowego stanowiska pomiarowego metodą anemometrii obrazowej (PIV) [2]

Jako źródło światła stosuje się lampy halogenowe, a obecnie najczęściej lasery impulsowe lub świecące światłem ciągłym. Oświetlenie przepływu krótkimi, trwającymi nawet mniej niż jedna nanosekunda, ale intensywnymi impulsami światła, pozwala na otrzymanie nierozmytych obrazów cząstek znacznikowych przy dużych prędkościach przepływu. Obrazy rejestrowane są przez cyfrową kamerę ustawioną prostopadle do oświetlonego przekroju (rys. 1). Użycie kamer cyfrowych pozwala na automatyczną akwizycję licznych serii fotografii, które później mogą zostać poddane analizie przez komputerowe oprogramowanie PIV.

Przestrzenny, chwilowy rozkład N cząstek znacznikowych, znajdujących się w oświetlonym obszarze przepływu, może być opisany przez zbiór Γ [1, 6]:

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie $R_i = [X_i, Y_i, Z_i]$ jest wektorem położenia i -tej cząstki w trójwymiarowej przestrzeni przepływu. Jeśli zaniedba się grubość oświetlanego przekroju (grubość noża świetlnego) to, położenie widocznych cząstek opisywane jest tylko przez dwie składowe X_i i Y_i .



Rys. 2. Schemat rzutowania obrazu na płaszczyznę fotografii; trójwymiarowy element objętości odwzorowany jest przez kamerę jako płaski fragment fotografii [6]

Obraz cząstek znacznikowych rzutowany jest przez obiektyw kamery na matrycę CCD (rys. 2) i zapisywany jako dwuwymiarowa cyfrowa fotografia. Cząstkom znacznikowym w trójwymiarowej przestrzeni odpowiadają ich obrazy na dwuwymiarowej płaszczyźnie fotografii. Zbiorowi Γ odpowiada zbiór γ :

$$\gamma = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

gdzie $r_j = [x_j, y_j]$ jest położeniem j -tego obrazu cząsteczki na płaszczyźnie fotografii, a n liczebnością zbioru. Każdej cząstce znacznikowej przyporządkowany jest jej obraz na fotografii, ale nie musi to być odwzorowanie różnowartościowe. Jeden obraz może być odwzorowaniem więcej niż jednej cząstki w rzeczywistej przestrzeni. Spowodowane jest to tym, że cząstki „mogą się zasłaniać”, tzn. dwie lub więcej cząstek może być zrzutowane w to samo miejsce na fotografii. Wielkości zbiorów Γ i γ spełniają zatem zależność:

$$n \leq N. \quad (7)$$

W eksperymentach PIV dąży się do tego, aby efekty przestrzenne były pomijalnie małe, co osiągane jest przez uformowanie noża świetlnego o dostatecznie małej grubości, a tym samym spełniony był warunek:

$$\frac{N - n}{N} \ll 1. \quad (8)$$

Spełnienie warunku (8) oznacza, że prawie każda rzeczywista cząstka ma swoją reprezentację na fotografii. Z drugiej strony grubość warstwy noża świetlnego musi być na tyle duża, aby cząstki poruszające się skośnie lub nawet prostopadłe do tej warstwy, nie opuściły jej między kolejnymi rejestracjami obrazów.

Współrzędne na płaszczyźnie fotografii związane są ze współrzędnymi rzeczywistymi przekształceniem liniowym:

$$X = \frac{x}{M}, Y = \frac{y}{M}. \quad (9)$$

Współczynnik M jest współczynnikiem skalowania, który wyznaczany jest empirycznie w procesie skalowania układu pomiarowego.

Podczas eksperymentu PIV rejestrowane są dwa zdjęcia (zazwyczaj wiele par zdjęć) w znanym odstępie czasowym Δt : pierwsze zdjęcie w chwili t_0 , drugie w chwili $t_1 = t_0 + \Delta t$. Otrzymujemy więc dwie fotografie zawierające informacje o chwilowym rozkładzie przestrzennym cząstek znacznika. Dla każdej fotografii można zdefiniować zbiory położeń cząstek znacznika: $\Gamma(t_0)$ i $\Gamma(t_1)$. W praktyce, jeśli $\Delta t \neq 0$, oba te zbiory nie dotyczą tego samego zbioru cząstek, gdyż część cząstek widocznych na pierwszym obrazie, w czasie Δt może opuścić kadr kamery i nie być zarejestrowana na drugim obrazie. Podobnie na drugim obrazie mogą pojawić się cząstki, które nie były widoczne na pierwszej fotografii. W zależności od długości interwału Δt oraz od grubości noża świetlnego i charakteru przepływu, liczba cząstek widocznych na obu obrazach będzie różna. Zbiory $\Gamma(t_0)$ i $\Gamma(t_1)$ możemy zapisać w postaci sumy podzbiorów:

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= \Gamma_w(t_0) \cup \Gamma_s(t_0), \\ \Gamma(t_1) &= \Gamma_w(t_1) \cup \Gamma_s(t_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Zbiory oznaczone indeksem w zawierają położenia tego samego zbioru cząstek w chwilach t_0 i t_1 – mają więc tę samą liczbę elementów N_w . Zbiory oznaczone indeksem s zawierają natomiast położenia cząstek, które widoczne są tylko w jednej chwili czasowej.

Podobnie jak poprzednio, rzeczywistym zbiorom cząstek możemy przyporządkować ich obrazy na płaszczyźnie fotografii:

$$\begin{aligned}\gamma(t_0) &= \gamma_w(t_0) \cup \gamma_s(t_0), \\ \gamma(t_1) &= \gamma_w(t_1) \cup \gamma_s(t_1).\end{aligned}\tag{11}$$

Tutaj podobnie, zbiory oznaczone indeksem w , zawierają informacje o położeniach cząstek, które widoczne są na obu fotografiach, a zbiory z indeksem s informacje o położeniu pozostałych cząstek, widocznych tylko na pierwszym lub tylko na drugim zdjęciu.

Jeżeli liczność zbiorów γ_w jest większa od zera, to para fotografii zarejestrowanych w chwilach t_0 i t_1 zawiera informację o przemieszczeniach cząstek znacznikowych, i informacja ta może być „wydobyta” z tych fotografii przy wykorzystaniu algorytmów techniki PIV. W praktyce wymagane jest jednak, aby co najmniej 60% cząstek znajdowało się na obu fotografiach.

Programy PIV „wydobytujące” informacje o przemieszczeniach cząstek znacznikowych bazują głównie na algorytmach przetwarzających obrazy, w szczególności na wyszukiwaniu podobieństw na kolejnych fotografiach badanego przepływu. Dwa obrazy zawierające poruszającą się grupę cząstek znacznikowych, zarejestrowane w dwóch różnych chwilach czasu, są podobne, ale nigdy nie są identyczne. Oprócz liniowego przesunięcia całej grupy cząstek, będącego skutkiem przemieszczania się analizowanego przepływu, możliwy jest cały szereg deformacji obrazu tej grupy cząstek, wynikający zarówno z natury ruchu płynów (np. ruch wirowy, turbulentny), jak też z powodów technicznych, jak niedoskonałości użytych elementów optycznych, nierównomierności oświetlenia czy szumy matrycy kamery cyfrowej i innych elementów elektronicznych. Do chwili obecnej rozwiniętych zostało wiele algorytmów [1, 2, 7], które mają podnosić dokładność uzyskiwanych wyników i czynić je niewrażliwymi na wymienione deformacje obrazów.

2. Anemometria obrazowa w skali mikro - μ PIV

Technika anemometrii obrazowej, zaadoptowana do pomiarów w mikroskali i nazywana w skrócie μ PIV (ang. micro Particle Image Velocimetry), pozwala na mikroskopową analizę struktury prędkości z mikrometrową rozdzielczością przestrzenną [8, 9]. W mikroprzepływach, z uwagi na brak miejsca na prawidłowe uformowanie noża świetlnego i użycie bardzo małych cząstek znacznikowych, często mniejszych od długości fali światła widzialnego, wymagany jest inny sposób oświetlania i wyboru płaszczyzny rejestracji [10].

W klasycznej technice PIV wybór płaszczyzny rejestracji dokonywany jest poprzez oświetlenie cienką warstwą światła tylko jednego przekroju analizowanego przepływu, przy czym grubość tej warstwy jest mniejsza od głębi ostrości obiektywu kamery, tzn. obrazy wszystkich cząstek znajdujących się w oświetlonej warstwie są „ostre”. Pozostały obszar analizowanego przepływu jest zaciemniony i nie podlega rejestracji, tzn. cząstki znacznikowe znajdujące się poza nożem świetlnym nie są widoczne na zarejestrowanych obrazach. W technice μ PIV uformowanie noża świetlnego o grubości rzędu mikrometrów, wprowadzenie go do analizowanego przepływu i zrównanie z płaszczyzną ostrości układu obrazującego jest

praktycznie niemożliwe. Z tego powodu zazwyczaj stosowane jest oświetlenie całego badanego przepływu [11]. Jako ostre widoczne są cząstki znajdujące się w płaszczyźnie ostrości obiektywu mikroskopu, a cząstki będące poza tą płaszczyzną dają obraz „rozmyty”, będący niepożądanym „szumem tła”. Stosunek sygnału do szumu, zdefiniowany jako stosunek jasności ostrych cząstek do średniej jasności tła, na którym są one widoczne, obniżany jest dodatkowo przez światło odbijane od ścianek kanału. To światło może być w łatwy sposób całkowicie wyeliminowane poprzez użycie cząstek znacznikowych będących cząstkami fluorescencyjnymi. Cząstki fluorescencyjne po wzbudzeniu światłem o danej barwie (długości fali) emitują światło o barwie innej niż światło wzbudzające, przy czym długość fali światła emitowanego jest zawsze większa niż światła wzbudzającego (przesunięcie Stokesa). Pozwala to na odfiltrowanie światła wzbudzającego, które jest odbijane od ścianek i rejestrację jedynie światła emitowanego przez cząstki znacznikowe. Eliminacja wspomnianego „szumu tła”, będącego obrazem cząstek znajdujących się poza płaszczyzną ostrości obiektywu jest niemożliwa. Jednak poprzez rozsądne dobranie parametrów przeprowadzanych eksperymentów możliwe jest obniżenie wpływu „szumu tła” do akceptowalnego poziomu, umożliwiające przeprowadzenie pomiarów z zadowalającą dokładnością i rozdzielczością zarówno przestrzenną, jak i czasową.

Dobór cząstek znacznikowych

Cząstki znacznikowe używane w pomiarach μ PIV, oprócz cech podanych dla makroskalowej techniki PIV, muszą spełniać kilka dodatkowych warunków, pozwalających na zarejestrowanie obrazów o dobrej jakości, których korelacja dostarczy wiarygodnych i dokładnych informacji o strukturze analizowanego mikroprzepływu. Ze względu na wysoką rozdzielczość przestrzenną wymaganą przy tego rodzaju pomiarach, szczególnie ważną w analizie pól prędkości z silnymi gradientami (np. w okolicy ścianek kanału), użyte cząstki znacznikowe muszą być odpowiednio małe w porównaniu z rozmiarem kanału i skalą długości obserwowanych struktur przepływu. Ich obecność również nie może zaburzać pola badanego przepływu.

Jak już zostało wspomniane, w technice μ PIV na ogół stosuje się oświetlenie całej objętości przepływu, co powoduje pojawienie się niemożliwego do usunięcia „szumu tła”. Stosunek tego szumu do jasności obrazów cząstek będących w płaszczyźnie ostrości obiektywu, a tym samym dokładność przeprowadzanych pomiarów, w ścisły sposób zależy od wielkości użytych cząstek znacznikowych, ich koncentracji i wysokości kanału, w którym analizujemy przepływ. Przyjmując, że wysokość kanału jest z góry narzucona, a rozmiar użytych cząstek zależy od parametrów hydrodynamicznych i geometrycznych analizowanego przepływu, parametrem który może być w dość szerokim zakresie modyfikowany jest koncentracja cząstek. Kryterium doboru optymalnej koncentracji jest uzyskanie zadowalającej „widzialności” cząstek znacznikowych będących w płaszczyźnie ostrości na tle cząstek będących poza tą płaszczyzną. Widzialność ta jest zdefiniowana jako [12]:

$$V = \frac{4M^2\beta^2(s_0 - a)(s_0 - a + H)}{\pi c H s_0^2 (M^2 d_p^2 + 1.49(M + 1)^2 \lambda^2 [(n/NA)^2 - 1])} , \quad (12)$$

gdzie d_p jest średnicą cząstek znacznikowych, H – wysokością kanału, a – odległością płaszczyzny pomiarowej od ścianki kanału, przez którą obserwowany jest przepływ (np. dla pomiarów na środku wysokości kanału $a = H/2$), λ – długością fali światła, M – powiększeniem układu mikroskopowego, n – współczynnikiem załamania światła dla medium pomiędzy obiektywem, a badanym układem mikroprzepływowym, NA – aperturą numeryczną obiektywu, s_0 – odległością obserwowanej cząstki od obiektywu (czyli odległością roboczą obiektywu). Parametr β określa próg rozdzielający sygnał od szumu, a jego wartość podawana jest jako $\beta = 1.92$ [12]. Współczynnik c w wyrażeniu (12) jest liczbą cząstek znacznikowych znajdujących się w jednostce objętości płynu. Optymalna wartość widzialności V została wyznaczona eksperymentalnie, jako zadowalający kompromis pomiędzy wartością stosunku sygnału do szumu i koncentracją cząstek. Zalecane jest, aby $V \sim 1.5$ [12]. Dla ustalonych parametrów optycznych stanowiska, widzialność cząstek może być zwiększona poprzez zmniejszenie ich koncentracji c lub przez zmniejszenie wysokości kanału H . Dla ustalonej koncentracji cząstek, widzialność V może być zwiększona przez użycie cząstek o mniejszej średnicy d_p albo wykorzystanie obiektywu mikroskopowego o większej aperturze numerycznej NA . Widzialność tylko w niewielkim stopniu zależy od powiększenia obiektywu M i jego odległości roboczej.

Korzystając z zależności (12) i przyjmując widzialność $V = 1.5$ można wyznaczyć optymalną koncentrację objętościową cząstek znacznikowych c_{opt}^{vol} jako:

$$c_{opt}^{vol} = \frac{2d_p^3 M^2 \beta^2 (s_0 - a)(s_0 - a + H)}{4.5 H s_0^2 (M^2 d_p^2 + 1.49(M + 1)^2 \lambda^2 [(n/NA)^2 - 1])} \times 100\% . \quad (13)$$

Powyższe ograniczenia powodują, że technika μ PIV może być stosowana do badania stosunkowo cienkich warstw poruszającego się płynu, typowo do 10mm - 15mm. Przy grubszych warstwach uzyskanie zadowalającego stosunku sygnału do szumu staje się trudne, wskutek czego pomiary mogą być obciążone zbyt dużymi błędami powodującymi, że otrzymane wyniki będą mało wiarygodne.

W eksperymentach μ PIV, szczególnie gdy przeprowadzane są z wykorzystaniem skrajnie małych cząstek znacznikowych, mogą pojawić się błędy i niedokładności pomiaru niespotykane w pomiarach makroskalowych czy też w μ PIV, ale z użyciem większych, kilku-mikrometrowych cząstek. Przy bardzo małych cząstkach zarejestrowany obraz, wskutek zjawiska dyfrakcji nie jest dokładnym odwzorowaniem geometrii cząstek. Może to doprowadzić do nieprecyzyjnego, błędnego określenia położenia cząstek i tym samym wprowadzenia niedokładności pomiaru. Drugim zjawiskiem, mającym duże znaczenie przy pomiarach μ PIV są ruchy Browna cząstek znacznikowych, wołane chaotycznymi ruchami molekuł płynu. Przy analizie powolnych przepływów laminarnych z użyciem bardzo małych cząstek, błędy pomiaru wywołane ruchami Browna mogą być istotne i muszą być

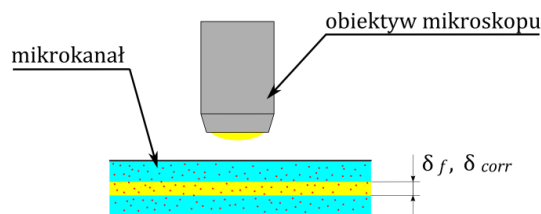
uwzględnione. W przeprowadzonych w ramach niniejszego projektu pomiarach, rejestrowane prędkości przepływu były stosunkowo wysokie. Wpływ ruchów Browna na dokładność pomiarów mógł więc zostać pominięty.

Wybór płaszczyzny rejestracji

W technice μ PIV wyboru płaszczyzny rejestracji dokonuje się przez zmianę odległości pomiędzy badanym mikrokanalem a obiektywem mikroskopu. Jak już zostało wcześniej wspomniane, jako „ostre” i jasne punkty widoczne będą jedynie cząstki znajdujące się w odpowiedniej odległości od obiektywu, na płaszczyźnie ostrości, a dokładniej w warstwie o grubości δ_f (żółta warstwa na rys. 3), nazywanej głębią ostrości mikroskopu i zdefiniowanej jako [11, 13]:

$$\delta_f = \frac{n\lambda}{(NA)^2} + \frac{n e}{NA M}, \quad (14)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania światła medium pomiędzy obiektywem mikroskopu, a badanym układem mikroprzepływowym, λ jest długością fali światła emitowanego przez cząstki fluorescencyjne, NA jest aperturą numeryczną użytego obiektywu mikroskopowego, M jest całkowitym powiększeniem układu mikroskopowego, e - najmniejszą odległością, która może być „rozpoznana” przez detektor znajdujący się w płaszczyźnie obrazowania mikroskopu – w przypadku użycia kamery cyfrowej jest to odległość pomiędzy pikselami matrycy CCD.



Rys. 3. Wybór płaszczyzny rejestracji w technice μ PIV: głębia ostrości δ_f , głębia korelacji δ_{corr}

W technice μ PIV, tradycyjna głębia ostrości, wskutek zjawiska dyfrakcji, zależnej od geometrii i wielkości użytych cząstek znacznikowych, rozszerzona jest do warstwy określonej jako głębia korelacji δ_{corr} [11]:

$$\delta_{corr} = \frac{3n\lambda}{(NA)^2} + \frac{2.16d_p}{\tan \theta} + d_p, \quad (15)$$

gdzie d_p jest średnicą cząstek znacznikowych, a θ maksymalnym kątem pomiędzy promieniami światła tworzącymi obraz obserwowanego punktu wchodzącymi do obiektywu i jego osią optyczną. Apertura numeryczna NA może być powiązana z kątem θ następującą zależnością geometryczną:

$$NA = n \sin \theta, \quad (16)$$

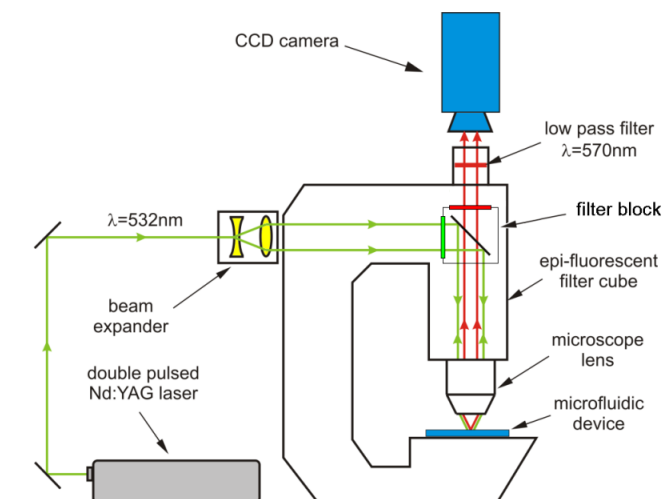
gdzie n jest współczynnikiem załamania światła płynu pomiędzy obiektywem i preparatem.

Wszystkie cząstki znacznikowe, znajdujące się w warstwie δ_{corr} są „rozpoznawalne” dla algorytmów PIV i biorą udział w pomiarze. Pozostałe fluorescencyjne cząstki znacznikowe, będące poza warstwą δ_{corr} , również emitują światło, które przez obiektyw dociera do kamery. Ich obrazy są jednak „nieostre” i nie są wykorzystywane przez algorytmy korelujące, ale powodują dodanie do rejestrowanych obrazów wspomnianego już szumu tła.

Stanowisko eksperymentalne

Typowy schemat stanowiska μ PIV przedstawiony został na rysunku 4. Zasadniczym elementem układu jest mikroskop epi-fluorescencyjny z odpowiednio dobranym zestawem obiektywów i filtrów optycznych, wyposażony dodatkowo w kamerę cyfrową oraz źródło światła z układem optycznym formującym wiązkę światła i kierującym ją do wnętrza mikroskopu. W pierwszych opublikowanych pracach [8] źródłem światła była emitująca światło białe lampą rtęciowa. Za pomocą filtrów optycznych, z całego spektrum światła białego separowana była jedna barwa, pokrywająca się z maksimum wzbudzenia użytych cząstek fluorescencyjnych. Cząstki te, dodane do obserwowanego pod mikroskopem przepływu, nawet przy niewielkich prędkościach przepływu, wskutek dużego powiększenia przestrzennego, charakteryzowały się bardzo dużym względnym przemieszczeniem na rejestrowanych obrazach. Duże względne przemieszczenie cząstek wymagało wykonywania fotografii z dużą częstotliwością i krótkim czasem ekspozycji. Układy pomiarowe wyposażone w lampy rtęciowe nie były w stanie zapewnić dostatecznej ilości światła, niezbędnej do zarejestrowania dobrej jakości obrazów z krótkim czasem ekspozycji – dlatego też układy takie mogą być wykorzystywane do analizy jedynie przepływów laminarnych z niewielkimi prędkościami. Szybkozmiennie procesy mikroprzepływowe, wymagające od technik pomiarowych wyższej rozdzielczości czasowej, wymusiły użycie szybkich kamer cyfrowych [14], pozwalających na rejestrację zdjęć analizowanego przepływu z bardzo dużą częstotliwością i krótką migawką. Wymagało to jednak zastosowania bardziej wydajnego źródła światła, gdyż lampa rtęciowa nie była w stanie zapewnić ilości światła niezbędnej do prawidłowego wykonania zdjęć w tak krótkich czasach. Zazwyczaj stosowanym źródłem światła stały się lasery, które emitują światło monochromatyczne o barwie zgodnej ze wzbudzeniem cząstek fluorescencyjnych. Użycie laserów impulsowych i unikalnych kamer cyfrowych, specjalnie zaprojektowanych do pomiarów PIV, pozwoliło na rozszerzenie zakresu prędkości, które mogą być mierzone techniką μ PIV, do około 25m/s [15, 16].

Oznacza to, że przy użyciu obiektywu mikroskopowego o dziesięciokrotnym powiększeniu, obrazy wykorzystywane do analizy μ PIV muszą być rejestrowane w odstępie około 200-300ns, a czas ekspozycji nie może przekraczać kilku nanosekund.



Rys. 4. Schemat stosowanego w badaniach stanowiska pomiarowego μ PIV

Przedstawiony na rysunku 4 układ wyposażony jest w laser impulsowy typu Nd:YAG, z którego światło za pomocą układu soczewek i zwierciadeł jest odpowiednio formowane i kierowane do mikroskopu. Tutaj wiązka pada na blok filtrów, który zazwyczaj składa się z trzech elementów optycznych: dwóch filtrów i zwierciadła dichroicznego. Pierwszy filtr bloku ma za zadanie odseparowanie ze światła białego, pochodzącego np. z lampy rtęciowej i wchodzącego do mikroskopu, światła o barwie zbliżonej do pasma wzbudzenia używanych cząstek znacznikowych. W przypadku korzystania z monochromatycznego źródła światła, np. lasera, nie ma potrzeby stosowania tego filtru. Następnie monochromatyczna wiązka światła pada na zwierciadło dichroiczne, które jest elementem optycznym odbijającym światło poniżej zadanej długości fali, a przepuszczającym powyżej tej długości. Zwierciadło dichroiczne powinno być tak dobrane, aby granica pomiędzy pasmem odbijania i przepuszczania znajdowała się pomiędzy pasmem wzbudzenia i emisji cząstek znacznikowych. Po odbiciu od zwierciadła dichroicznego, światło dociera przez obiektyw mikroskopu do badanego układu mikroprzepływowego i wzbudza fluorescencyjne cząstki znacznikowe dodane do przepływu. Cząstki te po wzbudzeniu emitują światło o innej, większej długości fali (innej barwie) niż światło wzbudzające. Oczywiście, oprócz światła emitowanego przez cząstki, do obiektywu mikroskopu powraca również światło wzbudzające, odbite od ścianek kanału czy też od cząstek znacznikowych. Jednak rejestracji kamerą cyfrową podlega jedynie światło emitowane przez cząstki, a światło wzbudzające jest odcinane przez zwierciadło dichroiczne i drugi filtr w bloku. Z uwagi na skończoną sprawność elementów optycznych, tuż przed kamerą często umieszcza się dodatkowy filtr, mający za zadanie końcowe odfiltrowanie światła wzbudzającego i pozostawienie jedynie światła emitowanego przez cząstki.

Korelacja obrazów

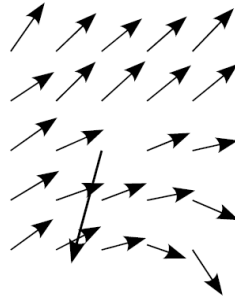
Eksperymenty PIV w skali mikro w znaczący sposób różnią się od przeprowadzanych w skali makro. Największą różnicą w uzyskiwanych obrazach przepływu z dodanymi cząstkami znacznikowymi jest ich niewielka koncentracja – najczęściej zbyt mała, aby standardowe algorytmy korelujące mogły w prawidłowy sposób obliczyć przemieszczenia tych cząstek. W przeprowadzonych badaniach użyto standardowego komercyjnego oprogramowania VidPIV (ILA GmbH) opartego o klasyczne algorytmy PIV oraz własnego programu PIV, który był modyfikacją programu *PIV-Kor* autorstwa Piotra Korczyka, opracowanego w Zakładzie Mechaniki i Fizyki Płynów IPPT PAN na potrzeby analizy przepływu w komorze chmurowej [6]. Stworzony program nie opierał się na standardowo wykorzystywanym w technice PIV algorytmie korelacji obrazów, a na wykrywaniu przemieszczeń pojedynczych cząstek. Algorytm taki w literaturze określany jest jako „particle tracking” i może być zastosowany do analizy obrazów, w których odległości pomiędzy cząstkami znacznikowymi na zarejestrowanych obrazach są większe od przemieszczeń tych cząstek pomiędzy kolejnymi rejestracjami.

Pierwszym etapem analizy obrazów było odszukanie położenia wszystkich cząstek znacznikowych na zarejestrowanych obrazach i zapisanie tych położzeń w postaci macierzy zawierającej współrzędne każdej cząstki. Następnie algorytm obliczał odległości pomiędzy jedną, wybraną cząstką z pierwszej fotografii, a wszystkimi cząstkami z drugiej fotografii. Najmniejsza z tych odległości, przy wspomnianym założeniu, że przemieszczenia cząstek są mniejsze od odległości pomiędzy cząstkami, była szukanym przemieszczeniem tej cząstki. Położenia cząstek na obu fotografiach, użyte do obliczenia tej odległości są odrzucane i nie są rozpatrywane w kolejnym kroku, w którym wybieramy kolejną cząstkę na pierwszej fotografii, liczymy ponownie wszystkie możliwe odległości do cząstek na drugiej fotografii i wybieramy najmniejszą z nich. W podobny sposób postępujemy, aż wykorzystane zostaną wszystkie położenia cząstek na pierwszej fotografii. Uzyskana w ten sposób zostanie macierz zawierająca położenia i przemieszczenia cząstek znacznikowych, zarejestrowanych podczas eksperymentu.

W otrzymanych wynikach mogą pojawić się błędne wektory przemieszczeń, gdyż nie zawsze jest spełnione założenie, że odległości pomiędzy cząstkami są większe od ich przemieszczeń. Może się zdarzyć, że cząstki teoretycznie rozmieszczone równomiernie, ale i losowo, w analizowanym przepływie, podczas rejestracji obrazu będą się znajdować blisko siebie – na tyle blisko, że odległość ta zostanie przez algorytm odczytana jako przemieszczenie cząstek. Również część z cząstek obecnych na jednej z fotografii nie będzie widoczna na drugiej (wskutek wspomnianego już opuszczania czy wchodzenia cząstek w płaszczyznę ostrości mikroskopu), co może spowodować błędne wyniki korelacji. Z tego powodu konieczne jest precyzyjne, ale i ostrożne filtrowanie uzyskanych przemieszczeń, w celu usunięcia błędnych wyników. W pracy tej zastosowano filtr medianowy, opisany poniżej.

Filtr medianowy

W praktyce, w pomiarach PIV, dość typowa jest sytuacja przedstawiona na rysunku 5, gdzie w przykładowym polu wektorowym prędkości pojawił się błędny wektor, powodujący powstanie nieciągłości tego pola. Problemy związane z eliminacją błędnych wektorów pojawiły się równocześnie z opracowaniem i pierwszym wykorzystaniem techniki PIV. W celu usunięcia takich błędnych wektorów najczęściej stosuje się filtry medianowe [1, 17].



Rys. 5. Przykładowe pole wektorowe prędkości z jednym błędnym wektorem

Filtr sprawdza każdy wektor otrzymanego pola prędkości pod kątem jego koherencji z sąsiednimi wektorami. Załóżmy, że do sprawdzenia koherencji wektora $\vec{u}_c$ branych jest p wektorów z jego najbliższego otoczenia. Łącznie z wektorem $\vec{u}_c$ otrzymujemy zbiór $(p + 1)$ elementów. Niech elementy tego zbioru będą numerowane indeksem $i = 1, 2, \dots, p + 1$. Zdefiniujmy średnią różnicę pomiędzy wektorem $\vec{u}_i$ i resztą wektorów zbioru:

$$\Delta_i = \frac{\sum_{j \neq i} |\vec{u}_i - \vec{u}_j|}{p}. \quad (17)$$

Dalej możemy znaleźć wektor medianowy, którego indeks powinien spełniać następującą zależność:

$$med = \arg \min_i \Delta_i. \quad (18)$$

Jeśli wszystkie wektory z rozważanego zbioru zaczepić w jednym punkcie, to końce wektorów utworzą grupę punktów, której rozciągłość jest charakteryzowana przez Δ_{med} . Wektor $\vec{u}_{med}$ jest wektorem, którego koniec znajduje się najbliżej środka grupy punktów. Δ_{med} jest więc średnią odległością od środka tej grupy punktów. Aby stwierdzić koherencję danego wektora $\vec{u}_c$ sprawdzany jest następujący warunek:

$$|\vec{u}_c - \vec{u}_{med}| \leq \Delta_{med}. \quad (19)$$

Spełnienie tego warunku oznacza, że testowany wektor znajduje się w obrębie klastra wektorów, jest więc z nimi koherentny. W przeciwnym wypadku, gdy spełniony jest warunek dopełniający:

$$|\vec{u}_c - \vec{u}_{med}| > \Delta_{med}, \quad (20)$$

wektor $\vec{u}_c$ nie jest koherentny z wektorami otoczenia, z dużym więc prawdopodobieństwem jest to wektor błędny. Aby naprawić ten błąd, wektor $\vec{u}_c$ zastępowany jest przez wektor $\vec{u}_{med}$.

Literatura

- [1] M. Raffel, C. Willert, J. Kompenhans. Particle Image Velocimetry: A Practical Guide. *Springer-Verlag*. Berlin 1998.
- [2] C. Tropea, A.L. Yarin, J.F. Foss (Eds.). Handbook of experimental fluid mechanics. *Springer-Verlag*. Berlin 2007.
- [3] B.P. Ho, L.G. Leal. Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows. *J. Fluid Mech.*, 65(2). pp.365-400, 1974.
- [4] J.S. Guasto. Micro- and nano-scale colloidal dynamics near surfaces. *PhD thesis*. Microfluidics Laboratory, Division of Engineering, Brown University, Providence, August 2008.
- [5] J. Banaszek, T.A. Kowalewski, P. Furmański, M. Rebow, A. Cybulski, T.S. Wiśniewski. Konwekcja naturalna z przemianą fazową w układach jednoskładnikowych i binarnych. *Prace IPPT 3/2000*. IPPT PAN, Warszawa 2000.
- [6] P.M. Korczyk. Drobnoskalowa turbulencja w procesie mieszania chmury z otoczeniem – model laboratoryjny. *Rozprawa doktorska*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa 2008.
- [7] G. Quenote, J. Pakleza, T.A. Kowalewski. Particle Image Velocimetry with Optical Flow. *Experiments in Fluids*, 25(3). pp. 177-189, 1998.
- [8] J.G. Santiago, S.T. Wereley, C.D. Meinhart, D.J. Beebe, R.J. Adrian. A particle image velocimetry system for microfluidics. *Experiments in Fluids*, 25(4). pp. 316-319, 1998.
- [9] M.M. Mielnik, L.R. SaeTRAN. Micro Particle Image Velocimetry - an overview. *Turbulence*, 10. pp. 83-90, 2004.
- [10] S. Błoński, P. Korczyk, T.A. Kowalewski. Eksperymentalna i numeryczna analiza procesu mieszania w mikro-kanale. *I Kongres Mechaniki Polskiej*. Warszawa, 28-31 sierpnia, 2007.
- [11] C.D. Meinhart, S.T. Wereley, M.H.B. Gray. Volume illumination for two-dimensional particle image velocimetry. *Measurement Science & Technology*, 11(6). pp. 809-814, 2000.
- [12] K.S. Breuer (Ed.). Microscale Diagnostic Techniques. *Springer-Verlag*. 2005.
- [13] M. Pluta. Mikroskopia optyczna. *PWN*. Warszawa 1982.

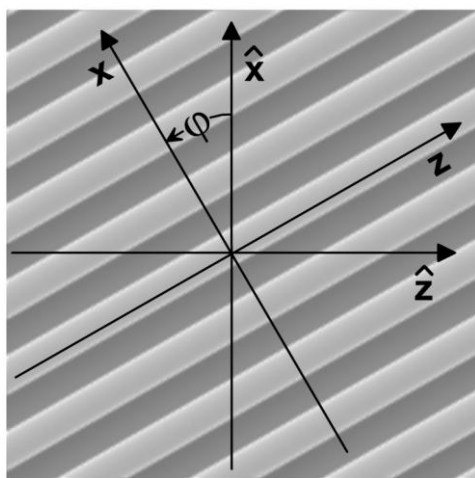
- [14] K. Shinohara, Y. Sugii, A. Aota, A. Hibara, M. Tokeshi, T. Kitamori, K. Okamoto. High-speed micro-PIV measurements of transient flow in microfluidic devices. *Measurement Science & Technology*, 15(10). pp. 1965-1970, 2004.
- [15] S. Blonski, P.M. Korczyk, T.A. Kowalewski. Analysis of turbulence in a micro-channel emulsifier. *International Journal of Thermal Science*, 46(11). pp. 1126-1141, 2007.
- [16] S. Blonski, T.A. Kowalewski. PIV analysis of turbulent flow in a micro-channel. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45(3). pp. 489-503, 2007.
- [17] J. Westerweel. Efficient detection of spurious vectors in particle image velocimetry data. *Experiments in Fluids*, 16(3-4). pp. 236-247, 1994.

ZAŁĄCZNIK NR 3

Analiza stateczności przepływu w kanale z pofalowanymi ścianami i dowolnie zorientowanym gradientem ciśnienia.

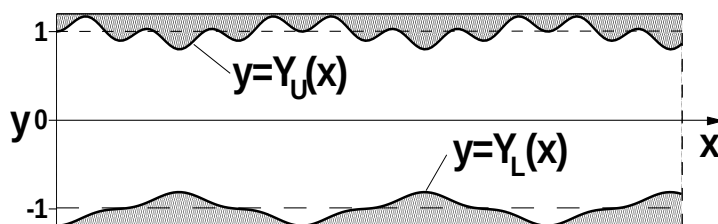
1. Sformułowanie matematyczne dla przepływu niezaburzonego

W celu zbadania wpływu „przekoszenia” kierunku gradientu ciśnienia względem kierunku pofalowania opracowano model przepływu laminarnego napędzanego spadkiem ciśnienia o kierunku zorientowanym dowolnie względem kierunku pofalowania ścian. W takiej sytuacji naturalnym jest wprowadzić dwa układy odniesienia pokazane na Rysunku 1.



Rys.1.

Układ $Oxyz$ związany jest z orientacją pofalowania (zamarkowanego na tym rysunku poprzez cieniowane pasy), natomiast układ $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ związany jest z kierunkiem średniego gradientu ciśnienia, przyjętym jako kierunek osi $O\hat{x}$. Osie Oy i $O\hat{y}$ pokrywają się. Na Rysunku 2 pokazano przykładowy kształt pofalowania obu ścian obszaru przepływu (zwanego dalej kanałem) w widoku wzdłuż osi Oz . Funkcje $y=Y_L(x)$ i $y=Y_U(x)$ opisują kształt pofalowania odpowiednio dolnej i górnej ścian kanału. O funkcjach tych zakłada się, że są okresowe z tym samym okresem geometrycznym równym $\Lambda_x = 2\pi/\alpha$, gdzie symbol α oznacza geometryczną liczbę falową.



Rys. 2

Przy tak przyjętym opisie geometrii obszaru przepływu, możemy wyróżnić dwa przypadki szczególne: $\varphi = 0$ zwany pofalowaniem wzdłużnym i $\varphi = \pi/2$ zwany pofalowaniem poprzecznym. W przypadku ogólnym $0 < \varphi < \pi/2$ mamy do czynienia z pofalowaniem ukośnym.

Przypadkiem referencyjnym jest standardowy przepływ Poiseuille'a w obszarze pomiędzy płaskimi ścianami $y = -1$ i $y = 1$ i ukierunkowany wzdłuż osi $0\hat{x}$. Pole prędkości tego przepływu ma w układzie odniesienia $0\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ postać

$$\hat{\mathbf{V}}_0(\hat{x}) = [\hat{u}_0(\hat{x}, y, \hat{z}), \hat{v}_0(\hat{x}, y, \hat{z}), \hat{w}_0(\hat{x}, y, \hat{z})] = [\hat{u}_0(y), 0, 0] = [1 - y^2, 0, 0] \quad (1)$$

Odpowiadające temu ruchowi ciśnienie zadane jest wzorem

$$\hat{p}_0 = -\frac{2}{\text{Re}} \hat{x} \quad (2)$$

Użyty w (2) symbol Re oznacza liczbę Reynoldsa zdefiniowaną przy użyciu połowę odległości fizycznej pomiędzy ścianami jako skali długości oraz maksymalnej prędkości w przepływie jako skali prędkości.

W dalszych rozważaniach potrzebne są formuły transformacyjne pomiędzy wprowadzonymi układami odniesienia. Mają one postać

$$\begin{cases} \hat{x} = x \cos \varphi + z \sin \varphi \\ \hat{y} = y \\ \hat{z} = -x \sin \varphi + z \cos \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \hat{x} \cos \varphi - \hat{z} \sin \varphi \\ y = \hat{y} \\ z = \hat{x} \sin \varphi + \hat{z} \cos \varphi \end{cases} \quad (3)$$

W efekcie zastosowania powyższej transformacji, przepływ referencyjny Poiseuille'a przyjmuje w układzie $0xyz$ postać

$$u_0 = (1 - y^2) \cos \varphi, \quad w_0 = (1 - y^2) \sin \varphi \quad (4)$$

$$p_0 = -\frac{2}{\text{Re}} (x \cos \varphi + z \sin \varphi) \quad (5)$$

Jak powiedziano, kształt pofalowania ścian kanału zadany jest za pomocą dwóch funkcji okresowych zmiennej x . Zakłada się, że funkcje te mogą być przedstawione w postaci rozwinięć fourierowskich

$$Y_L(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^L e^{in\alpha x} + C.C., \quad Y_U(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^U e^{in\alpha x} + C.C. \quad (6)$$

Współczynniki powyższych rozwinięć są zadane, a symbol „C.C.” oznacza składniki sprzężone. Średnia wysokość kanału, czyli średni dystans pomiędzy ścianami mierzony wzdłuż kierunku osi $0y$ (zwany średnią wysokością kanału) jest równy 2, tj. tyle, ile w przypadku referencyjnego przepływu Poiseuille'a.

Pole prędkości w kanale z pofalowaniem może być opisane jako suma pola przepływu referencyjnego oraz pewnej modyfikacji, którą należy wyznaczyć. Zakłada się przy tym, że pole przepływu można rozszerzyć na obszar obliczeniowy położony pomiędzy równoległymi płaszczyznami $y = Y_{MIN} = \min_{x \in [0, \Lambda_x]} Y_L(x)$ i $y = Y_{MAX} = \max_{x \in [0, \Lambda_x]} Y_U(x)$. Tym samym, obszar fizyczny staje się podzbiorem właściwym obszaru obliczeniowego. W ogólnym przypadku przepływ zmodyfikowany ma trzy niezerowe składowe prędkości i w układzie związanym z kierunkiem średniego gradientu ciśnienia ma postać

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{V}}_m(\hat{x}) &= [\hat{u}(\hat{x}, y, \hat{z}), \hat{v}(\hat{x}, y, \hat{z}), \hat{w}(\hat{x}, y, \hat{z})] = \hat{V}_0(\hat{x}) + \hat{V}_1(\hat{x}) = \\ &= [\hat{u}_0(y), 0, 0] + [\hat{u}_1(\hat{x}, y, \hat{z}), \hat{v}_1(\hat{x}, y, \hat{z}), \hat{w}_1(\hat{x}, y, \hat{z})] \\ \hat{p}_m(\hat{x}) &= \hat{p}_0(\hat{x}) + \hat{p}_1(\hat{x})\end{aligned}\quad (7)$$

W układzie odniesienia związanym z kierunkiem pofalowania postać pola przepływu jest jednak prostsza, bowiem składowe prędkości będą zależały wyłącznie od zmiennych x i y . Mamy mianowicie

$$\mathbf{V}_m(x) = \mathbf{V}_0(y) + \mathbf{V}_1(x, y) = [u_0(y) + u_1(x, y), v_1(x, y), w_0(y) + w_1(x, y)] \quad (8)$$

$$p_m(x) = p_0(x, z) + p_1(x, y, z) = p_0(x, z) + h_x x + h_z z + q(x, y), \quad (9)$$

przy czym składowe pola prędkości oraz ciśnienie przepływu referencyjnego zadane są wzorami (4) i (5). Wielkości h_x i h_z określają wielkość modyfikacji średniego gradientu ciśnienia napędzającego przepływ i są swobodnymi parametrami problemu. W dalszych rozważaniach przyjmujemy po prostu, że $h_x = h_z = 0$. Funkcja $q = q(x, y)$ określa natomiast x -okresową część modyfikacji rozkładu ciśnienia wywołanej pofalowaniem ścian i jest oczywiście nieznana.

W celu wyznaczenia modyfikacji pola przepływu związanego ze zmianą geometrii brzegu obszaru ruchu wyrażenia (8) i (9) należy podstawić do równania Naviera-Stokesa i równania ciągłości. Po przekształceniach otrzymujemy następujący układ równań

$$u_1 \partial_x u_1 + v_1 \partial_y u_1 + v_1 D u_0 + u_0 \partial_x u_1 = -\partial_x q + \text{Re}^{-1} \Delta u_1 \quad (10a)$$

$$u_1 \partial_x v_1 + v_1 \partial_y v_1 + u_0 \partial_x v_1 = -\partial_y q + \text{Re}^{-1} \Delta v_1 \quad (10b)$$

$$u_1 \partial_x w_1 + v_1 \partial_y w_1 + v_1 D w_0 + u_0 \partial_x w_1 = \text{Re}^{-1} \Delta w_1 \quad (10c)$$

$$\partial_x u_1 + \partial_y v_1 = 0 \quad (10d)$$

gdzie $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Zauważmy, że podukład złożony z równań (10a,b,d) można rozwiązać najpierw względem niewiadomych u_1 , v_1 i q , a następnie wyznaczyć niewiadomą w_1 z równania (10c). Innymi słowy, ruch w płaszczyźnie Oxy jest niezależny od ruchu w kierunku Oz (ale nie odwrotnie!).

W celu wyznaczenia ruchu w płaszczyźnie Oxy wygodnie jest wprowadzić funkcję prądu Ψ , związaną ze składowymi pola prędkości zależnościami

$$u_1 = \partial_y \Psi \quad , \quad v_1 = -\partial_x \Psi \quad (11)$$

Funkcja Ψ spełnia nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe z operatorem biharmonicznym

$$(\partial_y \Psi \partial_x - \partial_x \Psi \partial_y + u_0 \partial_x) \Delta \Psi - D^2 u_0 \partial_x \Psi = \text{Re}^{-1} \Delta^2 \Psi. \quad (12)$$

Symbolem D oznaczyliśmy operator różniczkowania $D = d / dy$. Rozwiązanie tego równania trzeba wyznaczyć numerycznie. Ponieważ funkcja Ψ jest x -okresowa, można ją zapisać w postaci szeregu Fouriera

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_k(y) e^{ik\alpha x} \quad (13)$$

Dla każdej liczby całkowitej k mają miejsce równości $\Phi_k = \Phi_k^*$ gwarantujące, że rozwiązanie jest funkcją rzeczywistą. Funkcje (amplitudy fourierowskie) Φ_k określone są w przedziale $[Y_{MIN}, Y_{MAX}]$ i spełniają nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne postaci

$$\left[D_k^2 - ik\alpha \text{Re}(u_0 D_k - D^2 u_0) \right] \Phi_k - i\alpha \text{Re} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[m D \Phi_{k-m} D_m \Phi_m - (k-m) \Phi_{k-m} D_m D \Phi_m \right] = 0 \quad (14)$$

Składowe kartezjańskie modyfikacji pola prędkości u_1 i v_1 mogą być przedstawione w postaci rozwinięć fourierowskich następująco

$$u_1(x, y) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_u^k(y) e^{ik\alpha x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D \Phi_k(y) e^{ik\alpha x} \quad (15a)$$

$$v_1(x, y) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_v^k(y) e^{ik\alpha x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\alpha \Phi_k(y) e^{ik\alpha x} \quad (15b)$$

Podobnie, rozwinięcie fourierowskie może być użyte dla składowej poprzecznej względem kierunku pofalowania, a mianowicie

$$w_1(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_w^k(y) e^{ik\alpha x} \quad (16)$$

Podstawiając formuły (15) i (16) do równania (10c) otrzymujemy liniowe równania różniczkowe zwyczajne dla funkcji $f_w^k, k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

$$\left[(D^2 - k^2 \alpha^2) - ik\alpha \text{Re} u_0 \right] f_w^k - i \text{Re} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[m\alpha D \Phi_{k-m} - (k-m)\alpha \Phi_{k-m} D \right] f_w^m - k\alpha \Phi_k D w_0 \right\} = 0 \quad (17)$$

Warunki brzegowe dla pola prędkości mają postać

$$u_0[Y_L(x)] + u_1[x, Y_L(x)] = 0 \quad , \quad v_1[x, Y_L(x)] = 0 \quad (18a)$$

$$u_0[Y_U(x)] + u_1[x, Y_U(x)] = 0, \quad v_1[x, Y_U(x)] = 0 \quad (18b)$$

$$w_0[Y_L(x)] + w_1[x, Y_L(x)] = 0 \quad (18c)$$

$$w_0[Y_L(x)] + w_1[x, Y_L(x)] = 0 \quad (18d)$$

Mówiąc ściśle, warunki (18) mają charakter więzów nałożonych na pole prędkości na liniach położonych wewnątrz obszaru obliczeniowego (zanurzonych granicach), a nie na jego brzegu. Ze względu na pierwotne pochodzenie tych warunków, będziemy nazywać je nadal „warunkami brzegowymi”.

Warunki (18a,b) mogą być wyrażone przez funkcje Φ_k , $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ oraz ich pochodne. Jednoznaczne określenie funkcji prądu Ψ wymaga jednak dwóch dodatkowych równań. Pierwsze z nich ma postać

$$\Psi[x, Y_L(x)] + \Psi_0[Y_L(x)] = 0 \quad (19)$$

Interpretacja warunku (19) jest oczywista: kontur ściany dolnej $y = Y_L(x)$ jest linią prądu, na której całkowita funkcja prądu jest równa zero. Symbolem Ψ_0 oznaczyliśmy funkcję prądu odpowiadającą referencyjnemu przepływowi Poiseuille’a, tj. taką, że $D\Psi_0 = u_0$. Drugie w równań odpowiada dodatkowemu warunkowi nałożonemu na wielkość modyfikacji średniej wartości gradientu ciśnienia. Otóż zakładamy, że modyfikacja taka nie zachodzi, tj. średnia wartość gradientu ciśnienia pozostaje taka jak w przepływie referencyjnym. Można pokazać, że jest tak wówczas, gdy

$$D^2\Phi_0(Y_{MAX}) - D^2\Phi_0(Y_{MIN}) - 2\alpha \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} k \Im [(\Phi_k D\Phi_k^*)(Y_{MAX}) - (\Phi_k D\Phi_k^*)(Y_{MIN})] = 0 \quad (20)$$

2. Metoda numeryczna dla przepływu niezaburzonego

Podane w poprzednim paragrafie równania rozwiązane zostały numerycznie przy zastosowaniu spektralnej metody zanurzonych granic. Jest to uogólniony wariant metody stosowany wcześniej do analizy przepływów w kanałach z pofalowaniem zorientowanym wzdłużnie i opisanej w pracy [1].

Metoda obliczeniowa składa się z dwóch etapów:

- Rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla funkcji prądu Ψ , co pozwala określić składowe u_1 i v_1 pola prędkości $\mathbf{V}_1$
- Rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla poprzecznej składowej w_1 .

Niewiadomymi w pierwszym etapie obliczeń są zespolone funkcje-współczynniki Φ_k , $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Rozwinięcie fourierowskie funkcji Ψ podlega obcięciu do skończonej liczby $2N+1$ modów o numerach $|k| \leq N$, a każda w uwzględnionych funkcji Φ_k , $k = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$ aproksymowana jest wielomianem stopnia M postaci

$$\Phi_k(y) = \sum_{j=0}^M \phi_k^j T_j(y) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (21)$$

gdzie symbolem T_j oznaczyliśmy wielomiany Czebyszewa dla przekształconego argumentu

$$T_j(y) = T_j\left[\frac{1}{2}(Y_{MAX} - Y_{MIN})y + \frac{1}{2}(Y_{MAX} + Y_{MIN})\right] \quad (22)$$

W powyższej formule, symbol T_j oznacza standardowy wielomian Czebyszewa j -tego stopnia. W następnym etapie reprezentacje Czebyszewa funkcji Φ_k , $k = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$ podstawiane są do równań różniczkowych (14). Skończony zbiór równań algebraicznych dla nieznanymi współczynników Czebyszewa $\{\phi_k^j, j = 0, 1, \dots, M, |k| \leq N\}$ otrzymywany jest z warunków ortogonalności residuów równań (14) względem skończenie wymiarowej przestrzeni wielomianów stopnia nie wyższego niż $M-4$. Ta procedura generuje $(2N+1) \cdot (M-3)$ algebraicznych równań nieliniowych. W celu domknięcia układu niezbędne jest dodatkowe $4 \cdot (2N+1)$ równań, tzn. po cztery równania dla każdego modu Fouriera. Równania te wynikają z warunków brzegowych postawionych dla składowych pola prędkości oraz dwóch warunków dodatkowych dla funkcji prądu Ψ .

Omówimy krótko sposób wyprowadzenia równań domykających. Ograniczymy się do równań wynikających z warunków brzegowych postawionych na pofalowanej ścianie dolnej $y = Y_L(x)$; wyprowadzenie dla ściany górnej przebiega analogicznie. Przedstawiona niżej metoda jest uogólnieniem podejścia przedstawionego w pracy [1].

Przybliżone rozkłady składowych prędkości $u_1(x, y)$ i $v_1(x, y)$ na ścianie są określone przez następujące rozwinięcia fourierowskie

$$u_1[x, Y_L(x)] = \sum_{k=-N}^N D\Phi_k[Y_L(x)] e^{ik\alpha x} = \sum_{k=-(M+N)}^{M+N} \hat{u}_1^k e^{ik\alpha x} \quad (23a)$$

$$v_1[x, Y_L(x)] = \sum_{k=-N}^N ik\alpha \Phi_k[Y_L(x)] e^{ik\alpha x} = \sum_{k=-(M+N)}^{M+N} \hat{v}_1^k e^{ik\alpha x} \quad (23b)$$

Współczynniki $\hat{u}_1^k$ i $\hat{v}_1^k$ mogą być wyrażone przez współczynniki Czebyszewa $\{\phi_m^j, j = 0, 1, \dots, M, |m| \leq N\}$

$$\hat{u}_1^k = \sum_{m=-N}^N \sum_{j=0}^M d_{k-m}^j \phi_m^j \quad , \quad \hat{v}_1^k = -i\alpha \sum_{m=-N}^N \sum_{j=0}^M m s_{k-m}^j \phi_m^j \quad (24)$$

W formułach (24) symbole s_k^j i d_k^j oznaczają współczynniki Fouriera szeregów reprezentujących x -okresowe złożenia wielomianów Czebyszewa z funkcją opisującą kształt ściany dolnej

$$T_j[Y_L(x)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k^j e^{ik\alpha x} \quad , \quad DT_j[Y_L(x)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^j e^{ik\alpha x} \quad (25)$$

Analogicznie, można zdefiniować złożenie

$$u_0[Y_L(x)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0^k e^{ik\alpha x} \quad (26)$$

Przy użyciu zależności (24), (25) i (26), warunki znikania składowych $u_1(x, y)$ i $v_1(x, y)$ na ścianie dolnej przyjmują postać układu równań

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{j=0}^M d_{k-m}^j \phi_m^j + \hat{u}_0^k = 0, \quad |k| \leq N \quad (27a)$$

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{j=0}^M m s_{k-m}^j \phi_m^j = 0, \quad 0 < |k| \leq N \quad (27b)$$

Otrzymane równania to w istocie dyskretny odpowiednik warunków całkowych postaci

$$\int_0^{\Lambda_x} u_1[x, Y_L(x)] e^{-ik\alpha x} dx = 0, \quad \int_0^{\Lambda_x} v_1[x, Y_L(x)] e^{-ik\alpha x} dx = 0, \quad |k| > 0 \quad (28)$$

Warunek zerowania funkcji Ψ na dolnej ścianie przyjmuje formę

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{j=0}^M (s_m^j)^* \phi_m^j + \hat{\Psi}_0^0 = 0 \quad (29)$$

przy czym $\hat{\Psi}_0^0 = \frac{1}{\Lambda_x} \int_0^{\Lambda_x} \Psi_0[Y_L(x)] dx$.

Wreszcie, warunek eliminujący zmianę średniego gradientu ciśnienia ma postać

$$\sum_{j=0}^M [1 - (-1)^j] j^2 (j^2 - 1) \phi_0^j + \frac{3 \operatorname{Re} \alpha}{Y_{MAX} - Y_{MIN}} \sum_{k=1}^N k \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^M [1 + (-1)^{m+j}] j^2 \Im_m[(\phi_k^m)^* \phi_k^j] = 0 \quad (30)$$

Przy jego wyprowadzeniu wykorzystane zostały następujące własności standardowych wielomianów Czebyszewa

$$D^2 T_j(Y_{MIN}) = [(Y_{MAX} - Y_{MIN}) / 2]^2 (-1)^j j^2 (j^2 - 1) / 3.$$

$$D^2 T_j(Y_{MAX}) = [(Y_{MAX} - Y_{MIN}) / 2]^2 j^2 (j^2 - 1) / 3$$

Efekt procesu dyskretyzacji jest ostatecznie układ nieliniowych równań algebraicznych

$$F[\phi_0, \phi_1, \phi_1^*, \dots, \phi_k, \phi_k^*, \dots, \phi_N, \phi_N^*] = 0 \quad (31)$$

gdzie $\phi_k = [\phi_k^0, \phi_k^1, \dots, \phi_k^M]$, $|k| \leq N$ oznaczają wektory zawierające współczynniki rozwinięć Czebyszewa poszczególnych funkcji-amplitud Fouriera funkcji Ψ . Rozwiązanie tego układu można wyznaczyć iteracyjnie wg schematu

$$\mathbf{L}_k[\phi_0^{(m)}]\phi_k^{(m+1)} = \mathbf{N}_k[\phi_1^{(m)}, \phi_1^{(m)*}, \dots, \phi_k^{(m)}, \phi_k^{(m)*}, \phi_{k+1}^{(m+1)}, \phi_{k+1}^{(m+1)*}, \dots, \phi_N^{(m+1)}, \phi_N^{(m+1)*}], \quad k = N, N-1, \dots, 0$$

Symbole $\mathbf{L}_k$ i $\mathbf{N}_k$ oznaczają, odpowiednio, liniową i nieliniową część k-tego podukładu. Idea schematu jest bardzo prosta: w każdej iteracji podukłady rozwiązywane są w kolejności malejącego numeru k (ostatni rozwiązywane jest układ z numerem $k = 0$), przy czym zaktualizowane wartości wektorów $\phi_k = [\phi_k^0, \phi_k^1, \dots, \phi_k^M]$, $|k| \leq N$ używane są natychmiast jeszcze w tej samej iteracji (jak w metodzie Gaussa-Seidela).

Po wyznaczeniu reprezentacji Fouriera-Czebyszewa składowych $u_1(x, y)$ i $v_1(x, y)$ obliczana jest składowa $w_1(x, y)$ poprzeczna do kierunku pofalowania. Funkcje-współczynniki Fouriera $\{f_w^k, |k| \leq N\}$ aproksymowane są przez skończone rozwinięcia względem wielomianów bazowych

$$f_w^k(y) = \sum_{j=0}^M \gamma_k^j T_j(y) \quad (32)$$

Po podstawieniu formuł (32) do równań różniczkowych (17) obliczany jest rzut ortogonalny otrzymanych residuów na podprzestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż $M - 2$. W ten sposób otrzymujemy układ $(2N + 1) \cdot (M - 1)$ liniowych równań algebraicznych. Brakujące $2 \cdot (2N + 1)$ równania wynikają z nałożonych na składową w_1 warunków brzegowych. W szczególności warunek znikania w_1 na ścianie dolnej ma postać

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{j=0}^M s_{k-m}^j \gamma_m^j + \hat{w}_0^k = 0, \quad |k| \leq N \quad (33)$$

gdzie $\{\hat{w}_0^k, |k| \leq N\}$ to współczynniki szeregu Fouriera odpowiadającego funkcji okresowej $w_o^L(x) = w_o[Y_L(x)]$.

Kompletny układ zawiera $(2N + 1) \cdot (M + 1)$ równań liniowych i może być rozwiązany metodą dokładną (dekompozycja LU) lub iteracyjną typu blokowa metoda Gaussa-Seidela. W tym ostatnim przypadku, w iteracji $m+1$ -szej rozwiązywana jest sekwencja podukładów liniowych postaci.

$$\mathbf{A}_{k,k} \gamma_k^{(m+1)} = \mathbf{r}_k - \sum_{s=1}^{s=k-1} [\mathbf{A}_{k,s} \gamma_s^{(m)} + \mathbf{A}_{k,-s} \gamma_s^{(m)*}] - \sum_{s=k+1}^{s=N} [\mathbf{A}_{k,s} \gamma_s^{(m+1)} + \mathbf{A}_{k,-s} \gamma_s^{(m+1)*}]$$

gdzie $\gamma_k = [\gamma_k^0, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^M]$, $0 \leq k \leq N$, a forma macierzy $\mathbf{A}_{k,s}$ i wektorów $\mathbf{r}_k$ jest prosta do wyznaczenia. Podobnie jak w przypadku układu nieliniowego dla amplitud fourierowskich funkcji Ψ , podukłady rozwiązywane są w kolejności odwrotnej przy zastosowaniu metody dokładnej (dekompozycja LU). Najnowsza wartość każdego wektora γ_k używana jest natychmiast jeszcze w tej samej iteracji. Możliwe jest znaczące przyspieszenie zbieżności poprzez zastosowanie nadrelaksacji (blokowa metoda SOR)

3. Równania liniowej teorii stateczności

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem równań ewolucji małych zaburzeń w przepływie opisanym polem wektorowym $\mathbf{V}_m$ wyznaczonym za pomocą metody numerycznej opisaną w poprzednim punkcie. Pole to może być zapisane wzorem

$$\mathbf{V}_m(x, y) = [u_0(y), 0, w_0(y)] + \sum_{k=-N}^N \left[f_u^k(y), f_v^k(y), f_w^k(y) \right] e^{ik\alpha x} . \quad (34)$$

Pole prędkości przepływu zaburzonego $\mathbf{V}_d$ jest sumą prędkości przepływu niezaburzonego i pola prędkości zaburzeń $\mathbf{V}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_d(x, y, z, t) &= \mathbf{V}_m(x, y) + \mathbf{V}'(t, x, y, z) = \\ &= [u_m(x, y), v_m(x, y), w_m(x, y)] + [u'(x, y, z, t), v'(x, y, z, t), w'(x, y, z, t)] \end{aligned} \quad (35)$$

Rozważmy zaburzenia w formie tzw. modów normalnych. Pole prędkości zaburzeń dla dowolnego modu normalnego może być przedstawione w postaci szeregu

$$\mathbf{V}'(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[g_u^m(y), g_v^m(y), g_w^m(y) \right] e^{i(t_m x + \beta z - \sigma t)} + C.C. \quad (36)$$

gdzie $t_m = \delta + m\alpha$, symbol δ to parametr Floqueta, symbol β jest liczbą falową określającą okres geometryczny pola prędkości w kierunku równoległym do osi $0z$, a $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ jest zespoloną częstością modu.

Wyprowadzenie równań liniowej teorii stateczności dla omawianego przypadku ruchu płynu przebiega podobnie jak dla przypadku przepływu w kanale ze ścianami pofalowanymi wzdłużnie, omówionym szczegółowo w pracy [2]. Punktem wyjścia jest zlinearyzowane równanie transportu wirowości pola zaburzeń $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{V}'$, które ma postać następującą

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}' + (\mathbf{V}_m \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}' - (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) \mathbf{V}_m + (\mathbf{V}' \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_m - (\boldsymbol{\omega}_m \cdot \nabla) \mathbf{V}' = \frac{1}{Re} \Delta \boldsymbol{\omega}' \quad (37)$$

Symbolem $\boldsymbol{\omega}_m$ oznaczyliśmy w równaniu (37) wirowość przepływu niezaburzonego, tzn. $\boldsymbol{\omega}_m = \nabla \times \mathbf{V}_m$. Zauważmy, że pole $\boldsymbol{\omega}'$ może być przedstawione w postaci szeregu Fouriera

$$\boldsymbol{\omega}'(x, y, z, t) = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\xi^m(y), \eta^m(y), \zeta^m(y) \right] e^{i(t_m x + \beta z - \sigma t)} + C.C. \quad (38)$$

gdzie: $\xi^m = \beta g_v^m + iDg_w^m$, $\eta^m = -\beta g_u^m + t_m g_w^m$, $\zeta^m = -t_m g_v^m - iDg_u^m$.

Po podstawieniu szeregów (36) i (38) do równania (37), a następnie separacji poszczególnych modów fourierowskich otrzymujemy przeliczalny (po obcięciu – skończony) układ równań różniczkowych zwyczajnych dla nieznanych funkcji-współczynników $g_u^m, g_v^m, g_w^m, m = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Postępując analogicznie jak w pracy [2], układ ten można

przekształcić do postaci równoważnej, w której niewiadomymi są funkcje $g_v^m, \eta^m, m = \dots, -1, 0, 1, \dots$, a mianowicie

$$(39)$$

$$S_m g_v^m + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{G}_v^{m,n} g_v^{m+n} + G_v^{m,n} g_v^{m-n} + \tilde{G}_\theta^{m,n} \theta^{m+n} + G_\theta^{m,n} \theta^{m-n}) = 0, \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

$$T_m \theta^m + \operatorname{Re} D(\beta F_u^0 - t_m F_w^0) g_v^m + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{E}_v^{m,n} g_v^{m+n} + E_v^{m,n} g_v^{m-n} + \tilde{E}_\theta^{m,n} \theta^{m+n} + E_\theta^{m,n} \theta^{m-n}) = 0$$

Użyte w powyższych równaniach operatory zdefiniowane są następująco:

$$S_m = (D^2 - k_m^2)^2 - i \operatorname{Re} [(t_m F_u^0 + \beta F_w^0 - \sigma)(D^2 - k_m^2) - D^2 (t_m F_u^0 + \beta F_w^0)] \quad (40)$$

$$T_m = D^2 - k_m^2 - i \operatorname{Re} (t_m F_u^0 + \beta F_w^0 - \sigma)$$

$$\begin{aligned} G_v^{m,n} = & i n \alpha k_{m-n}^{-2} (\beta^2 - t_m t_{m-n}) D f_u^n D + k_m^2 k_{m-n}^{-2} (\beta^2 + t_{m-n} t_{m-2n}) f_v^n D + \\ & + i k_{m-n}^{-2} (2 n \alpha \beta^2 - t_m k_{m-n}^2) f_u^n D^2 + k_{m-n}^{-2} (n \alpha t_m - k_m^2) f_v^n D^3 + \\ & + i k_m^2 t_{m-2n} f_u^n + i t_m D^2 f_u^n - 2 i n \alpha \beta t_{m-n} k_{m-n}^{-2} (D f_w^n D + f_w^n D^2) - \\ & - i \beta [f_w^n (D^2 - k_m^2) - D^2 f_w^n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^{m,n} = & -i n \alpha k_{m+n}^{-2} (\beta^2 - t_m t_{m+n}) (D f_u^n)^* D + k_m^2 k_{m+n}^{-2} (\beta^2 + t_{m+n} t_{m+2n}) (f_v^n)^* D - \\ & - i k_{m+n}^{-2} (2 n \alpha \beta^2 + t_m k_{m+n}^2) (f_u^n)^* D^2 - k_{m+n}^{-2} (n \alpha t_m + k_m^2) (f_v^n)^* D^3 + \\ & + i k_m^2 t_{m+2n} (f_u^n)^* + i t_m (D^2 f_u^n)^* + 2 i n \alpha \beta t_{m+n} k_{m+n}^{-2} [(D f_w^n)^* D + (f_w^n)^* D^2] - \\ & - i \beta [(f_w^n)^* (D^2 - k_m^2) - (D^2 f_w^n)^*] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_\theta^{m,n} = & 2 n \alpha \beta t_{m-n} k_{m-n}^{-2} f_u^n D + n \alpha \beta k_{m-n}^{-2} (t_m + t_{m-n}) D f_u^n - i n \alpha \beta k_m^2 k_{m-n}^{-2} f_v^n - \\ & - i n \alpha \beta k_{m-n}^{-2} f_v^n D^2 + 2 n \alpha \beta^2 k_{m-n}^{-2} (f_w^n D + D f_w^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\theta^{m,n} = & -2 n \alpha \beta t_{m+n} k_{m+n}^{-2} (f_u^n)^* D - n \alpha \beta k_{m+n}^{-2} (t_m + t_{m+n}) (D f_u^n)^* + i n \alpha \beta k_m^2 k_{m+n}^{-2} (f_v^n)^* + \\ & + i n \alpha \beta k_{m+n}^{-2} (f_v^n)^* D^2 - 2 n \alpha \beta^2 k_{m+n}^{-2} [(f_w^n)^* D + (D f_w^n)^*] \end{aligned}$$

$$E_v^{m,n} = \beta D f_u^n - i n \alpha \beta k_{m-n}^{-2} f_v^n D^2 + n \alpha (t_m t_{m-n} + \beta^2) k_{m-n}^{-2} f_w^n D - t_m D f_w^n$$

$$\tilde{E}_v^{m,n} = \beta D (f_u^n)^* + i n \alpha \beta k_{m+n}^{-2} (f_v^n)^* D^2 - n \alpha (t_m t_{m+n} + \beta^2) k_{m+n}^{-2} (f_w^n)^* D - t_m (D f_w^n)^*$$

$$E_\theta^{m,n} = -i t_m f_u^n - k_{m-n}^{-2} (\beta^2 + t_m t_{m-n}) f_v^n D - i \beta (t_m t_{m-2n} + \beta^2) k_{m-n}^{-2} f_w^n$$

$$\tilde{E}_\theta^{m,n} = -i t_m (f_u^n)^* - k_{m+n}^{-2} (\beta^2 + t_m t_{m+n}) (f_v^n)^* D - i \beta (t_m t_{m+2n} + \beta^2) k_{m+n}^{-2} (f_w^n)^*$$

Ponadto, użyliśmy oznaczeń $F_u^0 = u_0 + f_u^0$ i $F_w^0 = w_0 + f_w^0$.

Funkcje-współczynniki g_u^m and g_w^m odpowiadające dwóm pozostałym składowym pola prędkości zaburzeń mogą być określone ze wzorów

$$g_u^m = k_m^{-2} (i t_m D g_v^m - \beta \theta^m) \quad , \quad g_w^m = k_m^{-2} (i \beta D g_v^m + t_m \theta^m) \quad (41)$$

wynikających z definicji wirowości i fourierowskiej formy równania ciągłości.

Warunki brzegowe dla pola zaburzeń mają formę

$$u'(x, Y_L(x), z, t) = v'(x, Y_L(x), z, t) = w'(x, Y_L(x), z, t) = 0 \quad (42)$$

$$u'(x, Y_U(x), z, t) = v'(x, Y_U(x), z, t) = w'(x, Y_U(x), z, t) = 0$$

co jest równoważne następującym warunkom dla funkcji-współczynników $g_u^m, g_v^m, g_w^m, m = \dots, -1, 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_u^m[Y_L(x)] e^{i m \alpha x} &= 0 \quad , \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_u^m[Y_U(x)] e^{i m \alpha x} = 0 \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_v^m[Y_L(x)] e^{i m \alpha x} &= 0 \quad , \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_v^m[Y_U(x)] e^{i m \alpha x} = 0 \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_w^m[Y_L(x)] e^{i m \alpha x} &= 0 \quad , \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_w^m[Y_U(x)] e^{i m \alpha x} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

W opisie wykorzystującym funkcje g_v^m i η^m , $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$ warunki brzegowe przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m^{-2} \{ i t_m D g_v^m[Y_L(x)] - \beta \theta^m[Y_L(x)] \} e^{i m \alpha x} &= 0 \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m^{-2} \{ i \beta D g_v^m[Y_L(x)] + t_m \theta^m[Y_L(x)] \} e^{i m \alpha x} &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Podobnie jak w przypadku przepływu głównego, nazwanie warunków (43) nie jest do końca poprawne, ponieważ linie o równaniach $y = Y_L(x)$ i $y = Y_U(x)$ są położone wewnątrz obszaru obliczeniowego. Ze względu na faktyczne znaczenie tych warunków, będziemy jednak stosować zwyczajowe nazewnictwo.

Układ równań (39) wraz z jednorodnymi warunkami brzegowymi (43) stanowi różniczkowe zagadnienie własne. Wartości własne tego zagadnienia to częstości zespolone modów normalnych. Jak zwykle w teorii stateczności, podstawowym celem analizy tego zagadnienia jest określenie warunków utraty stateczności przepływu względem dowolnie małych zaburzeń. Sytuacja taka ma miejsce, jeżeli częstość zespolona chociaż jednego modu normalnego ma dodatnią część urojoną. Kres dolny zbioru liczb Reynoldsa, dla których taki mod normalny istnieje nazywamy krytyczną liczbą Reynoldsa i oznaczamy Re_L .

4. Metoda numeryczna

W celu rozwiązania różniczkowego zagadnienia własnego (39), (43) należy dokonać jego aproksymacji poprzez odpowiednio skonstruowane zagadnienie algebraiczne. Zastosowana w pracy metoda konstrukcji takiego zagadnienia (nazywany dyskretyzacją) polega na założeniu, że pole zaburzeń opisane wzorem (36) może być przybliżone skończoną sumą modów fourierowskich (tzn. $|m| \leq M$, gdzie M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną), a także na zastosowaniu aproksymacji poszukiwanych funkcji-współczynników przez wielomiany. Przyjmujemy zatem, że

$$\mathbf{V}'(x, y, z, t) \approx \sum_{m=-M}^M \left[g_u^m(y), g_v^m(y), g_w^m(y) \right] e^{i(t_m x + \beta z - \sigma t)} + C.C. \quad (44)$$

$$g_v^m(y) \approx \sum_{k=0}^K \zeta_m^k T_k(y) \quad , \quad \eta^m(y) \approx \sum_{k=0}^K g_m^k T_k(y) \quad (45)$$

przy czym wielomiany T_k , $k = 0, \dots, K$ określone są wzorem (22). Następnie wyrażenia (44) zostają podstawione do równań (39). Otrzymane w ten sposób residua każdego z pierwszych równań z pary (39) (są to równania 4-ego rzędu) podlegają ortogonalizacji (w sensie iloczynu skalarnego z wagą Czebyszewa) względem przestrzeni liniowej rozpiętej przez wielomiany stopnia nie wyższego niż $K-4$. Natomiast residua każdego z drugich równań z pary (39) (są to równania rzędu drugiego) podlegają ortogonalizacji względem przestrzeni liniowej rozpiętej przez wielomiany stopnia nie wyższego niż $K-2$. W ten sposób dla każdej liczby całkowitej m ($|m| \leq M$) otrzymywane są równania algebraiczne w liczbie $2K-4$.

Wymiar przestrzeni wielomianów wykorzystanych do ortogonalizacji residuów równań (39) został dobrany tak, aby możliwe było uwzględnienie warunków znikania składowych pola zaburzeń prędkości na pofalowanych ścianach kanału, tj. na liniach $y = Y_L(x)$ i $y = Y_U(x)$. Warunki te są stawiane w sposób analogiczny jak w przypadku przepływu głównego. Po wyznaczeniu jawnej postaci współczynników fourierowskich rozkładów pola prędkości wzdłuż linii opisujących kształt ścian dolnych i górnej, formułuje się warunki zerowania harmonicznych o numerach $|m| \leq M$. Dla każdej liczby całkowitej m otrzymujemy w ten sposób 6 związków algebraicznych, po trzy dla każdej ściany. Przykładowo, równania dla ściany dolnej mają postać

$$\begin{aligned} \sum_{m=-M}^M \sum_{j=0}^K s_{n-m}^j \zeta_m^j &= 0 \\ \sum_{m=-M}^M k_m^{-2} \left\{ i t_m \sum_{j=1}^K d_{n-m}^j \zeta_m^j - \beta \sum_{j=0}^K s_{n-m}^j g_m^j \right\} &= 0 \\ \sum_{m=-M}^M k_m^{-2} \left\{ i \beta \sum_{j=1}^K d_{n-m}^j \zeta_m^j + t_m \sum_{j=0}^K s_{n-m}^j g_m^j \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

W wyrażeniach (46) pojawiają się wielkości zdefiniowane wzorami (25).

Ostatecznym efektem procesu dyskretyzacji jest algebraiczne uogólnione zagadnienie własne postaci

$$\mathbf{P}\mathbf{z} = \lambda \mathbf{Q}\mathbf{z} \quad (47)$$

Wektor $\mathbf{z}$ zawiera współczynniki wielomianów (45) użytych do aproksymacji wszystkich funkcji g_v^m i η^m , $|m| \leq M$, czyli

$$\mathbf{z} = [\{\zeta_m^0, \zeta_m^1, \dots, \zeta_m^K; g_m^0, g_m^1, \dots, g_m^K\}, m = -M, \dots, 0, \dots, M]^T \quad (48)$$

Rozmiar zagadnienia własnego (47) jest równy $(2M + 1) \cdot (2K + 2)$. Przeprowadzona w pracy analiza zbieżności wykazała, że wystarczającą dokładność wyznaczenia częstości zespolonej niestatecznego modu uzyskuje się stosując $K = 59$ i $M = 12$. Rozmiar zagadnienia własnego (47) jest wówczas równy 3000.

5. Wyniki obliczeń

Przejdziemy do omówienia wyników przeprowadzonych obliczeń. Skoncentrujemy się na analizie wpływu kąta φ pomiędzy kierunkiem pofalowania a kierunkiem średniego gradientu ciśnienia.

Przypadkiem odniesienia jest przepływ w kanale, w którym pofalowanie ścian jest zorientowane idealnie poprzecznie względem gradientu ciśnienia, tj. kąt $\varphi = 90^\circ$. W poniższej tabeli podano warunki krytyczne dla przypadku poprzecznie zorientowanego pofalowania sinusoidalnego opisanego wzorami

$$Y_L(x) = -1 - S \cos(\alpha x) \quad , \quad Y_U(x) = 1 + S \cos(\alpha x) \quad (49)$$

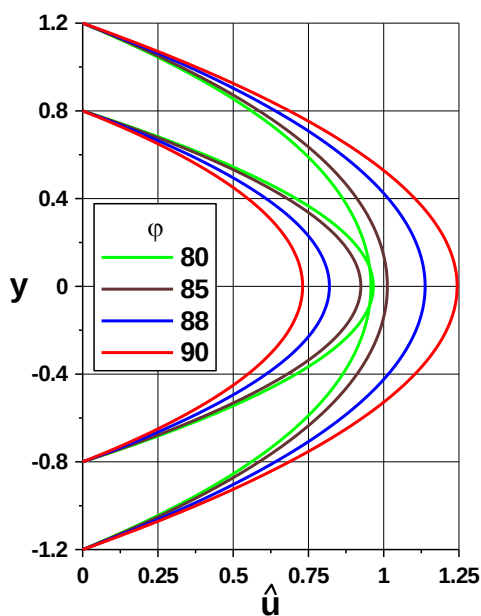
Taki kształt dolnej i górnej ściany kanału nazywamy dalej pofalowaniem symetrycznym.

S	Re_L	α_L	β_L
0.3	62.71	0.938	0.376
0.32	60.66	0.955	0.380
0.34	59.24	0.974	0.384
0.36	58.37	0.996	0.387
0.38	58.01	1.020	0.392
0.39	58.02	1.034	0.395
0.4	58.14	1.049	0.399
0.41	58.37	1.066	0.402
0.42	58.72	1.084	0.406

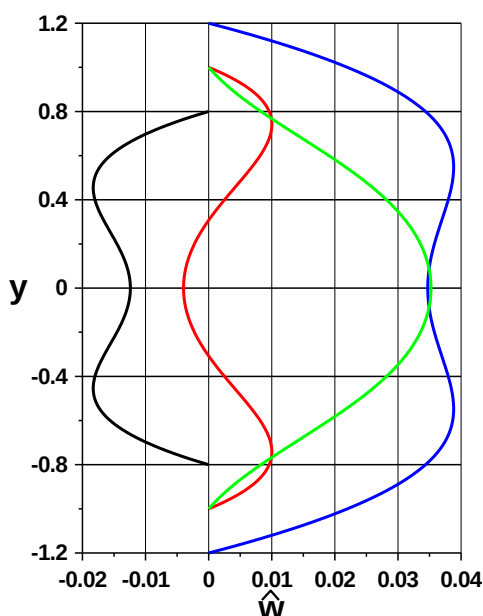
Jest widoczne, że efekt destabilizacji przepływu jest najsilniejszy, gdy amplituda pofalowania przyjmuje wartość ok. 0.39 (stanowi to 19% średniej odległości pionowej pomiędzy ścianami, czyli średniej wysokości kanału). Liczba falowa α_L odpowiadająca warunkom najsilniejszej destabilizacji jest bliska jedności, czyli stosunek długości fali do średniej wysokości kanału jest nieznacznie większy od 3. Za proces destabilizacji przepływu odpowiedzialny jest mod normalny (jego pochodzenie objaśniono szczegółowo w pracy [3]), którego wzłużna liczba

falowa β jest nieco mniejsza niż 0.4, czyli długość fali (biegnącej) w polu zaburzeń jest ok. 2.5-krotnie większa niż podziałka poprzecznego pofalowania ścian kanału.

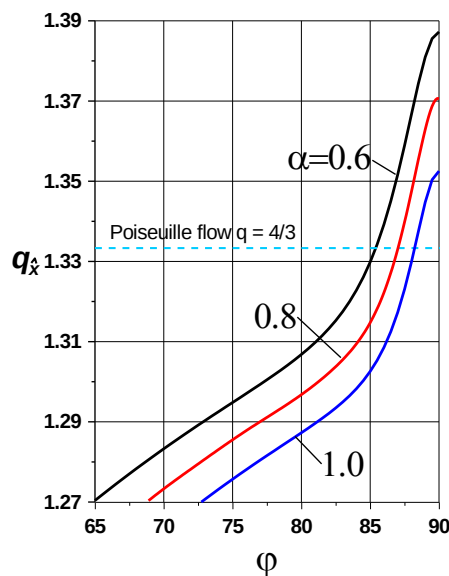
Pojawienie się odchylenia kierunku pofalowania w stosunku do orientacji idealnie poprzecznej ma istotny wpływ na formę przepływu głównego. O ile, w przypadku $\varphi = 90^\circ$ przepływ ten jest jednokierunkowy (tj. występuje w nim tylko jedna niezerowa składowa pola prędkości), to w ruchu przy $\varphi \neq 90^\circ$ pole prędkości ma wszystkie trzy składowe, tj. pojawia się ruch w kierunku pionowym i poprzecznym. Na Rys. 3 pokazano lokalne profile składowej prędkości $\hat{u}$ (czyli prędkości w kierunku równoległym do średniego gradientu ciśnienia) obliczone dla przepływu w kanale z pofalowaniem symetrycznym (49) (o amplitudzie $S = 0.2$ i liczbie falowej $\alpha = 1$) przy różnych wartościach kąta φ . Liczba Reynoldsa jest równa $Re = 100$. Obliczeni wykonano dla dwóch linii pionowych (tj. równoległych do osi $0y$) łączących naprzeciwległe punkty pofalowanych ścian w miejscu gdzie lokalna wysokość kanału jest najmniejsza (linia łączy wierzchołki) i największa (linia łączy doliny). Z punktu widzenia stateczności przepływu najistotniejszym efektem związanym ze zmianą orientacji pofalowania ścian jest widoczna na rysunku redukcja amplitudy poprzecznej modulacji składowej $\hat{u}$, tzn. różnicy pomiędzy maksymalnymi wartościami tej składowej osiąganymi na linii łączącej wierzchołki i linii łączącej doliny. W przypadku orientacji idealnie poprzecznej ($\varphi = 90^\circ$) prędkość maksymalna w przekrojach odpowiadających minimalnej wysokości lokalnej kanału wynosi ok. 0.7, podczas gdy tam, gdzie wysokość lokalna jest największa maksymalna wartość prędkości osiąga 1.25. Oznacza to, że amplituda poprzecznej modulacji prędkości na płaszczyźnie symetrii kanału $y = 0$ jest równa ok. 30% prędkości średniej na tej płaszczyźnie. Tymczasem obrócenie kierunku pofalowania o 5 stopni kątowych redukuje tę amplitudę do kilku procent, a przy kącie $\varphi = 80^\circ$ efekt poprzecznej modulacji na płaszczyźnie symetrii w ogóle zanika. Odpowiadające takiej konfiguracji pofalowania profile prędkości w płaszczyźnie poprzecznej do średniego gradientu ciśnienia pokazano na Rys. 4. Wyniki te uzyskano dla pofalowania symetrycznego z amplitudą $S = 0.2$ i liczbą falową $\alpha = 1$, liczba Reynoldsa jest równa $Re = 100$.



Rys.3

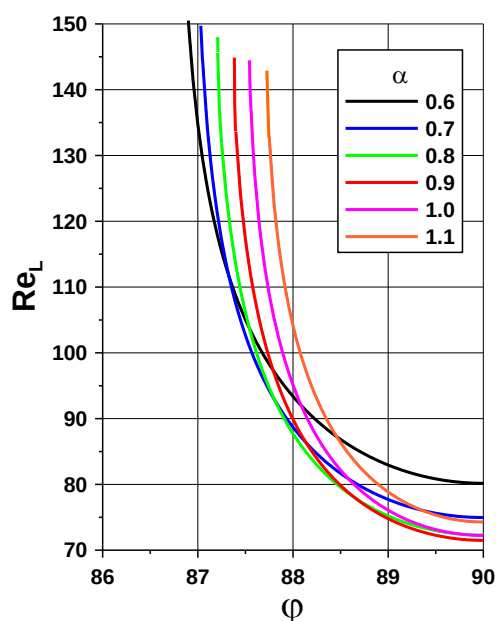


Rys.4.



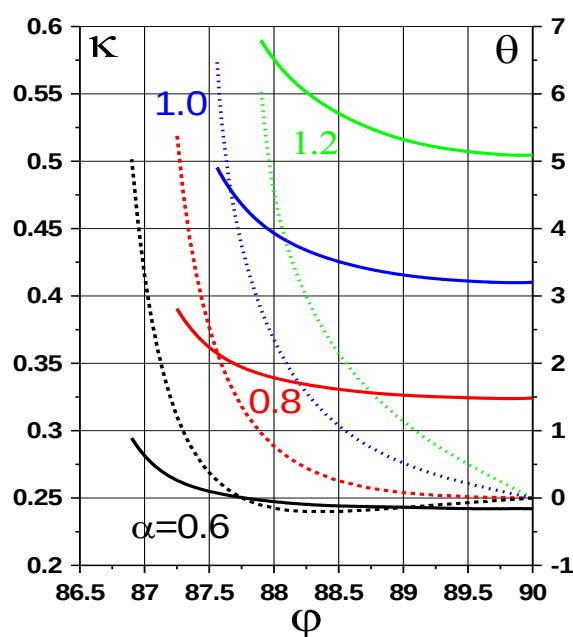
Rys. 5

Zmiana orientacji pofalowania ma również wpływ na opory hydrauliczne przepływu. Na Rys. 5 pokazano zależność średnią gęstość liniową wydatku objętościowego przepływu, obliczoną dla przekroju płaszczyzną $\hat{x}=0$ prostopadłą do kierunku orientacji średniego gradientu ciśnienia. Obliczenia wykonano dla pofalowania symetrycznego o amplitudzie $S = 0.2$ i liczbie falowej $\alpha = 1$, przy liczbie Reynoldsa równej $Re = 100$. Zauważalny jest szybki spadek wartości wydatku (a zatem wzrost oporów hydraulicznych) wraz ze wzrostem odchylenia kąta φ od „idealnej” wartości $\varphi = 90^\circ$. Pomimo dość umiarkowanej amplitudy pofalowania ($S = 0.2$) efekt ten jest dość znaczący: zmiana orientacji kierunku pofalowania o 10% powoduje redukcję wydatku o ok. 5%. Należy przypuszczać, że wzrost oporów będzie większy przy większych wartościach amplitudy S (odpowiednie obliczenia nie zostały wykonane z uwagi na ograniczenia dokładności, a także problemy z uzyskaniem zbieżności w metodzie zanurzonych granic).



Rys. 6

Najważniejszy rezultat przeprowadzonych badań dotyczy jednak wpływu niewielkich zmian orientacji pofalowania na efekt destabilizacji przepływu. Rysunek 6 przedstawia zmienność krytycznej liczby Reynoldsa Re_L w funkcji kąta φ , obliczoną dla symetrycznego pofalowania sinusoidalnego z amplitudą $S = 0.2$ i różnymi liczbami falowymi α . Uzyskane wyniki pokazują, że niewielkie odchylenie kierunku pofalowania względem orientacji idealnej powoduje natychmiastowy wzrost krytycznej liczby Reynoldsa, a zatem wyraźne osłabienie efektu destabilizacji: o ile dla $\varphi = 90^\circ$ wartość Re_L to ok. 72, to przy $\varphi = 87^\circ$ wynosi już ok. 132. Można powiedzieć, że zakres odchyżeń odpowiadający efektowi destabilizacji przy liczbach Reynoldsa poniżej 100 to ok. 2 i pół stopnia. Jest to zakres dość wąski, co oznacza, że w praktycznej implementacji potrzebne jest precyzyjna kontrola kierunku strumienia cieczy, szczególnie w kanałach o dużym stosunku szerokość/wysokość.



Rys. 7

Z teoretycznego punktu widzenia interesujący jest wynik dotyczący wektora falowego zaburzenia (modu normalnego) wzbudzanego przez pofalowanie o zmienionej orientacji względem gradientu ciśnienia. W przypadku idealnym $\varphi = 90^\circ$ zaburzenie ma formę fali biegnącej, której wektor falowy jest ściśle równoległy do gradientu ciśnienia podtrzymującego przepływ. Wraz ze zmianą kąta φ długość κ wektora falowego wzrasta, czyli długość fali zaburzenia krytycznego zmniejsza się. Efekt ten, obliczony dla trzech liczb falowych, pokazano na Rys. 7 za pomocą linii ciągłych (odpowiada im lewa oś rzędnych). Jednocześnie, wektor falowy $\mathbf{\kappa}$ doznaje, tj. fala zaburzenia porusza się pod pewnym kątem θ względem kierunku średniego gradientu ciśnienia w przepływie. Zależność kąta θ od kąta φ , obliczoną dla różnych liczb falowych α reprezentują linie przerywane (odpowiada im prawa oś rzędnych) na Rys. 7.

Przedstawione wyżej wyniki były prezentowane w formie referatów podczas XVIII Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów w Jastrzębiej Górze [4] oraz międzynarodowych warsztatów „LES in Science and Technology” w Poznaniu [5].

Podsumowanie

Przeprowadzono analizę wpływu niewielkich odchyłeń kierunku pofalowania względem orientacji średniego gradientu ciśnienia na charakterystyki kinematyczne pola prędkości, opory hydrauliczne i charakterystyki statecznościowe przepływu. W tym celu skonstruowano opis matematyczny pola przepływu niezaburzonego, a także opracowano i zaimplementowano metodę numeryczną opartą na idei zanurzonych granic i stanowiącą uogólnienie metody opisanej w pracy [2]. Przepływ niezaburzony ma trzy składowe prędkości, ale w odpowiednio dobranym układzie odniesienia (związanym z kierunkiem pofalowania ścian kanału) pola te zależą tylko od dwóch zmiennych przestrzennych. Wprowadzone pole zaburzeń jest natomiast w pełni trójwymiarowe. Podano jego opis matematyczny, a także skonstruowano metodę dyskretyzacji wykorzystującą odpowiednio dostosowane wielomiany Czebyszewa. Jednorodne warunki brzegowe zaimplementowano stosując opracowaną wcześniej [1,2] technikę zanurzonych granic.

Przeprowadzone obliczenia wykazały, że nawet niewielkie odchylenia kierunku pofalowania od orientacji idealnie prostopadłej względem gradientu ciśnienia powodują:

- 1. Wzrost oporów hydraulicznych w przepływie niezaburzonym***
- 2. Znaczący wzrost krytycznej liczby Reynoldsa. Przy odchyleniach przekraczających kilka stopni, efekt destabilizacji fundamentalnego modu Squire'a zanika.***

Na podstawie uzyskanych wyników można wnioskować, że pofalowanie ma znaczenie praktyczne jako metoda destabilizacji przy niskich liczbach Reynoldsa jedynie wtedy, gdy jego orientacja względem gradientu ciśnienia napędzającego przepływ średni jest prostopadła z tolerancją nie przekraczającą 2-óch stopni kątowych.

Bibliografia

- [1] Szumbarski J., Floryan J.M.: A direct spectral method for determination of flows over corrugated boundaries. *Journal of Computational Physics* 156, 378-402, 1999.
- [2] Szumbarski J., 2002: Immersed boundary approach to stability equations for a spatially periodic viscous flow. *Archives of Mechanics*, 3, 54, 199-222.
- [3] Szumbarski J.: Instability of a viscous liquid flow in a corrugated channel (in Polish, the habilitation thesis). Published by Warsaw University of Technology. Warszawa, 2007.
- [4] Szumbarski J., Błoński Sł., Kowalewski T.A.: Low-Reynolds-Instability of Laminar Flow in a Wavy Channel. Workshop "LES in Science and Technology", Poznań, 21-22 kwietnia, 2008
- [5] Szumbarski J., Błoński Sł.: Instability of a Viscous Flow in a Transversely Wavy Channel. XVIII Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, Jastrzębia Góra, 21-25 września, 2008.

ON THE IMPACT OF TRANSVERSELY-ORIENTED WALL CORRUGATION ON HYDRAULIC RESISTANCE OF A LAMINAR CHANNEL FLOW

Jacek Szumbariski

Institute of Aeronautics and Applied Mechanics, Warsaw University of Technology

e-mail: jasz@meil.pw.edu.pl

Sławomir Błonski, Tomasz A. Kowalewski

Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Science

Abstract

The effect of the transversely-oriented sinusoidal wall corrugation on the hydraulic drag is investigated numerically for the flow through the channel having a finite width and flat sidewalls. The numerical method used is based on the domain transformation and Chebyshev-Galerkin discretization. The obtained results are compared to the reference case, i.e., to the flow through the channel with rectangular cross section of the same aspect ratio. Simple explanation of the gain in the volumetric flow rate observed in the flow through spanwise-periodic channel with long-wave transversely-oriented wall corrugation is also provided.

Key words: channel flow, hydraulic resistance, corrugated walls

1. Introduction

For the last four decades laminar flows in channels with wavy walls have been intensively investigated, both experimentally and numerically. The interest to these flows has been stimulated by various technological applications, where efficiency of mixing processes is of fundamental importance but flow turbulization is difficult or even undesirable. Numerous examples of this sort come from heat transfer engineering (e.g. compact heat exchangers, cooling of electronic systems), chemical engineering (e.g., biological reactors) and medical engineering (oxygenators, dialisators). Different passive methods have been

proposed to the aim of mixing enhancement in laminar internal flows, in particular different variants of geometrical modification like wall waviness or surface-mounted obstacles and vortex generators. Wall corrugation has attracted particular interest because of its relative technological simplicity. Interestingly, then majority of works have focused on different variants of the longitudinally oriented, unidirectional wall waviness (Figure 1a), while very few works exist on the internal flow through ducts with transversely corrugated walls (Figure 1b). The ability of the longitudinal wall corrugation to enhance mixing and heat/mass transfer has been well documented in numerous numerical (e.g. [1,2,3]) and experimental investigation (e.g. [4,5,6]). Transversal wall corrugation was investigated by a few authors in 90s but mostly in the context of the skin-friction reduction for turbulent boundary layers and delay of the laminar–turbulent transition.

Recently, it has been demonstrated by Szumbariski [7,8] that an appropriately design, transversely-oriented and periodic wall waviness is capable of destabilizing the Poiseuille flow at surprisingly low Reynolds numbers. The lowest critical Reynolds number which can be achieved by using a simultaneous corrugation of both walls has been amounted to about 58, i.e., it is smaller by two orders of magnitude than the critical Reynolds number of the plain Poiseuille flow. However, the most amazing fact is that the form of the wall corrugation which provides the strongest destabilization hardly affect the flow resistance. In other words, the low-Reynolds-number destabilization by the transversely-oriented wall corrugation is obtained without the price of excessive hydraulic losses, on the contrary, some small reduction of these losses is possible. This situation is quite opposite to what is offered by the commonly used variants of the longitudinally oriented corrugation or wall-mounted systems of obstacles, where some increase of the flow resistance (sometimes quite severe) is the rule. Since the analysis presented in [7] and [8] concerned only the idealized case of the spanwise-periodic flow, it is natural to ask to what extent the properties described above are transferred to more realistic geometry, i.e., the flow through the transversely corrugated channel with flat sidewalls. In this work, we focus on the problem of the hydraulic resistance, leaving the much more complicated issue of instability analysis for a separate study. We will consider a family of laminar unidirectional flows of increasing complexity, i.e., ranging from the standard Poiseuille flow up to the destination case which is the flow through the channel with finite width and corrugated walls. This family of the flows is described in the Section 2. Only the destination case of the flow demands the numerical approach, which is the topic of the

Section 3. The discussion of the obtained results is presented in the Section 4. Finally, short summary and conclusions are presented in the Section 5.

2. Hierarchy of the models – from plane Poiseuille flow to the flow in the wavy channel with sidewalls

The analysis of the viscous laminar flow in the channel with finite span and undulated walls can be considered in the reference to simpler cases. The first such case is the flow through the channel with rectangular cross section. It means that the span of the channel is finite and the top and bottom walls are flat. On the other hand, one can consider the channel with infinite span, i.e. without sidewalls, and with periodic undulation of the top and bottom walls. Finally, both reference cases can be considered as the modification of the standard Poiseuille flow, i.e. the laminar flow between parallel flat walls, driven by a steady pressure gradient.

2.1. Reference Poiseuille flow

The velocity profile of the stationary, viscous and incompressible flow between two parallel walls can be written as

$$w_p(y) = \frac{g_p}{2\mu} [h^2 - y^2] \quad (2.1)$$

where the bottom and top walls coincide with the planes $y = -h$ and $y = h$, respectively, the symbol μ denotes viscosity and the constant pressure gradient along z -axis is equal

$$\frac{dp}{dz} = -g_p < 0 \quad (2.2)$$

Following standard procedure, we switch to dimensionless description of the flow. To this end, the non-dimensional coordinates are defined as follows

$$\hat{x} = x/h, \quad \hat{y} = y/h, \quad \hat{z} = z/h \quad (2.3)$$

The non-dimensional velocity profile can be now written as

$$W_p = \frac{w_p(y)}{w_{p,\max}} = 1 - \hat{y}^2 \quad (2.4)$$

where

$$w_{p,\max} = \frac{g_p h^2}{2\mu} \quad (2.5)$$

is the maximal velocity attained at the symmetry plane $y = 0$. The corresponding dimensionless pressure gradient can be expressed as

$$G_p = \frac{g_p h}{\rho w_{p,\max}} = \frac{2\mu}{\rho w_{p,\max} h} = \frac{2}{\text{Re}} \quad (2.6)$$

where Re denotes the Reynolds number defined by the formula

$$\text{Re} = \frac{w_{p,\max} h}{\nu} \quad (2.7)$$

The volumetric flow rate of the standard Poiseuille flow, computed per one length unit of the channel's span, is equal

$$Q_p = \int_{-h}^h w_p(y) dy = \frac{2g_p h^3}{3\mu} = \frac{4}{3} w_{p,\max} h \quad (2.8)$$

Thus, the dimensionless flow rate is

$$q_p = Q_p / (w_{p,\max} h) = \frac{4}{3} \quad (2.9)$$

2.2. Flow in a channel with rectangular cross section

Consider now the laminar pressure-driven and stationary flow in an infinite channel with rectangular cross section (see Figure 2). Let the dimensionless width (or span) of the channel is equal $2L$, i.e. the span-to-height ratio of the channel section is equal L . Assume also that the flow is driven by the same pressure drop G_p as in the case of the Poiseuille flow. The corresponding boundary value problem for dimensionless velocity $W_0 = W_0(\hat{x}, \hat{y})$ reads

$$\begin{cases} \hat{\Delta} W_0 \equiv \frac{\partial^2 W_0}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \hat{y}^2} = -2 & , \quad (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega} \\ W_0|_{\partial \hat{\Omega}} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

In the following, the hat over the symbols will be omitted – it is understood that all quantities used are dimensionless.

The boundary value problem (2.10) admits the analytical solution in the form of the series (for the derivation, see for instance [9], Ch.8)

$$W_0(x, y) = 1 - y^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k^3} \frac{\cosh(\alpha_k x)}{\cosh(\alpha_k L)} \cos(\alpha_k y) \quad (2.11)$$

where $\alpha_k = \frac{2k-1}{2} \pi$. The velocity distribution (2.11), computed for $L = 10$, is presented as the contour map in the Figure 3. The corresponding flow rate can be expressed as follows

$$Q_0 = Q_0(L) = \frac{8}{3} L \left[1 - \frac{6}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh(\alpha_k L)}{\alpha_k^5} \right] \quad (2.12)$$

The effect of the sidewalls on the hydraulic resistance can be evaluated by means of the ratio between the flow rate expressed by the formula (2.12) and the flow rate of the referential Poiseuille flow computed for the channel spanwise segment of the width equal $2L$

$$\gamma_0(L) = \frac{Q_0(L)}{2Lq_p} = 1 - \frac{6}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh(\alpha_k L)}{\alpha_k^5} \quad (2.13)$$

The plot of the function $\gamma_0 = \gamma_0(L)$ is presented in the Figure 4.

2.3. Flow in the channel with transversely corrugated periodic walls

As it has been already mentioned, the laminar flow through the channel with spanwise-periodic wall corrugation and infinite width (no sidewalls) has been recently studied by Szumbarski in [7] and [8]. One of the main conclusion of this research is that the symmetric sinusoidal wall waviness, given by the formula

$$y_b(x) = -1 - S \cos \alpha x \quad , \quad y_t(x) = 1 + S \cos \alpha x \quad (2.14)$$

is capable of inducing a low-Reynolds-number destabilization of the Poiseuille flow. The effect of flow destabilization is particularly strong when the wavenumber $\alpha \approx 1$, i.e., when the ratio of the wavelength to the average height of the channel is close to 3. The velocity of the flow is the x -periodic solution to the Poisson equation (2.10) in the domain bounded by the wall contours (2.14) and the vertical lines $x=0$ and $x=\lambda_x$, where $\lambda_x = 2\pi/\alpha$ is the corrugation wavelength as well as the spanwise period of the flow. In the works [7] and [8], this solution has been found by the semi-analytical and spectrally accurate method based on the concept of immersed boundaries and the least squares formulation. The parametric analysis of the flow resistance has been performed in the function of the corrugation wavenumber α and the amplitude of the corrugation S . It has been observed that the wall corrugation with sufficiently long wavelength (sufficiently small wave number α) is accompanied by the gain in the flow rate, which rises with the amplitude S . Since the area of the cross section of the channel (computer per one wavelength segment of the channel span) is independent of the amplitude S and the pressure gradient driving the flow is fixed, one concludes that the long-wave transversal corrugation actually reduces flow resistance. Justification of this effect has not been given, though.

We will provide a simple mathematical explanation why a long-wave transversal corrugation leads to the reduction of flow resistance with respect to the case of the flat walls (the

Poiseuille flow). First, it should be noted that for large wavelengths the local values of the slope of the wall contours are small, even for large corrugation amplitudes. Then, in any section $x = \text{const}$ the flow looks very much similar to the two-dimensional Poiseuille flow in the z -direction and confined by the parallel lines (2.14). Thus, the velocity distribution is well approximated by the following formula

$$W(x, y) \approx (1 + S \cos \alpha x)^2 - y^2 \quad (2.15)$$

The hydraulic resistance of the flow can be evaluated by referring to the quantity q defined as

$$q = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} \int_{y_b(x)}^{y_t(x)} w(x, y) dx dy = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{1+S \cos \alpha x} [(1 + S \cos \alpha x)^2 - y^2] dx dy \quad (2.16)$$

which is simply the average spanwise density of the volumetric flow rate in the periodic channel. After elementary calculation one arrives at the formula

$$q = \frac{4}{3} \left[1 + \frac{3}{2} S^2 \right] = q_p \left[1 + \frac{3}{2} S^2 \right] \quad (2.17)$$

Thus, for sufficiently large corrugation wavelengths, or - equivalently - sufficiently small wavenumber α , the rise of the volumetric flow rate proportional to the square of the corrugation amplitude is expected. In the Figure 5, the ratio q/q_p is plotted versus the amplitude of the wall waviness S and computed for different values of the wave number α . Also, the line corresponding to the asymptotic ($\alpha \rightarrow 0$) formula (2.17) is shown. One can notice, that the difference the plot for $\alpha = 0.1$ practically matches the asymptotic relation.

2.4. Flow in the wavy channel with the sidewalls

Finally, consider the flow in the transversely corrugated channel with the flat parallel sidewalls. The width of the channel is equal $2L$, while the average channel's height is equal 2. The ratio between the width and the average height of the channel's section is referred to as the aspect ratio of the channel and it is equal L . The geometry of the flow domain is depicted in the Figure 6.

As before, the Poisson equation with homogeneous boundary conditions should be solve in order to determine the flow velocity W . Since we are interested mostly in the corrugations with large amplitudes, the numerical approach based of the application of the immerse boundaries concept is not suitable. Instead, the domain transformation of the wavy channel's cross section to the regular square computational domain $[-1,1]^2$ will be applied. We consider two kinds of wall shapes:

- Symmetric corrugation (Figure 6a)

$$y_t(x) \equiv h(x) = 1 + S \cos(M\pi x / L) = -y_b(x) \quad (2.19)$$

The corresponding forward and backward domain transformations are defined as

$$\begin{cases} \xi = x / L \\ \eta = y / h(x) = y / [LH(x / L)] \end{cases}, \quad \begin{cases} x = L\xi \\ y = \eta h(L\xi) = L\eta H(\xi) \end{cases} \quad (2.20)$$

- One-sided corrugation (the top wall is corrugated while the bottom wall remains flat, see Figure 6b)

$$\begin{aligned} y_t(x) &\equiv h(x) = 1 + S \cos(M\pi x / L) \\ y_b(x) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

The corresponding forward and backward domain transformations are defined as

$$\begin{cases} \xi = x / L \\ \eta = 2y / h(x) - 1 = 2y / [LH(x / L)] - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = L\xi \\ y = \frac{1}{2} h(L\xi)(\eta + 1) = \frac{1}{2} LH(\xi)(\eta + 1) \end{cases} \quad (2.22)$$

In the formulae (2.20) and (2.22), we have used the function $H = H(\xi) = h(\xi L)$ defined in the interval $-1 \leq \xi \leq 1$.

As a result of the domain transformations (2.20) or (2.22), the Poisson equation for the flow velocity W transforms to the following differential equation with variable coefficients

$$\tilde{\Delta}W \equiv (\partial_{\xi\xi} - 2a_{\xi\eta}\partial_{\xi\eta} + a_{\eta\eta}\partial_{\eta\eta} + a_{\eta}\partial_{\eta})W = -2L^2, \quad (2.23)$$

and with the boundary condition

$$W(\xi = \pm 1, \eta = \pm 1) = 0. \quad (2.24)$$

The coefficient functions in the equations (2.23) are defined as

$$\begin{aligned} a_{\xi\eta} &= a(\eta)g_1(\xi), \\ a_{\eta\eta} &= b^2g_2^2(\xi) + a^2(\eta)g_1^2(\xi), \\ a_{\eta} &= a(\eta)[2g_1^2(\xi) - g_3(\xi)], \end{aligned} \quad (2.25)$$

where

$$g_1(\xi) = H'(\xi)/H(\xi), \quad g_2(\xi) = 1/H(\xi), \quad g_3(\xi) = H''(\xi)/H(\xi), \quad (2.26)$$

$$b = \begin{cases} 1 & \text{for symmetric waviness} \\ 2 & \text{for one-sided waviness} \end{cases}, \quad (2.27)$$

and

$$a(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{for symmetric waviness} \\ \eta + 1 & \text{for one-sided waviness} \end{cases} \quad (2.28)$$

Finally, the volumetric flow rate can be determined from the formula

$$Q = \int_{\Omega} W \, dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W(\xi, \eta) |J(\xi, \mu)| d\xi d\eta = \frac{L^2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W(\xi, \eta) H(\xi) d\xi d\eta \quad (2.29)$$

where the symbol J denotes the Jacobian of the domain transformation.

The convenient measure of the flow resistance is the ratio

$$\gamma = Q / Q_0 \quad (2.30)$$

where Q_0 denotes the volumetric flow rate in the channel with rectangular cross section and the same aspect ratio L (formula (2.12)).

3. Numerical method

The transformed boundary value problem (2.23)-(2.24) can be solved numerically with the use of the spectral approximation [10]. To this aim, the following set of the basic function is defined in the computational domain $[-1,1]^2$

$$\phi_{i,j}(\xi, \eta) = [T_{i+2}(\xi) - T_i(\xi)][T_{j+2}(\eta) - T_j(\eta)] \quad , \quad i = 0, \dots, N_\xi \quad , \quad j = 0, \dots, N_\eta \quad (3.1)$$

In the above, the symbol T_k refers to the Chebyshev polynomial of the order k , and the symbols N_ξ and N_η denote the highest-order polynomials used for transformed coordinates ξ and η , respectively. Thus, the total number of the basic functions (and the dimension of the algebraic problem which follows the discretization procedure) is $M = (N_\xi + 1)(N_\eta + 1)$. Note that each basic function vanishes identically at the boundary of the computation domain.

The solution is sought in the following form

$$W(\xi, \eta) \approx \sum_{i=0}^{N_\xi} \sum_{j=0}^{N_\eta} w_{i,j} \phi_{i,j}(\xi, \eta) \quad (3.2)$$

where the coefficients $w_{i,j}$, $i = 0, \dots, N_\xi$, $j = 0, \dots, N_\eta$ are to be determined. To this aim, the representation (3.2) is inserted into the transformed Poisson equation (2.23) and the following conditions of orthogonality with respect to the finite-dimensional function space spanned by the set of the basic functions (3.1) are enforced

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tilde{\Delta} W + 2) \phi_{m,n} \omega d\xi d\eta = 0 \quad , \quad m = 0, \dots, N_\xi \quad , \quad n = 0, \dots, N_\eta \quad (3.3)$$

where

$$\omega = \omega(\xi, \eta) = \left[\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)} \right]^{-1} \quad (3.4)$$

is the Chebyshev weight function. After simple algebra, the following system of linear equations is obtained

$$\sum_{i=0}^{N_\xi} \sum_{j=0}^{N_\eta} K_{m,n;i,j} w_{i,j} = r_{m,n} \quad (3.5)$$

where

$$K_{m,n;i,j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_{m,n} \tilde{\Delta} \phi_{i,j} \omega d\xi d\eta \quad ; \quad i, m = 0, \dots, N_\xi \quad ; \quad j, n = 0, \dots, N_\eta \quad (3.6)$$

$$r_{m,n} = -2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_{m,n} \omega d\xi d\eta \quad ; \quad m = 0, \dots, N_\xi \quad ; \quad n = 0, \dots, N_\eta \quad (3.7)$$

After convenient re-numeration with a single index, the system (3.5) can be solved by standard methods. In the current work, the choice of $N_\xi = 99, N_\eta = 49$, which leads to the algebraic problem of the dimension $N = 5000$, provides sufficient accuracy to make reliable predictions of the flow field and its integral characteristics, like the volumetric flow rate. The standard LU factorization routines from the LAPACK library have been used to solve the system (3.5).

4. Discussion

In this Section, the results of the numerical calculations are described. The focus is on the parametric study of the flow resistance. The application of the transversely oriented wall corrugation leads to the spanwise modulation of the velocity profile. The amplitude of this modulation depends on the wavelength and the amplitude of the wall undulation. Also the average velocity and hence the volumetric flow rate are affected.

The typical velocity distributions within the channel's section, computed for the case of the symmetric undulation and different number of the wave periods across the channel, are presented in the Figure 7. The value of the channel's aspect ratio is $L = 10$ and the amplitude of the sinusoidal corrugation (2.19) is $S = 0.4$, i.e., 20% of the average channel's height. The velocity distributions obtained for a different numbers of wave lengths across the channel are presented in the form of the contour maps. It is evident that the velocity attains the largest magnitude at the locations of the maximal wall distance, while it is significantly reduced otherwise. This leads to the strong spanwise modulation of the streamwise velocity, especially in the horizontal plane of the channel's symmetry $y = 0$. The velocity distributions computed across the channel span at the symmetry plane are shown in the Fig. 8. For shorter waves ($M = 8$) the overall reduction of the velocity magnitude is clearly visible which indicates that for such wall geometry the hydraulic drag increases. Similar effect is observed in the case of one-sided corrugation. In the Fig.9, the contour plots of the velocity are presented. Only the top wall is undulated and the amplitude is equal $S = 0.8$ (40% of the average channel's height). Again, the reduction of the flow rate is observed for short-wave corrugation ($M = 8$).

The ratio of the volumetric flow rate in the symmetrically corrugated channel to the flow rate in the rectangular channel (with the same aspect ratio L and the cross-section area), plotted against the corrugation amplitude S , has been shown in the Figures 10a and 10b. Two different aspect ratios of the channel's section have been considered. The results obtained for $L = 10$ are presented in the Figure 10a, while the results obtained for $L = 20$ are shown in the Figure 10b. Different lines in these plots correspond to a different number M of the corrugation wavelength across the channel. It is evident that the volumetric flow rate increases when the wavelength of the wall undulation is sufficiently large, i.e., the number M is sufficiently small. Also, there exist a nearly "neutral" values of M for which only minor influence on the flow rate is observed, even for larger corrugation amplitudes. For $L = 10$, these neutral values are $M = 4$ and $M = 5$, for which the flow resistance is - respectively - either slightly smaller or higher than in the rectangular channel. The results obtained for $L = 20$ indicate that the neutral value of M is 8. Thus, the conclusion is that the symmetric wall corrugation does not affect much the flow resistance as long as the ratio between the corrugation wavelength and the average channel's height is in the range between 2 and 2.5, with a tendency to grow with the aspect ratio of the channel's section. Analogous results obtained for the case of one-sided wall waviness are presented in the Figures 11a and 11b. In

general, the effect of one-sided wall corrugation on the flow resistance is very much similar to the effect of the symmetric corrugation with the halved amplitude. However, the neutral values of the ratio between the wavelength and the average channel's height are slightly larger and lay in the range between 3 and 4.

5. Summary and final remarks

It has been demonstrated that transversely oriented wall corrugation have a great impact on the hydraulic resistance of the laminar flow through the channel. The general rule is that the wall corrugation of large wavelengths leads to drag reduction which is manifested by the increase of the volumetric flow rate driven by a given pressure gradient. On the other hand, short-wave wall corrugation causes reduction of the flow rate. There also exists the neutral range of the corrugation wavelengths in which the flow resistance is hardly affected and basically insensitive to the corrugation amplitude. The obtained results show that such situation occurs when the ratio of the wave length to the average height of the channel assumes values in the range between 2 and 2.5 for symmetric corrugation (2.19), and between 3 and 4 for the one-sided corrugation (2.20). This result is of particular interest since this is exactly the range of ratios where the strongest destabilization effect has been recently found by the same authors. The systematic stability analysis of the flow through the transversely corrugated channel with flat sidewalls has been presented recently by the same authors [11].

Acknowledgements

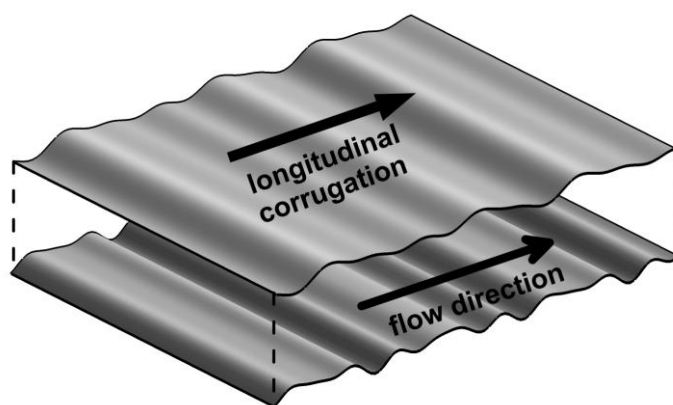
This investigation was supported by the Polish Ministry of Science and Education under the project "*Enhancement of the mixing process in micro-flows*", grant No. N501008733.

References

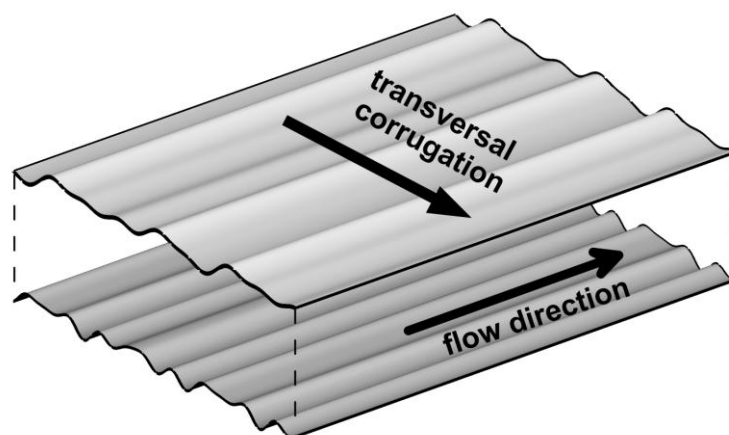
- [1] Wang G., Vanka S.P., 1995: Convective heat transfer in periodic wavy passages. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No. 17, pp. 3219-3230.
- [2] Ghaddar N., El-Hajj A., 2000: Numerical Study of Heat Transfer Augmentation of Viscous Flow in Corrugated Channels. *Heat Transfer Engineering*, 21, pp. 35-46.

- [3] Niceno B., Nobile E., 2001: Numerical analysis of fluid flow and heat transfer in periodic wavy channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 22, pp. 156-167.
- [4] Nishimura T., Murakami S., Arakawa S., Kawamura Y., 1990: Flow observations and mass transfer characteristics in symmetrical wavy-walled channels at moderate Reynolds number for steady flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 33, pp. 835-844.
- [5] Nishimura T., Kawamura Y., 1995: Three-dimensionality of Oscillatory Flow in a Two-dimensional Symmetric Sinusoidal Wavy-Walled Channel. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 10, pp. 62-73.
- [6] Nishimura T., Kojima N., 1995: Mass transfer enhancement in a sinusoidal wavy-walled channel for pulsatile flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38, pp. 1719-1731.
- [7] Szumbariski J.: Instability of a viscous liquid flow in a corrugated channel (in Polish, the habilitation thesis). Published by Warsaw University of Technology. Warszawa, 2007.
- [8] Szumbariski J.: Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45, 3, pp. 659-683, 2007.
- [9] Chorlton F.: *Textbook of Fluid Dynamics*. D. Van Nostrand Company Ltd., 1967.
- [10] Boyd J.P., 2001: *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd Ed. Dover Publication Inc., Minneola NY.
- [11] Szumbariski J., Blonski S., Kowalewski T.A.: Destabilization of a laminar flow in a rectangular channel by transversely-oriented wall corrugation. Paper submitted to the *Archives of Mechanics*.

Figures



(a)



(b)

Figure 1. Channel with bottom and top wall corrugation: oriented longitudinally (a) and oriented transversely (b).

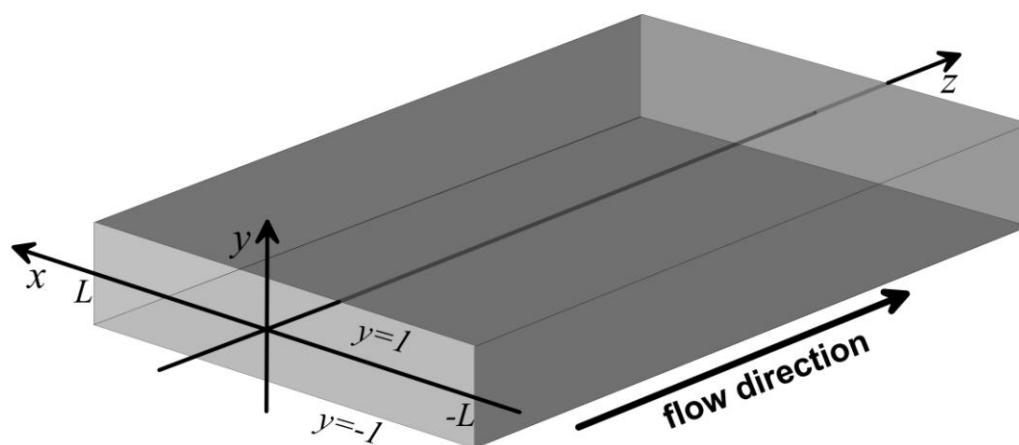


Figure 2 . Channel with rectangular cross section. The aspect ratio of the channel is equal L .

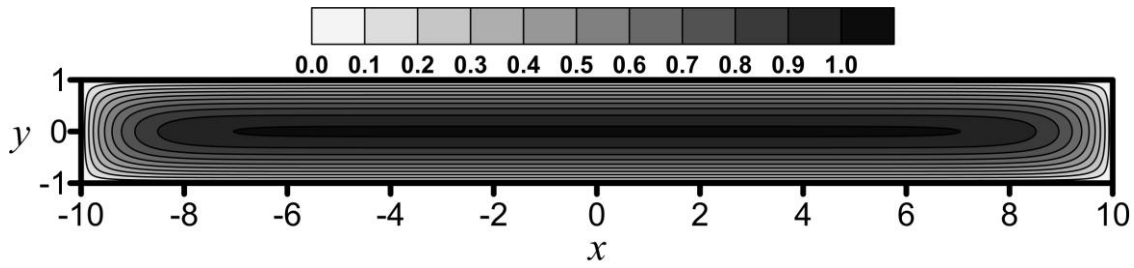


Figure 3. The contour plot of the velocity of the laminar flow through the rectangular channel. The aspect ratio of the channel's section is $L = 10$.

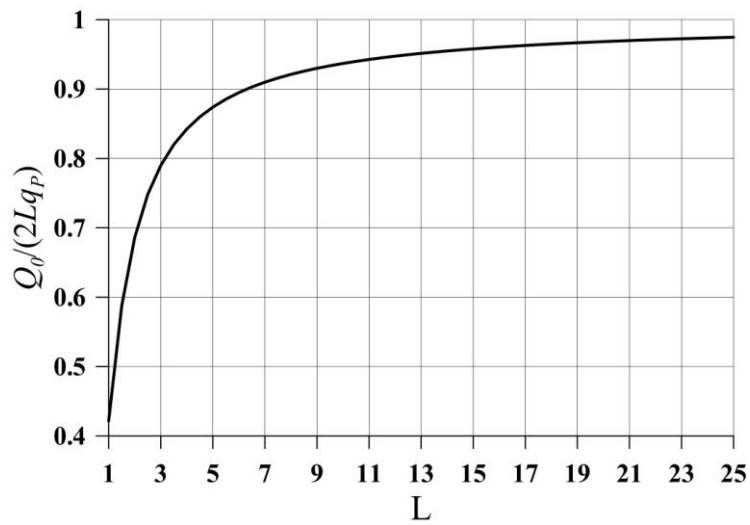


Figure 4. The ratio of the volumetric flow rate in the rectangular channel to the flow rate of the Poiseuille flow, plotted as the function of the channel's section aspect ratio L .

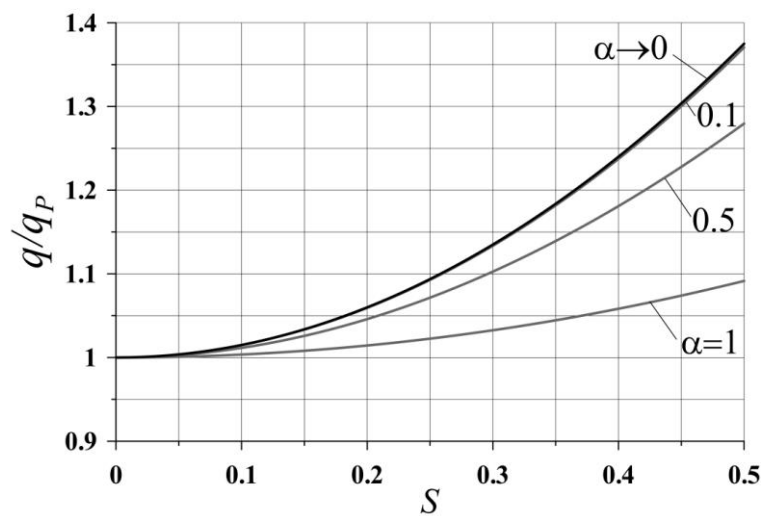
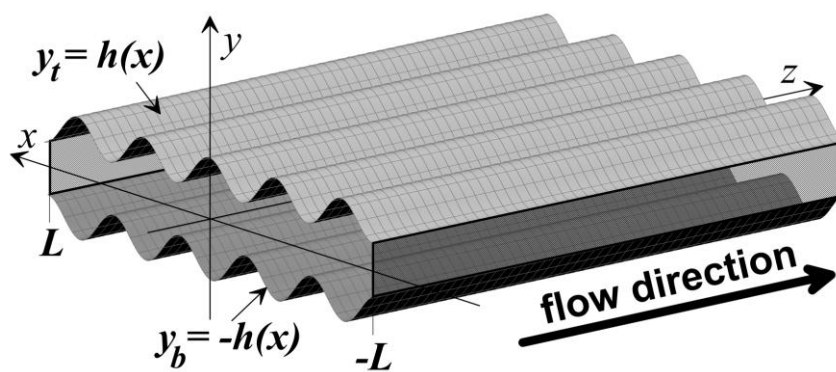
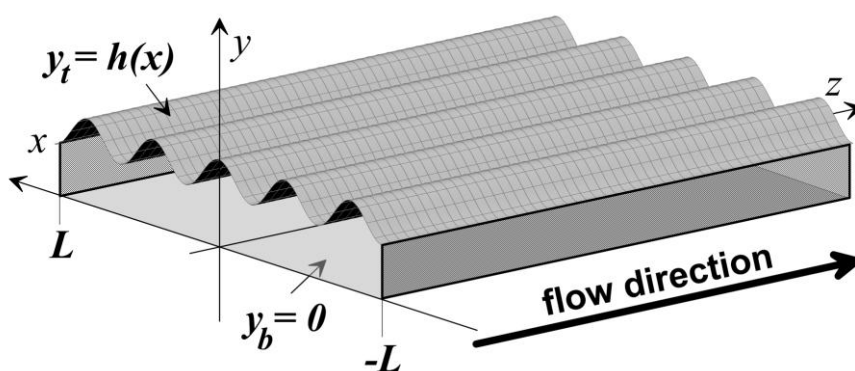


Figure 5. The ratio between the spanwise density q of the volumetric flow rate in the periodic channel with symmetrically corrugated walls and the density of the flow rate of the Poiseuille flow, plotted as the function of the corrugation amplitude S .



(a)



(b)

Figure 6. Transversely corrugated channel with flat sidewalls: (a) symmetric corrugation, (b) one-sided corrugation. The aspect ratio of the channel section is $L = 10$.

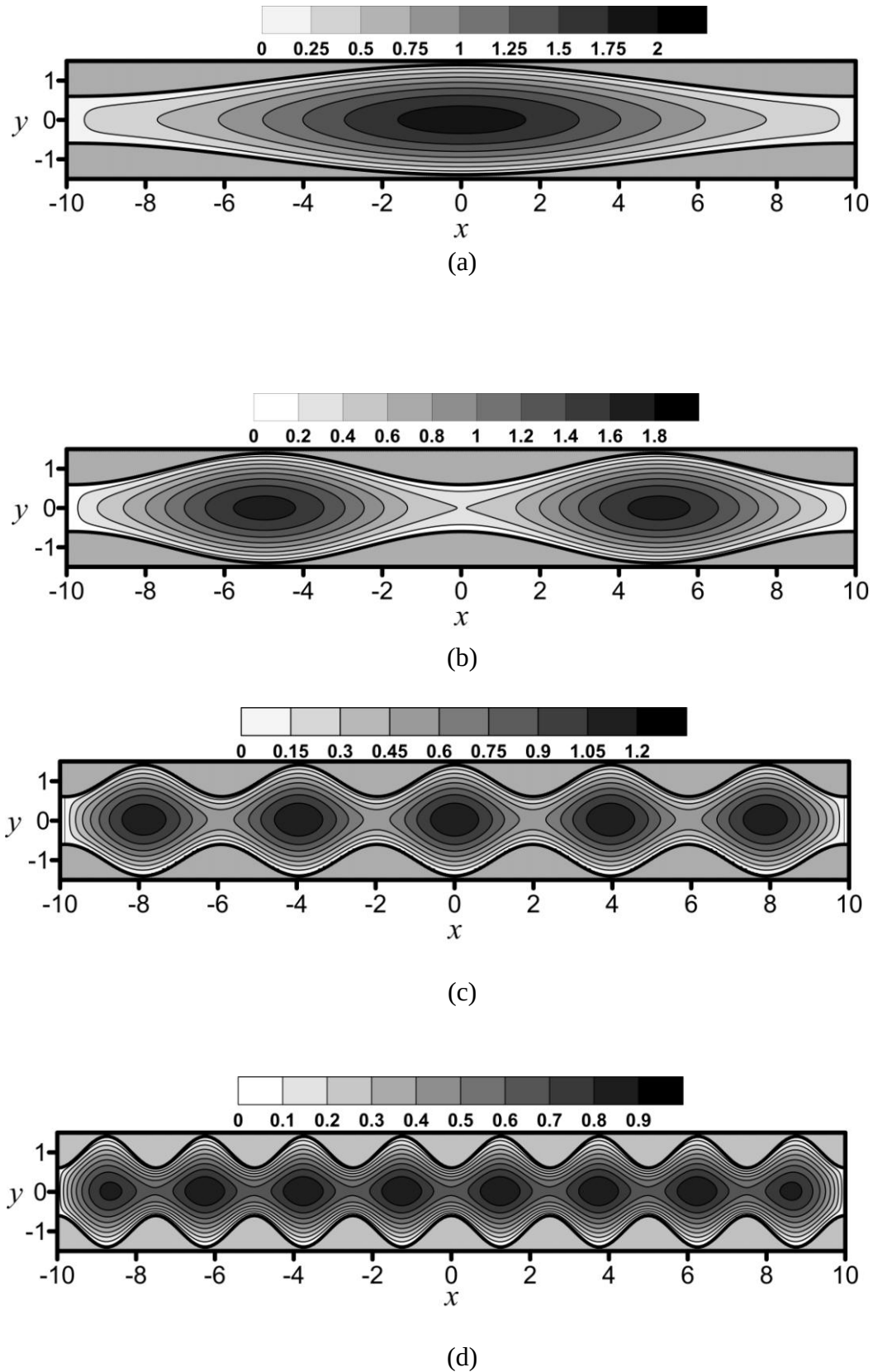


Figure 7. The contour plots of the velocity distribution computed for the channel of finite width (the aspect ratio $L = 10$) and sinusoidal symmetric corrugation with a different number of the wave periods M : (a) 1, (b) 2, (c) 5 and (d) 8. The amplitude of the corrugation is $S = 0.4$.

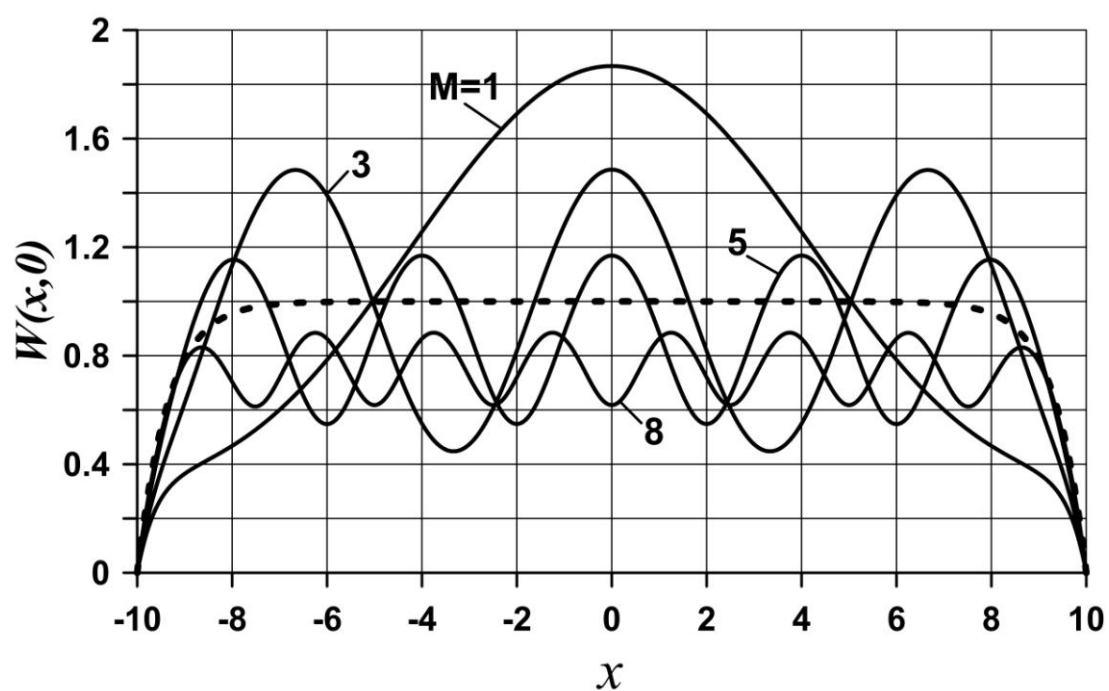


Figure 8. The velocity profiles computed across the channel in the plane $y = 0$ for the sinusoidal symmetric corrugation (the amplitude is $S = 0.4$), with a different number M of the wave periods. The dashed line corresponds to the velocity of the flow through the rectangular channel. The aspect ratio is equal 10.

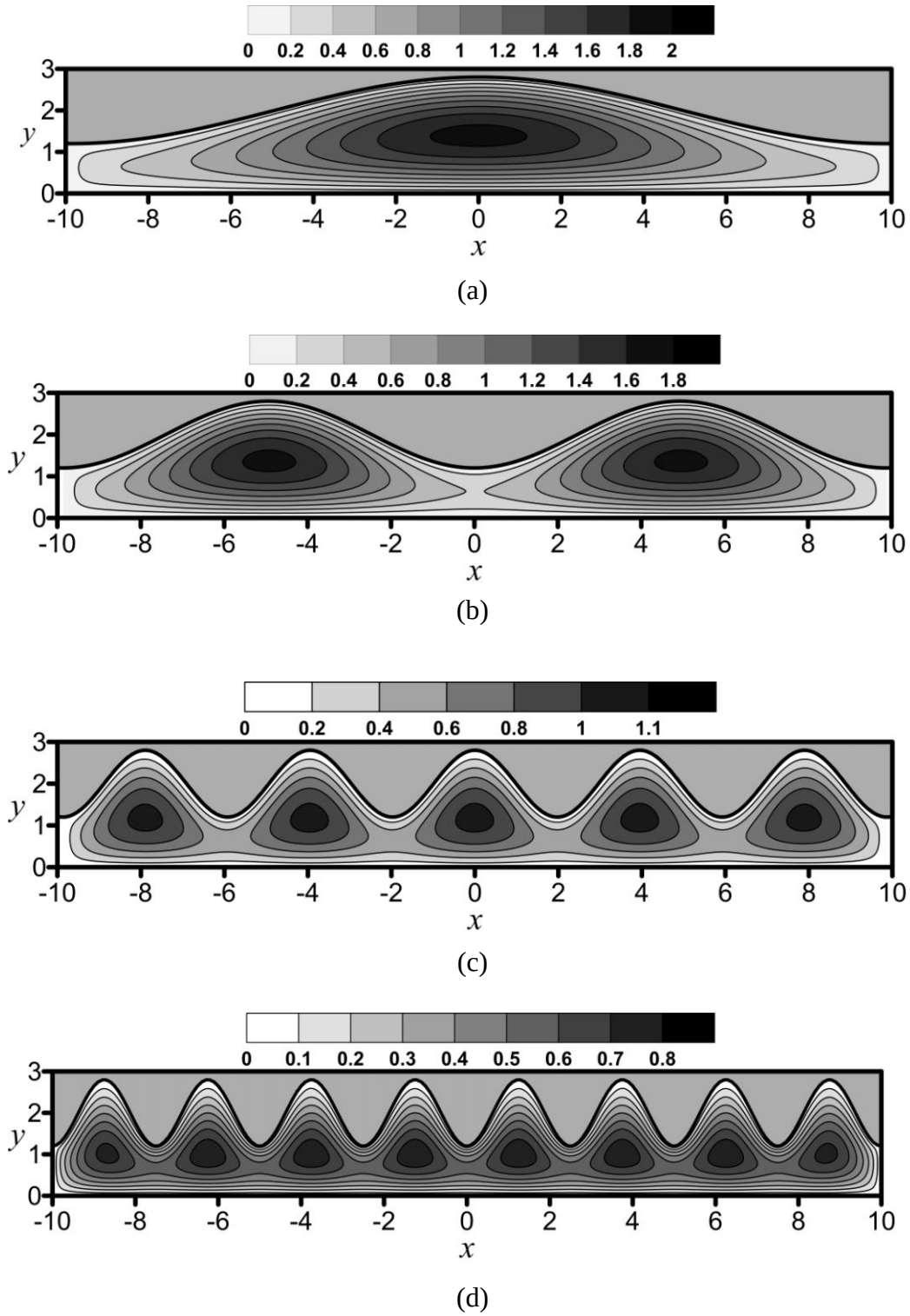
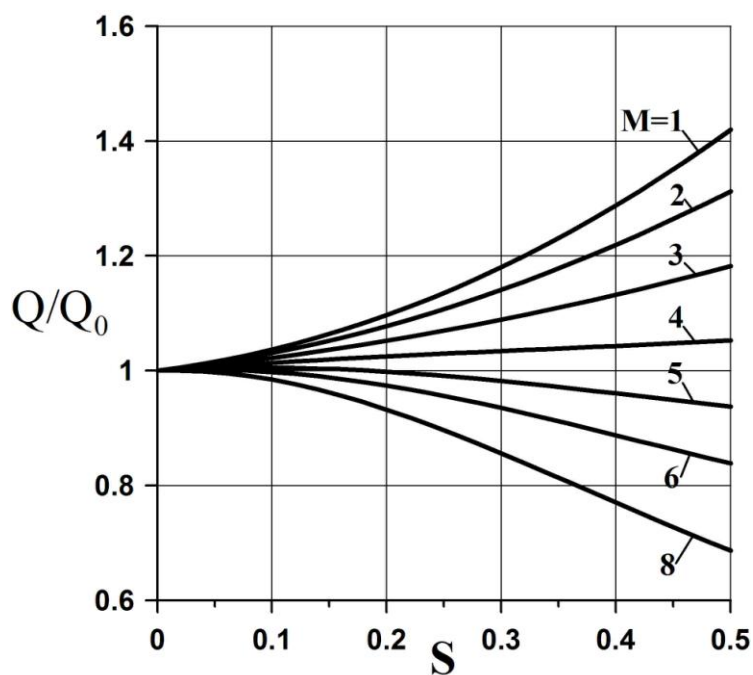
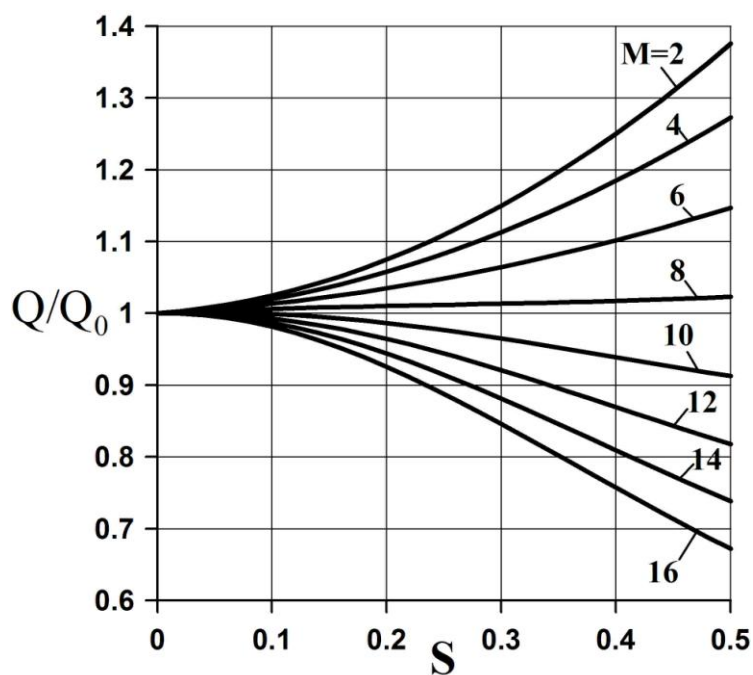


Figure 9. The contour plots of the velocity distribution computed for the channel of finite width (the aspect ratio $L = 10$) and one-sided corrugation with a different number of the wave periods M : (a) 1, (b) 2, (c) 5 and (d) 8. The amplitude of the corrugation is $S = 0.8$.

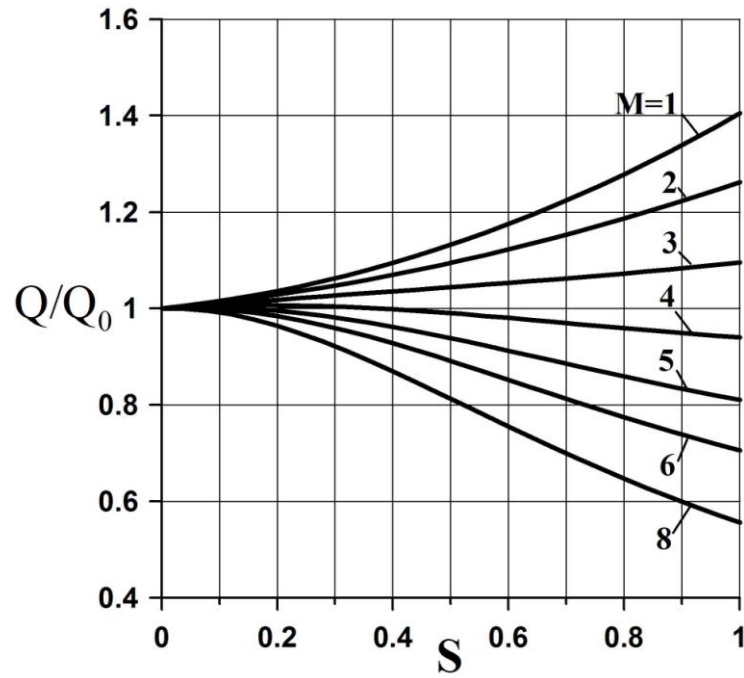


(a)

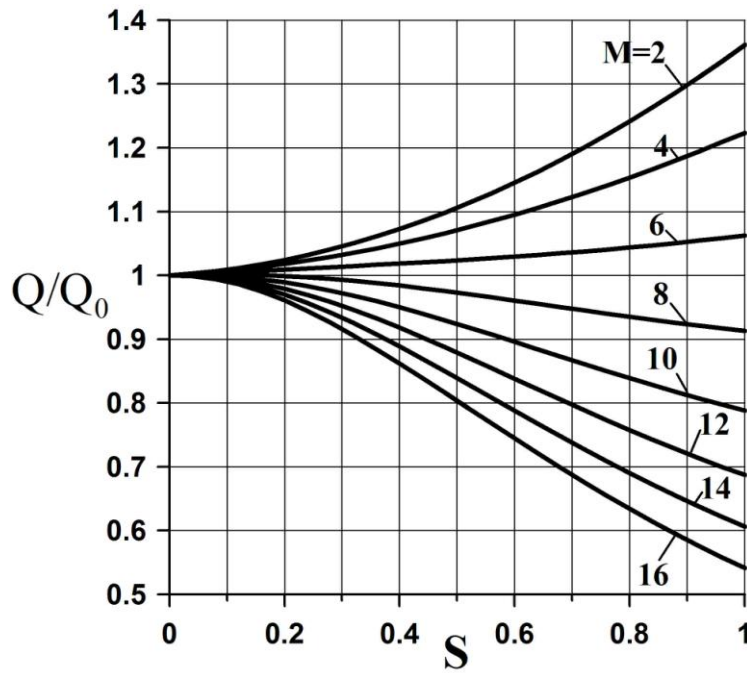


(b)

Figure 10. The ratio between the volumetric flow rate in the symmetrically corrugated channel and the flow rate in the rectangular channel of the same aspect ratio, computed for different numbers M of the corrugation wave periods and plotted as the function of the corrugation amplitude S . The aspect ratio of the channels is: (a) $L = 10$, (b) $L = 20$.



(a)



(b)

Figure 11. The ratio between the volumetric flow rate in the channel with one-sided wall corrugated and the flow rate in the rectangular channel of the same aspect ratio, computed for different numbers M of the corrugation wave periods and plotted as the function of the corrugation amplitude S . The aspect ratio of the channels is: (a) $L = 10$, (b) $L = 20$.

DESTABILIZATION OF A LAMINAR FLOW IN A RECTANGULAR CHANNEL BY TRANSVERSELY-ORIENTED WALL CORRUGATION

Jacek Szumbariski

Institute of Aeronautics and Applied Mechanics, Warsaw University of Technology

e-mail: jasz@meil.pw.edu.pl

Slawomir Blonski

Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Science

Abstract

The linear stability of the flow through the transversely corrugated channel with flat sidewalls is investigated numerically. Two variants of the wall corrugation are considered: symmetric sinusoidal waviness of the top and bottom walls and one-sided corrugation, i.e., one of the walls remains flat. Spectrally accurate Galerkin method formulated in a transformed domain is used for the solution of the main flow and linear stability equations. Unstable normal modes have been identified and their parametric variation has been determined. The results show that for sufficiently large aspect ratios the influence of the sidewalls is weak and the stability properties resemble those of the spanwise-periodic channel (investigated recently by the first author). It means that an appropriately designed transversal corrugation may be regarded a promising method for passive enhancement of mixing in laminar regime.

Key words: hydrodynamic stability, wavy channel, wall corrugation, laminar mixing

1. Introduction

The enhancement of transport capabilities of internal laminar flows is of fundamental importance in numerous applications in heat transfer, biotechnology and microfluidics. These capabilities can be acquired only through intense mixing which, in turn, necessitates existence of sufficiently complex, three-dimensional and preferably time-dependent vortex structures. Such form of the velocity field in the otherwise simple and usually unidirectional flow can be brought about by various methods including geometric modifications (wall waviness, application of surface-mounted obstacles or vortex generators), external forcing (pulsations or

the pressure gradient, mounting of vibrating elements, using wall transpiration, etc.) or the combination of both.

During the last four decades, different variants of such solutions have been proposed and analyzed both numerically and experimentally. Goldstein and Sparrow [1] investigated the kinematic structures and mass transfer through the divergent-convergent channel with symmetrically corrugated arc-shaped walls. This research was motivated mostly by the need for improvement of mixing efficiency in the flows through oxygenators. Later, numerical investigations of two-dimensional flow in a divergent-convergent symmetric channel with sinusoidal walls were performed by Sobey [2] and verified experimentally by Stephanoff *et al.* [3]. Systematic investigations of flows through channels with sinusoidal walls have been carried out since the middle 80s in Japan, mostly by Nishimura and his co-workers. Different variant have been considered including stationary flows [4] as well as flows driven by oscillatory [5,6] or pulsatile pressure gradient [7,8].

From the practical point of view, it is particularly interesting to consider flows, which acquire complex structure through natural instability rather than external forcing. It has been demonstrated in a number of works [9,10,11] that significant improvement of heat/mass transport in laminar regime may be obtained if only boundaries of a flow domain are shaped properly to induce low-Reynolds number instability and excited normal modes are oscillatory, i.e., they have a form of travelling waves. In a divergent-convergent channel with sinusoidal and streamwise-oriented wall waviness, the oscillatory unstable mode has been discovered for the Reynolds number exceeding 200 and more than threefold heat transfer enhancement has been demonstrated. Unfortunately, such spectacular effect appears usually at the price of an excessive hydraulic resistance, which can be even several times larger than in the reference “smooth” flow.

The possibility of the low-Reynolds number destabilization of the channel flows have been studied during last two decades by a number of authors. Majority of this research focuses of the wall waviness which is two-dimensional and streamwise-oriented, i.e., the lines of constant elevation of the wall are perpendicular to the main flow direction. Such type of the wall corrugation is referred in this paper to as the longitudinal one, see Figure 1a. In particular, it has been shown in [12] that, using a longitudinal wall corrugation with an appropriate wavelength and sufficiently large amplitude, the critical Reynolds number Re_L

can be reduced to the values as low as 100. The unstable normal mode is oscillatory, i.e., the disturbance has the form of the travelling wave meaning that the disturbed flow is expected to be time dependent. Other unstable mode, having the form of the stationary wave, has been also identified. The stationary disturbances are three-dimensional and for lower corrugation amplitudes their critical Reynolds number is smaller than for the oscillatory mode. The effect of instability of the travelling wave disturbances on the effectiveness of heat transfer in the flow through a divergent-convergent channel was investigated numerically by Blancher *et al.* in [13]. Recently, the same authors have carried out numerical analysis of spatially developing nonlinear instabilities in such a flow [14]. In the other papers [15,16,17] the longitudinally oriented wall waviness has been considered as the simplified model of unidirectional wall roughness. Consequently, the amplitudes taken into account are rather small, yet some aspects of the analysis, especially in the numerical approach (application of immersed boundaries and domain transformation) are of some relevance also to the current study.

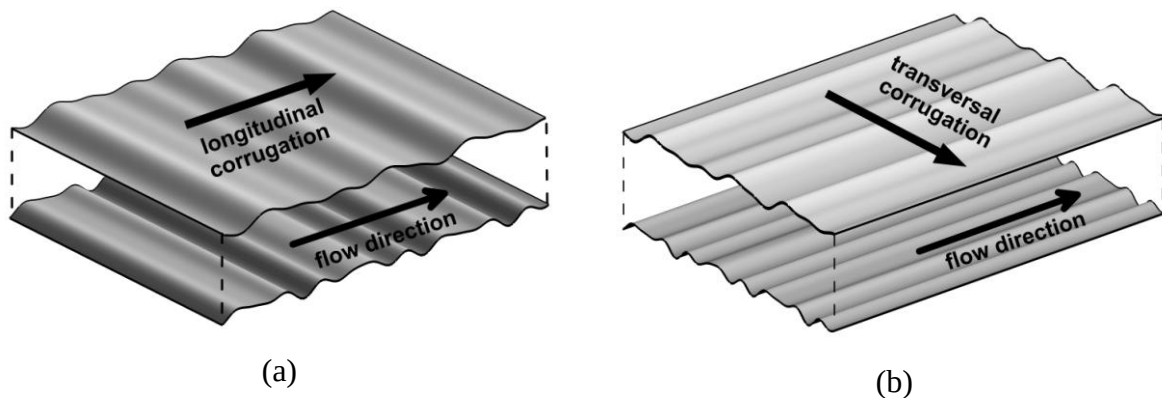


Figure 1. Different orientations of wall corrugation with respect to the flow direction: (a) longitudinal, (b) transversal

Surprisingly enough, the number of works devoted to the stability of laminar flows in transversely corrugated channels (see Figure 1b) is rather limited. Such type of geometrical modifications attracted some attention since late 80's due to their relation to the surface elements called the riblets. The main objective of this research was to explore potential offered by the riblets in terms of reduction of the skin-friction in the turbulent boundary layer (see [18] for the comprehensive review). A few papers on the influence of the riblets on the laminar-turbulent transition in the boundary layers have been also published in mid 90's, see the brief account of the main results in the seventh section of the monograph [19]. In the context of the current study, the most important reference is [20], where the numerical analysis of the channel flow instability induced by a short-wave and high-amplitude

transversely oriented wall corrugation (mimicking the presence of riblets) has been presented. It has been shown that the critical Reynolds number of the most unstable normal mode can drop under the value of 2600 (compared to $Re_L = 5772$ of the smooth configuration, i.e., plain Poiseuille flow).

The result obtained in [20] might suggest that the application of the transverse wall corrugation is not a right way to obtain flow destabilization at really low Reynolds numbers. However, one has to keep in mind that the aim of the analysis in [20] was to assess influence of the ribbed surface on the stability of a particular class of disturbances (the Orr-Sommerfeld modes) rather than looking for opportunities for mixing enhancement. Thus, the true lesson learnt from [20] is that the Orr-Sommerfeld modes are not the candidates for flow destabilization at low Reynolds numbers and, perhaps, also the considered geometry of the corrugation is probably not proper for this purpose.

The problem of low-Reynolds-number destabilization of the Poiseuille flow by means of transversely-oriented wall waviness has been taken up by the author of the current study and the most important findings were published in his habilitation thesis [21] in 2007. Early calculations showed that Orr-Sommerfeld modes respond rather weakly to the transverse wall waviness. This conclusion is consistent with the findings of the earlier study [20]. However, further analysis has revealed existence of a Squire mode which is particularly sensitive to the transverse corrugation with rather large wavelength (3-5 times larger than the average height of the channel's section). Destabilization of this (otherwise stable) mode is particularly strong when the corrugation is applied simultaneously to both channel's walls with equal amplitudes and the opposite phase. On the other hand, double-sided corrugation with zero phase-shift does not seem to have any effect on flow stability at low and moderate Reynolds numbers. The explanation of this fact can be formulated in terms of spanwise modulation of the main flow velocity. The magnitude of this modulation is the function of the phase shift between bottom and top wall's corrugation. Sufficiently large amplitude of the spanwise modulation (accompanied by appearance of inflection points in the velocity profile) is necessary for flow destabilization. The maximal amplitude of the modulation is attained when the wall corrugations are exactly in the opposite phase. If the phase shift is zero, the situation is quite different: the modulation basically disappears and the flow destabilization is absent.

It has been shown in the work [21] that the application of the opposite-phase double-sided sinusoidal wall waviness with properly chosen wavelength and the amplitude equal 10% of the average channel's height is able to reduce the critical Reynolds number Re_L to the value of 215. In the continuation of this investigation (see [22]), larger corrugation amplitudes have been considered and the further reduction to the spectacular value of $Re_L = 58$ has been achieved at the corrugation amplitude equal about 20% of the average channel's height. Since any further attempts to increase the amplitude of the corrugation resulted in some increase of Re_L , thus one can safely assume that the value of 58 is very close to the lowest value possible.

Another interesting finding of the investigations presented in [21] and [22] is that the low-Reynolds-number flow destabilization is not accompanied by any significant increase of the hydraulic resistance. Indeed, the value of the wavelength of the most destabilizing transversal corrugation happens to coincide almost exactly with the value of the wavelength for which the flow resistance remains nearly unchanged, i.e. it is the same as for the “smooth” Poiseuille flow. Another important property discovered is when that the critical Reynolds number Re_L depends mostly on the spectral (Fourier) structure of the corrugation shape. More specifically, if two different shapes of the wall corrugation share the same Fourier mode with a wavenumber from an appropriate range, then the corresponding values of Re_L will be very close irrespectively to other details of these shapes. It means in particular, that the actual “depth” of the corrugation is irrelevant – the flow may remain stable in the presence of even large corrugation if the Fourier spectrum of the wall shape does not contain a mode with a “dangerous” wavenumber.

Yet another result of the research reported in [21] and [22] was the determination of the spatial structure of the unstable Squire mode. The velocity field of this mode assumes the form of a vortex array, which is periodic in both streamwise and spanwise directions. Since the real part of the corresponding complex frequency is nonzero, this pattern moves downstream as the travelling disturbance wave. Therefore one can expect that the flow resulting from a nonlinear saturation process of small disturbances will exhibit oscillations which should significantly improve its mixing capabilities. This expectation has been positively verified by the direct numerical simulations using Fluent [23].

In aim of the current research is to investigate numerically linear stability of the laminar flow in the channel of finite width, which is one step towards more realistic configurations than

those considered in earlier works [21] and [22]. More specifically, we assume that the bottom and top walls of the channel are arbitrarily corrugated while the sidewalls are flat and parallel. The analysis is of the temporal type and consists in determination of the least stable (or most unstable) eigensolutions (normal modes) of the linear stability equations. Once such modes are identified, their variation with respect to the geometric characteristics of the wall corrugation, the streamwise wavenumber, and the Reynolds number are investigated. The ultimate goal of the analysis is to assess the role of the channel's sidewalls in the effect of low-Reynolds-number instability. This time, the reference case is the flow through the channel with rectangular section of the same aspect ratio. It is well known (see [24]) that the critical Reynolds number Re_L of the rectangular channel of a finite span is always larger than its value for the plane Poiseuille flow. By analogy, a certain increase of Re_L is expected when the wall waviness is implemented for the channel with sidewall rather than for the periodic channel of infinite width. The key issue is: assuming that the aspect ratio of the channel's section is large (but not too large), is the value of Re_L still small enough to make the transversely-oriented wall corrugation a worth considering option?

This paper provides an extended account of the theory and numerical results reported recently on the European Fluid Mechanics Conference EFMC-8 [25]. The contents of the paper can be summarized as follows. In the Section 2, the mathematical formulation for the main (undisturbed) flow and for the evolution of small disturbances has been provided. In the Section 3, the numerical approach to the main flow and to the linear stability equations has been described. The results of the parametric study of the unstable modes are presented in the Section 4. Finally, the summary, conclusion and perspectives of further investigations are presented shortly in the Section 5.

2. Mathematical formulation

2.1. Flow in the rectangular channel

Consider first the flow in the rectangular channel, depicted in the Figure 2, which will serve in this study as the reference case. The vertical distance between bottom and top walls will be referred to as the channel's height, while the distance between the sidewalls is called the channel width or span. The dimensionless coordinates are used such that the channel's height

is equal 2 and the channel's width is equal $2L$. The ratio between the channel's width and the channel's height, equal L , will be called the channel's aspect ratio.

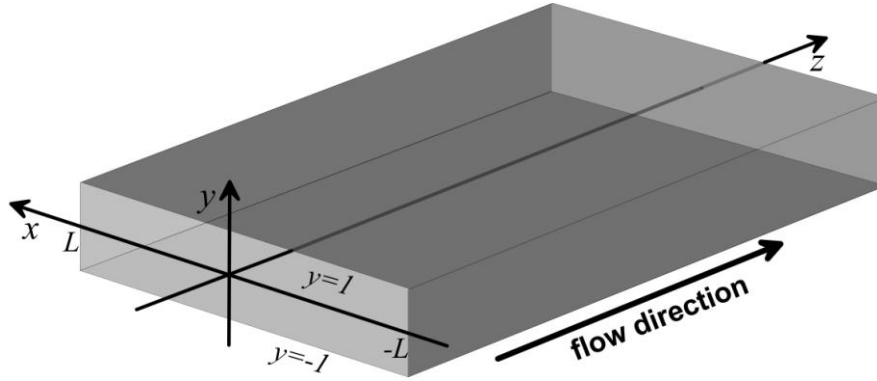


Figure 2. Channel with rectangular cross section

In the coordinate system chosen as shown in the Figure 2, the only nonzero component of the velocity field is the z -component given by the following non-dimensional formula

$$W_{ref}(x, y) = 1 - y^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k^3} \frac{\cosh(\alpha_k x)}{\cosh(\alpha_k L)} \cos(\alpha_k y) \quad , \quad \alpha_k = \frac{2k-1}{2} \pi \quad (2.1)$$

The function W_{ref} is the solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta W_{ref} \equiv \frac{\partial^2 W_{ref}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ref}}{\partial y^2} = -2 & , \quad (x, y) \in \Omega \\ W_{ref}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

where $\Omega = \{(x, y) : -L \leq x \leq L, -1 \leq y \leq 1\}$. In this study, the flow defined by (2.1) will be interpreted as the modification of the associated non-dimensional Poiseuille flow

$$W_p(x, y) = 1 - y^2 \quad (2.3)$$

which is caused by the presence of the side walls at $x = -L$ and $x = L$. Both (2.1) and (2.3) flows are driven by the same non-dimensional pressure gradient, which dimensionless value is

$$G_p = -\frac{2}{\text{Re}} \quad (2.4)$$

In the formula (2.4), the symbol Re denotes the Reynolds number defined as follows

$$\text{Re} = \frac{w_p^{\max} H}{\nu} \quad (2.5)$$

where ν denotes the kinematic viscosity of a fluid and $w_p^{\max}$ denotes the maximal value of the actual velocity of the Poiseuille flow between parallel walls separated by the distance of $2H$.

The non-dimensional volumetric flow rate corresponding to the velocity distribution (2.1) can be computed from the following formula

$$Q_{ref} = Q_{ref}(L) = \frac{8}{3}L \left[1 - \frac{6}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh(\alpha_k L)}{\alpha_k^5} \right] = Q_p \left[1 - \frac{6}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh(\alpha_k L)}{\alpha_k^5} \right] \quad (2.6)$$

In the above, the symbol $Q_p = 8L/3$ denotes the non-dimensional flow rate of the associated Poiseuille flow (2.3) computed for the transversal segment having the width of $2L$, i.e., the same as the rectangular channel. Clearly, $Q_{ref} < Q_p$ because the fluid velocity near the sidewalls of the rectangular channel diminishes to zero. The infinite series term in the formula (2.6) can be interpreted as the measure of increase in the flow resistance caused by the sidewalls.

2.2. Main flow

Consider now the flow in the channel with transversely corrugated walls. Two types of wall corrugation are considered in this study:

1) channel with symmetric corrugation of the bottom and top walls (see Figure 3a), i.e., described by the dimensionless formula

$$y_t(x) \equiv h(x) = -y_b(x) \quad (2.7)$$

2) channel with one-sided corrugation (see Figure 3b), i.e., with the flat bottom wall and wavy top wall (considered as the model of the experimental setup in [23])

$$y_t(x) \equiv h(x) \quad , \quad y_b(x) \equiv 0 \quad (2.8)$$

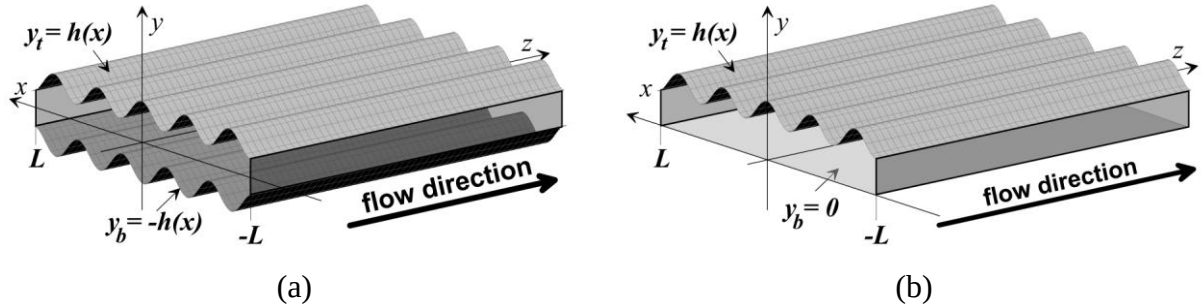


Figure 3. Different variants of transversal wall corrugation: (a) symmetric corrugation, (b) one-sided corrugation

In both cases, the sidewalls are flat and the range of the x coordinate is $-L \leq x \leq L$, i.e., the width of the channel remains equal $2L$. It is assumed that the average value of the function $h = h(x)$ is 1 in the symmetric corrugation case or it is equal 2 in the case of one-sided corrugation. Thus, irrespectively to the corrugation variant, the average height of the channel is equal 2 and the area of the channel's section is equal $4L$. The aspect ratio of the channel's section, which is defined as the ratio between the channel's width and average height, is equal L .

The flow in the wavy channel is driven by the same steady pressure gradient as the reference flow (2.1) in the rectangular channel. This flow is also unidirectional, i.e., the only nonzero component of the velocity field is the z -component $W_m = W_m(x, y)$. The function W_m is the solution to the following boundary value problem analogical to (2.2), namely

$$\begin{cases} \Delta W_m \equiv \frac{\partial^2 W_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_m}{\partial y^2} = -2 & , \quad (x, y) \in \Omega \\ W_m|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

where this time the symbol Ω denotes the channel's section (in the plane $z = \text{const}$) and $\partial\Omega$ denotes the contour of Ω .

2.3. Linear stability analysis

The stability analysis begins with the derivation of the equations which govern the dynamics of small disturbances imposed on the main flow. The disturbed velocity and pressure fields can be written as the sum of the main flow and the time-dependent and three dimensional disturbances

$$\mathbf{V}(t, x, y, z) = \mathbf{V}_m(x, y) + \mathbf{v}(t, x, y, z) = [0, 0, W_m(x, y)] + [u, v, w](t, x, y, z) \quad (2.10)$$

$$P(t, x, y, z) = P_m(z) + p(t, x, y, z)$$

Next, the formulas (2.10) are plugged into the Navier-Stokes and continuity equations. Since the disturbances are assumed small, the nonlinear terms are removed and the following set of linear differential equations is obtained

$$\begin{cases} \partial_t u + W_m \partial_z u = -\partial_x p + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) u \\ \partial_t v + W_m \partial_z v = -\partial_y p + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) v \\ \partial_t w + W_m \partial_z w + u \partial_x W_m + v \partial_y W_m = -\partial_z p + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) w \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

The velocity field (2.10) vanishes at $\partial\Omega$, which implies the boundary conditions for the velocity field disturbances

$$[u, v, w]_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.12)$$

In general, the initial conditions must be also formulated

$$[u, v, w]_{t=0} = [u_0, v_0, w_0] \quad (2.13)$$

Since the velocity W_m of the basic flow does not depend on z variable, the equations (2.11) admit particular solutions (normal modes) in the following form

$$[u, v, w, p](t, x, y, z) = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}](x, y) \exp[i(\beta z - \sigma t)] + c.c. \quad (2.14)$$

In the above, the hat symbols refer to the complex amplitude functions and the symbol “c.c.” stands for the complex conjugate terms. The quantity $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ is the complex frequency of the normal mode. The symbol β denotes the spanwise wave number of the flow disturbance, which is assumed to be z -periodic with the period equal $2\pi/\beta$. This assumption concerns also the pressure disturbances, which implies that the average value of the streamwise pressure gradient of the disturbed flow remains equal to the pressure gradient of the main (undisturbed) flow.

After insertion of the normal mode formula (2.14) to the equations (2.11) one obtains

$$\begin{cases} -i\sigma\hat{u} + i\beta W_m \hat{u} = -\partial_x \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}(\Delta - \beta^2)\hat{u} \\ -i\sigma\hat{v} + i\beta W_m \hat{v} = -\partial_y \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}(\Delta - \beta^2)\hat{v} \\ -i\sigma\hat{w} + i\beta W_m \hat{w} + \hat{u}\partial_x W_m + \hat{v}\partial_y W_m = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}(\Delta - \beta^2)\hat{w} \\ \partial_x \hat{u} + \partial_y \hat{v} + i\beta\hat{w} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

From (2.12) one concludes that the amplitude functions of the velocity components should satisfy the homogeneous boundary condition at the channel's section contour

$$[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.16)$$

The main goal of the linear stability analysis is to identify conditions in which at least one unstable eigensolution of the boundary value problem (2.15)-(2.16) exists. The normal mode is unstable if and only if the imaginary part σ_I of its complex frequency σ is positive. In the context of flow destabilization, it is particularly interesting to determine the critical Reynolds number Re_L , i.e., the maximal value of the Reynolds number such that all normal modes are either attenuated ($\sigma_I < 0$) or - at most - neutrally stable ($\sigma_I = 0$). It follows that for $\text{Re} > \text{Re}_{\text{crit}}$ there exists at least one normal mode which grown exponentially in time. Since

the magnitude of disturbances in the linear theory is arbitrary small, the flow with $Re > Re_{crit}$ is unconditionally unstable.

3. Numerical method

3.1. Domain transformation

In order to determine numerically the shape of the main flow and analyze linear stability characteristics, the transformation of the physical domain Ω to the computational domain $[-1,1]^2$ is applied. The particular form of this mapping depends on the type of the corrugation:

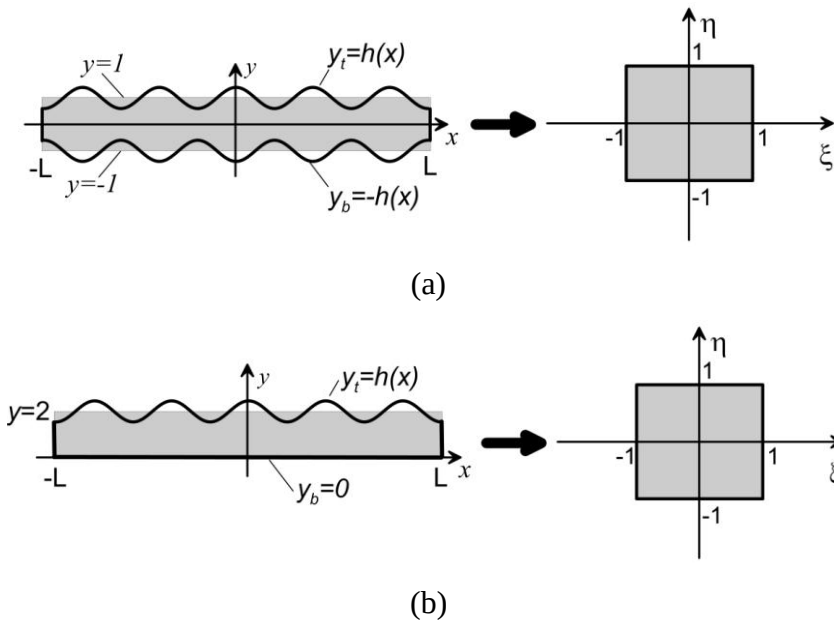


Figure 4. Mapping from physical domain do the computational domain: (a) symmetric corrugation, (b) one-sided corrugation

1) Symmetric corrugation (see Figure 4a)

In this case, the transformation from physical to computational domain is defined as follows

$$\begin{cases} \xi = x / L \\ \eta = y / h(x) = y / [LH(x / L)] \end{cases} \quad (3.1)$$

where

$$H(\xi) = h(L\xi) / L \quad (3.2)$$

The corresponding inverse mapping given by the formula

$$\begin{cases} x = L\xi \\ y = \eta h(L\xi) = L\eta H(\xi) \end{cases} \quad (3.3)$$

2) One-sided corrugation (see Figure 4b)

In this case, the transformation from physical to computational domain is defined as follows

$$\begin{cases} \xi = x / L \\ \eta = 2y / h(x) - 1 = 2y / [LH(x / L)] - 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

where the function H is defined by (3.2). The inverse mapping is defined by the formula

$$\begin{cases} x = L\xi \\ y = \frac{1}{2}(\eta + 1)h(L\xi) = \frac{1}{2}(\eta + 1)LH(\xi) \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2. Numerical method for the main flow

The boundary value problem (2.12) is transformed to the following form

$$\begin{cases} \tilde{\Delta} W_0(\xi, \eta) = -2, \quad (\xi, \eta) \in [-1, 1]^2 \\ W_0(\xi = \pm 1, \eta = \pm 1) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

where the symbol $\tilde{\Delta}$ denotes the transformed Laplace operator

$$\tilde{\Delta} = L^{-2}(\partial_{\xi\xi}^2 - 2a_{\xi\eta}\partial_{\xi\eta} + a_{\eta\eta}\partial_{\eta\eta} + a_\eta\partial_\eta). \quad (3.7)$$

The functional coefficients in the formula (3.7) can be expressed as follows

$$a_{\xi\eta} = a(\eta) g_1(\xi) , \quad a_{\eta\eta} = \gamma^2 g_2^2(\xi) + a^2(\eta) g_1^2(\xi) , \quad a_\eta = a(\eta) [2g_1^2(\xi) - g_3(\xi)] \quad (3.8)$$

where

$$g_1(\xi) = H'(\xi) / H(\xi) , \quad g_2(\xi) = 1 / H(\xi) , \quad g_3(\xi) = H''(\xi) / H(\xi) \quad (3.9)$$

$$a(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{for symmetric corrugation} \\ \eta + 1 & \text{for one-sided corrugation} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{for symmetric corrugation} \\ 2 & \text{for one-sided corrugation} \end{cases} \quad (3.11)$$

The boundary value problem (3.6) can be solved numerically by means of the spectral method. To this aim, the following polynomial functions are defined in the computational domain $[-1,1]^2$

$$\varphi_{i,j}(\xi, \eta) = [T_{i+2}(\xi) - T_i(\xi)][T_{j+2}(\eta) - T_j(\eta)] , \quad i = 0, \dots, N_\xi , \quad j = 0, \dots, N_\eta \quad (3.12)$$

In the above formula, the general symbol T_k refers to the standard Chebyshev polynomial of the order k . Note that the formula (3.12) implies that each function $\varphi_{i,j}$ vanishes identically at the boundary of the computation domain.

In the next step, the set of the functions (3.12) is re-numerated by a single index $I = I(i, j)$. Finally, the Gram-Schmidt orthogonalization is applied to obtain the orthonormal system of the basic functions $\{b_I^V, I = 1, \dots, N\}$, where $N = (N_\xi + 1) \cdot (N_\eta + 1)$. The property of orthogonality means that the following conditions hold

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b_I^V(\xi, \eta) b_J^V(\xi, \eta) \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta = \delta_{IJ} \quad (3.13)$$

where ω is the Chebyshev weight function

$$\omega = \omega(\xi, \eta) = \left[\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)} \right]^{-1} \quad (3.14)$$

Clearly, all basic functions $\{b_I^V, I = 1, \dots, N\}$ satisfy the homogeneous boundary condition

$$b_I^V(\pm 1, \eta) = b_I^V(\xi, \pm 1) \quad (3.15)$$

The approximate solution to the boundary value problem (3.6) is sought in the form of the expansion

$$\tilde{W}_0(\xi, \eta) \approx \sum_{j=0}^N w_j b_j^V(\xi, \eta) \quad (3.16)$$

where the coefficients $w_I, I = 1, \dots, N$ are to be determined. To this aim, the representation (3.16) is plugged into the transformed Poisson equation in (3.6) and obtained residuum is orthogonalized with respect to the subspace spanned by the basic functions $\{b_I^V, I = 1, \dots, N\}$. This procedure leads to the following set of conditions

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tilde{\Delta} \tilde{W}_0 + 2) b_I^V \omega d\xi d\eta = 0, \quad I = 1, \dots, N \quad (3.17)$$

After simple algebra the system of linear equations for unknown coefficients $\{w_I, I = 1, \dots, N\}$ is obtained

$$\sum_{j=1}^N K_{IJ} w_j = r_I, \quad I = 1, \dots, N \quad (3.18)$$

where

$$K_{IJ} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b_I^V \tilde{\Delta} b_J^V \omega d\xi d\eta, \quad I, J = 1, \dots, N \quad (3.19)$$

$$r_I = -2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b_I^V \omega d\xi d\eta, \quad I = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

The linear system (3.18) can be solved using the LU factorization. In the current work, the choice of $N_\xi = 99$ and $N_\eta = 39$ (hence, $N = 4000$) provides sufficient accuracy of the main flow evaluation.

3.2. Numerical approximation of the stability equations

In order to find the form of the normal modes and associated complex frequencies, the differential eigenvalue problem (2.20)-(2.21) has to be approximated by an algebraic eigenvalue problem. As the first step of the solution procedure, the transformation of spatial coordinates is applied in the form depending on the corrugation type: (3.1)-(3.3) for symmetric corrugation or (3.4)-(3.5) for the one-sided corrugation.

In effect, the following equations are obtained

$$\begin{cases} -i\sigma \hat{u} + i\beta W_m \hat{u} = -\frac{1}{L} [\partial_\xi - a(\eta)g_1(\xi)\partial_\eta] \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} (\tilde{\Delta} - \beta^2) \hat{u} \\ -i\sigma \hat{v} + i\beta W_m \hat{v} = -\frac{1}{L} \gamma g_2(\xi) \partial_\eta \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} (\tilde{\Delta} - \beta^2) \hat{v} \\ -i\sigma \hat{w} + i\beta W_m \hat{w} + \frac{1}{L} \hat{u} [\partial_\xi - a(\eta)g_1(\xi)\partial_\eta] W_m + \frac{1}{L} \gamma \hat{v} g_2(\xi) \partial_\eta W_m = -i\beta \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} (\tilde{\Delta} - \beta^2) \hat{w} \\ \frac{1}{L} [\partial_\xi - a(\eta)g_1(\xi)\partial_\eta] \hat{u} + \frac{1}{L} \gamma g_2(\xi) \partial_\eta \hat{v} + i\beta \hat{w} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

where the function $a = a(\eta)$ and the constant γ are defined by (3.10) and (3.11). The boundary conditions accompanying the equations (3.21) are

$$[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}](\xi = \pm 1, \eta = \pm 1) = 0 \quad (3.22)$$

The numerical approach to the system (3.21)-(3.22) is to apply the spectral discretization and Galerkin projection method. To this aim, two sets of the basic functions – one for the velocity components and the other for the pressure field – are defined in the transformed domain $[-1, 1]^2$. The basic functions used for the velocity components are the functions

$\{b_I^V, I = 1, \dots, N\}$ defined for the main flow calculations in the Section 3.1. The amplitude functions of the velocity components are approximated by following finite expansions

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y) &= \sum_{I=1}^N (\mathbf{u}_1)_I b_I^V(x, y) \\ \hat{v}(x, y) &= \sum_{I=1}^N (\mathbf{u}_2)_I b_I^V(x, y) \\ \hat{w}(x, y) &= \sum_{I=1}^N (\mathbf{u}_3)_I b_I^V(x, y)\end{aligned}\tag{3.23}$$

where the coefficients $(\mathbf{u}_1)_I, (\mathbf{u}_2)_I, (\mathbf{u}_3)_I, I = 1, \dots, N$ have to be determined.

The basic functions for the pressure disturbance field are the following polynomials of the transformed spatial coordinates

$$b_I^p(\xi, \eta) = T_{i(I)}(\xi) T_{j(I)}(\eta), \quad I = 1, \dots, N\tag{3.24}$$

In the above formula, the mapping $(i, j) \rightarrow I(i, j)$ from a double-index numeration to a single-index numeration has been applied. It is assumed that the total number of pressure basic functions is equal to the number of the velocity basic functions. Note also that the pressure basic functions do not vanish at the boundary of the computational domain $[-1, 1]^2$.

The pressure amplitude function $\hat{p}$ is sought in the form of the finite expansion

$$\hat{p}(x, y) = \sum_{J=1}^N (\mathbf{p})_J b_J^p(x, y)\tag{3.25}$$

where the coefficients $(\mathbf{p})_J, J = 1, \dots, N$ should be determined.

The discretization procedure is continued as follows. First, the expansions (3.23) and (3.25) are plugged into the transformed stability equations (3.21). Next, the residua of these equations are projected orthogonally on the appropriate functions spaces. More specifically, the residua of the first three equations are assumed orthogonal (in the sense of the Chebyshev

inner product) to the function space spanned by the velocity basic functions and the residuum of the last (continuity) equations is orthogonalized with respect to the subspace spanned by all pressure basic functions. The result of this procedure is the following algebraic eigenvalue/eigenvector problem

$$\begin{cases} -i\sigma \mathbf{u}_1 + \mathbf{C}\mathbf{u}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ -i\sigma \mathbf{u}_2 + \mathbf{C}\mathbf{u}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ -i\sigma \mathbf{u}_3 + \mathbf{C}\mathbf{u}_3 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{u}_2 + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.26)$$

The array structures used in (3.26) are defined as follows

$$\begin{aligned} (\mathbf{A})_{I,J} &= \langle b_I^V, \tilde{W}_0 b_J^V \rangle_\omega, \quad (\mathbf{K})_{I,J} = \langle b_I^V, \tilde{\Delta} b_J^V \rangle_\omega, \quad \mathbf{C} = i\beta\mathbf{A} - \frac{1}{\text{Re}}(\mathbf{K} - \beta^2\mathbf{I}) \\ (\mathbf{D}_1)_{I,J} &= \frac{1}{L} \langle b_I^V, [\partial_\xi - a(\eta)g_1(\xi)\partial_\eta] b_J^P \rangle_\omega, \quad (\mathbf{D}_2)_{I,J} = \frac{1}{L} \gamma \langle b_I^V, g_2(\xi)\partial_\eta b_J^P \rangle_\omega, \quad (\mathbf{D}_3)_{I,J} = \langle b_I^V, b_J^P \rangle_\omega \\ (\mathbf{B}_1)_{I,J} &= \frac{1}{L} \langle b_I^V, b_J^V [\partial_\xi - a(\eta)g_1(\xi)\partial_\eta] \tilde{W}_0 \rangle_\omega, \quad (\mathbf{B}_2)_{I,J} = \frac{1}{L} \gamma \langle b_I^V, b_J^V g_2(\xi)\partial_\eta \tilde{W}_0 \rangle_\omega \\ (\mathbf{E}_1)_{I,J} &= \frac{1}{L} \langle b_I^P, [\partial_\xi - a(\eta)g_1(\xi)\partial_\eta] b_J^V \rangle_\omega, \quad (\mathbf{E}_2)_{I,J} = \frac{1}{L} \gamma \langle b_I^P, g_2(\xi)\partial_\eta b_J^V \rangle_\omega, \quad (\mathbf{E}_3)_{I,J} = \langle b_I^P, b_J^V \rangle_\omega \end{aligned} \quad (3.27)$$

Note that for all arrays defined by the formulas (3.27) the range of indices is $I, J = 1, \dots, N$.

The algebraic eigenvalue problem (3.26) contains $4N$ equations. On the basis of the main flow calculations, a reasonable accuracy should be achieved with the value of N around 3000-4000, thus the total dimension of the eigenvalue problem (3.26) is expected to exceed 10^4 . Since the arrays (3.27) are dense, the solution of the problem of this size is quite demanding in both computational resources and the memory storage. Thus, an attempt to reduce the dimension of the problem is worth considering.

We will show that the algebraic eigenvalue problem (3.26) can be replaced by an equivalent problem of the halved size. Here, we mean a size reduction technique which is based on the elimination of the part of the unknowns rather than the usage of possible symmetries (which may or may not exist) of the flow domain.

There are basically two ways to achieve this goal. One method is to follow the procedure proposed by Tatsumi and Yoshimura [24] for the rectangular channel flow and transform the original stability equations (2.15) into the system of coupled fourth-order partial differential equations for the amplitude functions $\hat{u}$ and $\hat{v}$. However, for the transversely corrugated channel, this approach is not convenient for two following reasons. First, the domain transformation would lead to horribly complicated expressions of the 4th-order differential operators. Secondly, the transformed boundary conditions at the wavy walls will couple in a complicated way both components of velocity. It means that the analytical construction of the velocity basic functions satisfying identically homogeneous boundary conditions would be not possible.

An alternative approach is to transform algebraically the problem (3.26) into an equivalent smaller problem. In the first step, the pressure unknowns (the vector $\mathbf{p}$) are eliminated. To this aim, we multiply the first block equation in the system (3.26) by the matrix $\mathbf{E}_1$, the second one by the matrix $\mathbf{E}_2$, the third one by the matrix $i\beta\mathbf{E}_3$ and then add all three block equations together. This operation is exactly the discrete counterpart of applying the divergence operator to the linearized Navier-Stokes Equation. As a result, one obtains the linear system

$$\mathbf{S}\mathbf{p} = -(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{E}_2\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_2)\mathbf{u}_1 - i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{C}\mathbf{u}_3 \quad (3.28)$$

where the matrix $\mathbf{S}$ is the algebraic analog of the Laplace operator and is defined as follows

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_1\mathbf{D}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{D}_2 - \beta^2\mathbf{E}_3\mathbf{D}_3 \quad (3.29)$$

Note that all terms with the complex frequency σ have disappeared because the vectors $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ and $\mathbf{u}_3$ satisfy the last block equation of the system (3.26), which is the algebraic counterpart of the continuity equation.

The matrix $\mathbf{S}$ is nonsingular, hence the vector $\mathbf{p}$ can be determined from (3.28) as

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{H}_3\mathbf{u}_3 \quad (3.30)$$

where

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = -\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1) \\ \mathbf{H}_2 = -\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{E}_2\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_2) \\ \mathbf{H}_3 = -i\beta\mathbf{S}^{-1}\mathbf{E}_3\mathbf{C} \end{cases} \quad (3.31)$$

This way, the eigenvalue problem (3.26) has been replaced by the smaller problem (the size is $3N$) of the following block structure

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{D}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{D}_1\mathbf{H}_2 & \mathbf{D}_1\mathbf{H}_3 \\ \mathbf{D}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{H}_2 & \mathbf{D}_2\mathbf{H}_3 \\ \mathbf{B}_1 + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_1 & \mathbf{B}_2 + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_2 & \mathbf{C} + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = i\sigma \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Although the size of the eigenvalue problem has been reduced, the form (3.32) is still not suitable for practical calculations. To understand why the size reduction procedure should be continued, observe that the following matrix equality holds

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & i\beta\mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{D}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{D}_1\mathbf{H}_2 & \mathbf{D}_1\mathbf{H}_3 \\ \mathbf{D}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{H}_2 & \mathbf{D}_2\mathbf{H}_3 \\ \mathbf{B}_1 + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_1 & \mathbf{B}_2 + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_2 & \mathbf{C} + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

In the above, the left factor is the rectangular matrix (having N rows and $3N$ columns), while the results of the matrix multiplication is the rectangular zero matrix. To verify (3.33), let us follow the calculations for the first block column

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_1(\mathbf{C} + \mathbf{D}_1\mathbf{H}_1) + \mathbf{E}_2\mathbf{D}_2\mathbf{H}_1 + i\beta\mathbf{E}_3(\mathbf{B}_1 + i\beta\mathbf{D}_3\mathbf{H}_1) = \\ & = \mathbf{E}_1\mathbf{C} - \mathbf{E}_1\mathbf{D}_1\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1) - \mathbf{E}_2\mathbf{D}_2\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1) + \\ & + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1 + \beta^2\mathbf{E}_3\mathbf{D}_3\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1) = \\ & = \mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1 - \underbrace{(\mathbf{E}_1\mathbf{D}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{D}_2 - \beta^2\mathbf{E}_3\mathbf{D}_3)}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{E}_1\mathbf{C} + i\beta\mathbf{E}_3\mathbf{B}_1) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.34)$$

We conclude that each row of the left rectangular matrix in the (3.33) is the left eigenvector associated to the nonphysical zero eigenvalue of the problem (3.32). Since the rank of the rectangular matrix is N , the multiplicity of the zero eigenvalue is also equal N . In other words,

the eigenvalue problem (3.32) has dimension equal $3N$ but it contains the information only about (at most) $2N$ normal modes.

The remedy is to eliminate one of the velocity components. More specifically, the last block of the equations in (3.26) can be used to express the vector $\mathbf{u}_3$ by the vectors $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{i}{\beta} \mathbf{E}_3^{-1} (\mathbf{E}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{u}_2) \quad (3.35)$$

After elimination of $\mathbf{u}_3$ from the system (3.32), we arrive at the following final form of the eigenvalue problem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{D}_1(\mathbf{H}_1 + \frac{i}{\beta} \mathbf{H}_3 \mathbf{E}_3^{-1} \mathbf{E}_1) & \mathbf{D}_1(\mathbf{H}_2 + \frac{i}{\beta} \mathbf{H}_3 \mathbf{E}_3^{-1} \mathbf{E}_2) \\ \mathbf{D}_2(\mathbf{H}_1 + \frac{i}{\beta} \mathbf{H}_3 \mathbf{E}_3^{-1} \mathbf{E}_1) & \mathbf{C} + \mathbf{D}_2(\mathbf{H}_2 + \frac{i}{\beta} \mathbf{H}_3 \mathbf{E}_3^{-1} \mathbf{E}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = i\sigma \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

The size of the problem (3.36) is $2N$, i.e., the original size of (3.26) has been halved as promised. By finding the eigensolutions of (3.36) one obtains the complex frequencies of the normal modes as well as x and y components of the associated velocity disturbances. For each particular normal mode, the z component of the velocity disturbance field can be determined using the formula (3.35) and the pressure field can be found from (3.30).

The size reduction described above is of the great practical value only if we intend to determine the whole spectrum or – at least – its sufficiently numerous subset. In such circumstances, choosing the QZ iterative algorithm might be a natural move. The highly optimized implementations of this algorithm have been available for years in various numerical libraries, e.g., in the LAPACK library. Since the problem (3.36) is complex and nonsymmetric, reduction of its size by the factor of two will result in significant decrease of the computational time (more than one order of magnitude). A substantial savings in terms of memory will be also achieved, even though a few additional matrices of the dimension N need to be constructed and stored.

On the other hand, the calculations of the full spectrum are definitely not a reasonable way to assess the parametric variation of just one or even a few selected normal modes. Indeed, such computations would necessitate a repetitive re-assembling of the block matrix in (3.36),

which in turn requires the re-construction of the matrices $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ and $\mathbf{H}_3$. Note, however, that single re-construction process consists in solution of $O(N)$ linear system (with the matrix $\mathbf{S}$) of the dimension equal N , so the numerical cost scales with N at like $O(N^3)$.

Much more efficient way to determine a single normal mode is to use the Inverse Power Method (IPM). The parametric variation of an invariant subspace spanned by a few selected eigenmodes can be efficiently followed by means of the IPM's generalization known as the Method of Subspace Iterations [26]. In the current study, only the first method is used, i.e., normal modes of interest have been traced separately through the parameter space. In the IPM, each normal mode is evaluated by an iterative procedure initialized from the solution corresponding to a previous value of a parameter. For the sake of convenient reference, such procedure, design for the complex eigenvalue problem $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, can be summarized as follows.

Inverse Power Method

Having the approximate eigenvalue $\tilde{\lambda}$, set the normalized vector $\mathbf{x}^0$, the complex number $\delta^0 = 0$, and perform the following computations ($k = 0, 1, \dots$):

1. Solve the linear system $(\mathbf{M} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{x}^k$
2. Find the normalization factor δ^{k+1} , i.e., such (usually complex) number that the vector $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{z}^{k+1} / \delta^{k+1}$ is normalized
3. Check convergence: if $|\delta^{k+1} - \delta^k| / |\tilde{\lambda}| \leq \varepsilon$ then calculate the eigenvalue $\lambda = \tilde{\lambda} + \delta^{k+1}$, the vector $\mathbf{x}^{k+1}$ is the associated (and normalized) eigenvector; otherwise go back to the step 1.

Note that the particular form of the normalization used in the IPM is not important, except it should uniquely fix both the magnitude and the phase of a complex vector $\mathbf{x}^{k+1}$.

The Inverse Power Method can be applied directly to the reduced system (3.36), but in view of the above mentioned cost of the re-generation of the block matrix in (3.36) it is actually much more efficient to apply the IPM directly to the original system (3.26). The key ingredient of the computational procedure is the efficient solver of the relevant linear system

(step 1 of the IPM). To this aim, assume that $(\sigma_0; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{p})$ is the available approximation of a selected normal mode. Then the linear system solved in each iteration step of the IPM is

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\sigma \mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{q} = \mathbf{u}_1, \\ \mathbf{C}_\sigma \mathbf{w}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{q} = \mathbf{u}_2, \\ \mathbf{C}_\sigma \mathbf{w}_3 + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{w}_2 + i\beta \mathbf{D}_3 \mathbf{q} = \mathbf{u}_3, \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{w}_2 + i\beta \mathbf{E}_3 \mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.37)$$

where $\mathbf{C}_\sigma = i\beta \mathbf{A} - \frac{1}{\text{Re}}(\mathbf{K} - \beta^2 \mathbf{I}) - i\sigma_0 \mathbf{I}$. The exact solution of (3.37) can be found in three steps as follows:

1) solve the linear systems

$$\mathbf{C}_\sigma \hat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{C}_\sigma \hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{C}_\sigma \hat{\mathbf{w}}_3 = \mathbf{u}_3$$

2) solve the linear system

$$\mathbf{S} \mathbf{q} = \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{E}_2 \hat{\mathbf{w}}_2 + i\beta \mathbf{E}_3 \hat{\mathbf{w}}_3$$

$$\text{where } \mathbf{S} = \mathbf{E}_1 \mathbf{H}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3$$

$$\text{and } \mathbf{H}_1 = \mathbf{C}_\sigma^{-1} \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{C}_\sigma^{-1} \mathbf{D}_2, \quad \mathbf{H}_3 = -\beta \mathbf{C}_\sigma^{-1} [\beta \mathbf{D}_3 + i(\mathbf{B}_1 \mathbf{H}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{H}_2)]$$

3) solve the linear systems

$$\mathbf{C}_\sigma \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{q}, \quad \mathbf{C}_\sigma \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{q}, \quad \mathbf{C}_\sigma \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{B}_1 \mathbf{w}_1 - \mathbf{B}_2 \mathbf{w}_2 - i\beta \mathbf{D}_3 \mathbf{q}$$

4. Discussion of obtained results

4.1. Forms of the wall corrugation

In this section, we discuss the results of the computations of the main flow and its linear stability analysis. The discussion concerns two kinds of the transversely oriented wall corrugation defined in the Section 2.2. More specifically, the wall corrugation has sinusoidal shape and can be applied symmetrically to both bottom and top walls

$$y_t(x) \equiv h(x) = 1 + S \cos(M\pi x / L) = -y_b(x) \quad (4.1)$$

or just to the top wall, while the bottom wall remains flat

$$y_t(x) \equiv h(x) = 2 + S \cos(M\pi x / L), \quad y_b(x) \equiv 0 \quad (4.2)$$

The value of the corrugation amplitude S is assumed positive for odd values of M and negative for even values of M . It means that the height of the sidewalls is the smallest possible, i.e., it is equal $2 - 2|S|$ for the symmetric waviness and or it is equal $2 - |S|$ for the one-sided waviness.

4.2. Properties of the main flow

The most characteristic feature of the flow through the channel with the bottom and top walls corrugated accordingly to the formulae (4.1) or (4.2) is strong spanwise modulation of the velocity field. For the symmetric corrugation (4.1), this effect is illustrated in the Figure 5, where the velocity profile across the channel is shown. Different solid lines correspond to a different number M of the corrugation periods across the bottom and top walls. The aspect ratio of the channel is equal $L = 10$ and the corrugation amplitude $S = 0.4$. The reference velocity profile of the flow through the rectangular channel is presented by the dashed line.

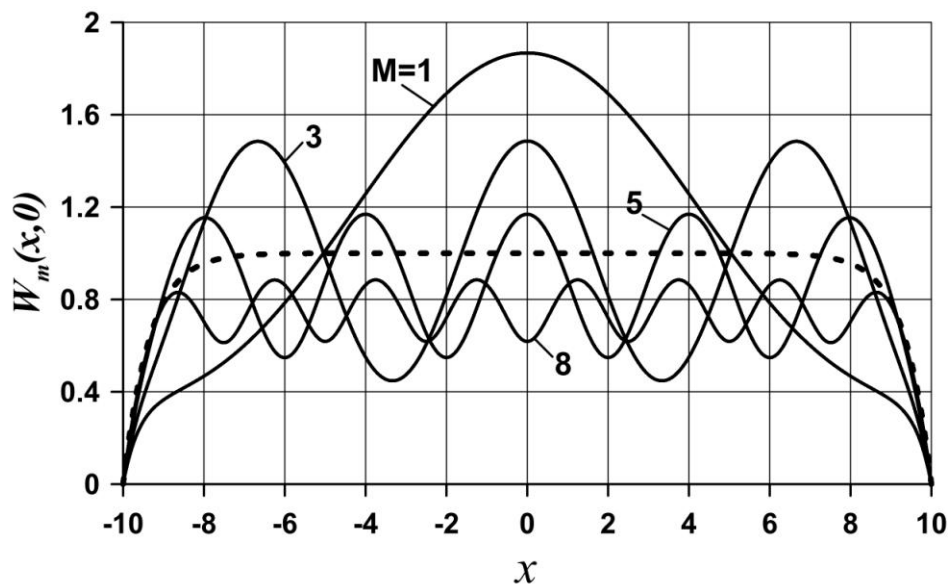


Figure 5. Main flow velocity distribution across the channel with symmetrically corrugated walls, computed in the symmetry plane $y = 0$. Each line corresponds to a different number M of the corrugation periods. The velocity profile of the flow in the reference rectangular channel is depicted by the dashed line. The geometric parameters are $L = 10$ and $S = 0.4$

The velocity field of the main flow in the symmetrically corrugated channel with $L = 10$, $M = 5$ and $S = 0.4$ has been shown also by the contour map in the Figure 6a. The flow through the channel with the same value of the aspect ratio L and the number of the corrugation

periods M , but with the one-sided wall corrugation (4.2) with the amplitude $S = 0.8$, is shown in the Figure 6b.

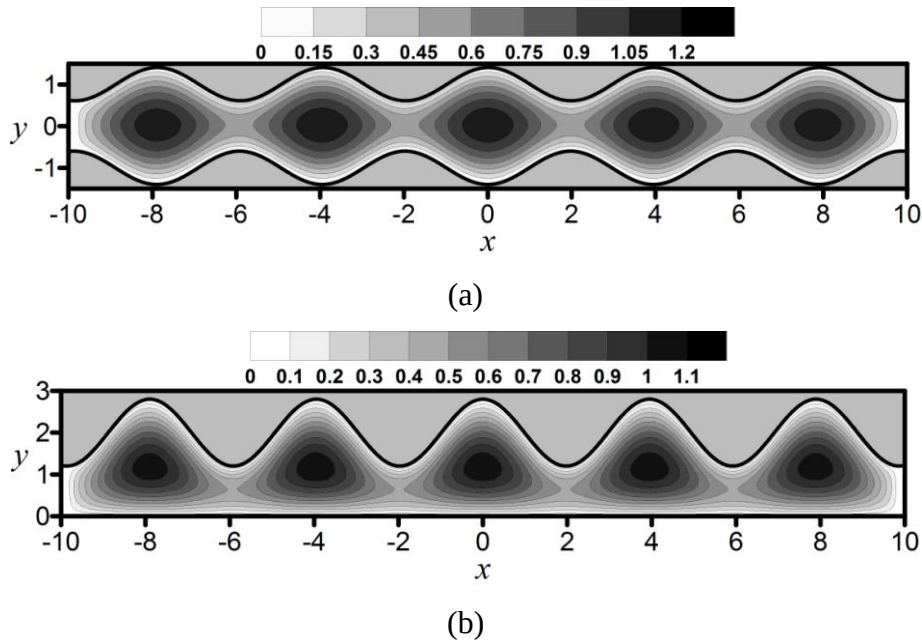


Figure 6. Contour maps of the main flow velocity magnitude computed for the channel with the aspect ratio $L = 10$ and: (a) symmetric corrugation with $M = 5$ and $S = 0.4$, (b) one-sided corrugation with $M = 5$ and $S = 0.8$

Strong modulation of the flow velocity in the transversal direction, as well as the presence of inflection points is evident from all these plots. It can be also observed for short-wave corrugations, i.e., corresponding to larger values of M (like $M = 8$), that the modulation amplitude and the average value of the flow velocity are visibly smaller. This effect translates directly to the reduction of the flow rate or – equivalently – to the rise of hydraulic resistance. On the other hand, if the wavelength of the wall corrugation rises then the flow resistance drops and for sufficiently large wavelength (small values of M) it becomes smaller than for the rectangular channel of the same aspect ratio. This effect is demonstrated in the Figures 7a and 7b, respectively, for the symmetric and one-sided wall corrugation. The aspect ratio of the channel section is $L = 10$. It can be concluded from the Figure 7a that the sinusoidal symmetric wall corrugation (4.1) diminishes the flow resistance in such channel as long as the number of corrugation periods M is not larger than 4. The gain in the flow rate computed for $M = 1$ and the amplitude $S = 0.5$ is the largest and exceeds by 40% the flow rate in the rectangular channel with the same aspect ratio! On the other hand, using corrugation with shorter periods (M larger than 4) leads to the flow rate reduction, i.e., the flow resistance increases. In particular, for $M = 8$ and the amplitude $S = 0.5$, the flow rate

drops under 70% of the flow rate in the rectangular channel. In case of one-sided wall corrugation the effect is similar, however, the “neutral” number of the corrugation periods M seems to be shifted a bit into longer wavelengths: the corrugation with $M = 4$ causes now a slight increase rather than reduction of the flow resistance. More details about the impact of the transversely oriented wall corrugation on the hydraulic resistance of the channel flow have been provided in the other recent paper [27] by the same authors. Also, it should be noted that the relation between the flow resistance and the number of the corrugation periods M (or the corrugation wavelength) is generally consistent with the earlier author’s findings concerning the flow through the spanwise-periodic channel (see [22]).

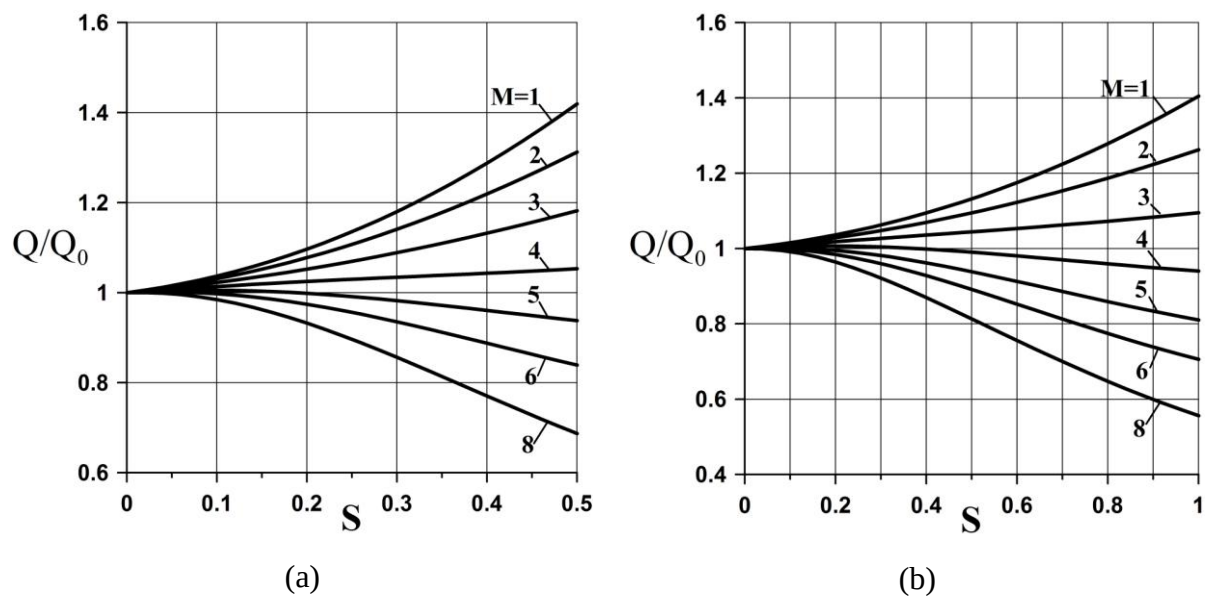


Figure 7: The effect of transversal wall corrugation on the hydraulic resistance of the main flow. The ratio of the volumetric flow rate to the flow rate of the reference rectangular channel is plotted versus the amplitude S of the corrugation. The aspect ratio of the channel’s section is $L = 10$. Lines in the plot correspond to a different number M of the corrugation periods. Two cases are shown: (a) symmetric corrugation and (b) one-sided corrugation.

4.3. Linear stability characteristics

In this section, the results of the linear stability analysis are presented. The investigation is focused mostly on the stability properties of the flow in the channels with large aspect ratios: the considered cases are $L=10$ and $L=20$. The stability analysis has been conducted numerically in the following order. First, the normal modes most susceptible for amplification by transversely oriented wall corrugation have been identified. Next, the range of the

streamwise wave number β corresponding to the unstable normal mode has been determined for a different number M of the corrugation periods across the channel. The analysis has been concluded by the calculation of the neutral stability curves in the $\text{Re} - \beta$ plane and determination of sample flow patterns.

For sufficiently large aspect ratios, the low-Reynolds-number instability can be expected in roughly the same region of the parameter space as it was found for the flow in the periodic channel. It has been demonstrated in [21] and [22] that the unstable normal mode of the periodic channel's flow is related to the particular Squire mode from the Poiseuille spectrum. The wave vector of this mode is $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z] = [0, 0, \beta]$. The values of the streamwise wavenumber β corresponding to the mode most susceptible for destabilization has been computed to be around 0.4 and the most destabilizing wavelength of the periodic wall corrugation is about 3 times larger than the average channel's height.

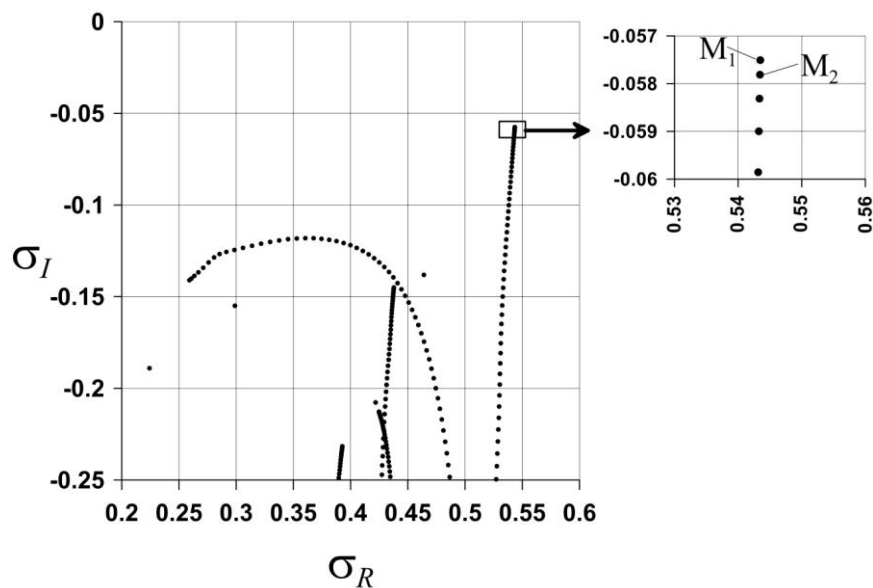


Figure 8. Eigenvalues (complex frequencies) associated to the normal modes of the flow in the rectangular channel. Only the modes with $\sigma_I \geq -0.25$ are shown. The channel's section aspect ratio is $L = 20$, the Reynolds number is $\text{Re} = 100$ and the streamwise wave number is $\beta = 0.6$. The eigenvalues corresponding to the normal modes which are the most susceptible to destabilization by transversely oriented wall corrugations are indicated in the zoomed part of the plot.

The stability analysis of the flow in the corrugated channel with sidewalls has confirmed the expected parametric localization of the instability region. In particular, the complex frequencies of the normal modes, which are most susceptible for the low-Re destabilization

by wall deformation, have been identified in the analogous part of spectrum of the rectangular channel's flow. These frequencies, computed for $L = 20$, $\beta = 0.6$ and $Re = 100$, are indicated in the plot presented in the Figure 8. It has been found that the attenuation rates of the corresponding normal modes can be extremely sensitive to the wall corrugation described by (4.1) or (4.2), especially for appropriately chosen number M of the corrugation periods. Plots in the Figure 9 illustrate this effect for the flow in the channel with the aspect ratio $L = 20$ and the Reynolds number $Re = 100$. The plots in the Figure 9a have been computed for the symmetric wall corrugation with $M = 9$ and the streamwise wave number $\beta = 0.6$. It can be observed that the mode M_1 becomes unstable when the amplitude S exceeds the value of 0.23. For S larger than 0.27 also the mode M_2 is unstable. Both modes remain unstable for the corrugation amplitudes rising up to 0.5, however the largest amplification rate is attained at $S = 0.425$ and then slowly diminishes. Similar features are observed in the Figure 9b where the analogous results obtained for one-sided corrugation with $M = 8$ are presented. This time the streamwise wave number is $\beta = 0.5$. The mode M_1 losses stability when the amplitude S becomes larger than 0.46, i.e., the amplitude is doubled in comparison with symmetric corrugation. The second mode M_2 becomes unstable when the amplitude S is larger than 0.62. Similarly to the symmetric case, the amplification rate σ_I of both modes attains the maximum at nearly the same value of the corrugation amplitude, i.e., when $S = 0.75$. For larger amplitudes the amplification rate slowly diminishes and for the mode M_2 is becomes negative (i.e., this mode is stable again) when S is larger than 0.86.

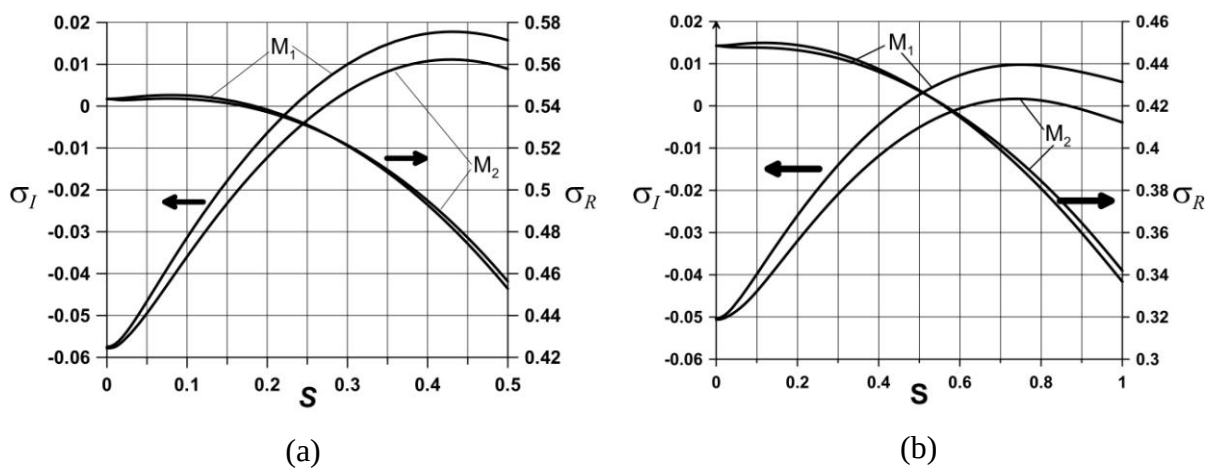
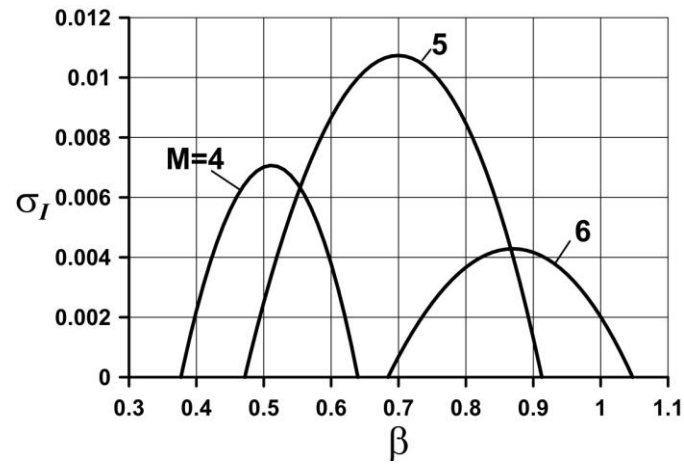


Figure 9. Complex frequency of two most amplified normal modes plotted versus the amplitude S : (a) symmetric corrugation with $M = 9$ wavelengths across the channel, (b) one-sided corrugation with $M = 8$ wavelengths across the channel. In both cases, the aspect ratio is $L = 20$ and the Reynolds number is $Re = 100$. The streamwise wave number is: (a) $\beta = 0.6$, (b) $\beta = 0.5$.

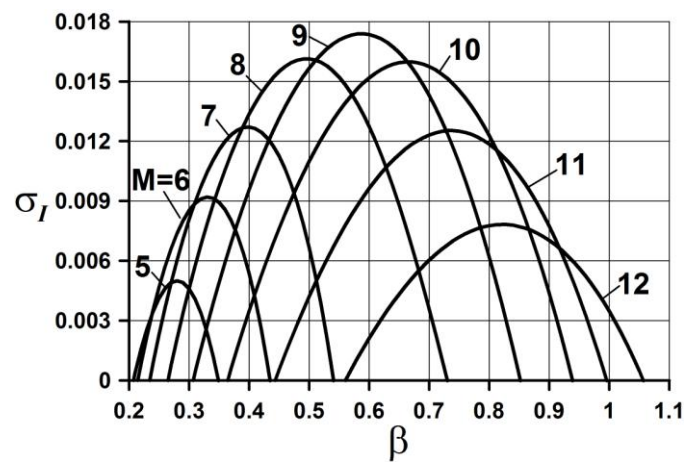
In both cases of the wall corrugation the unstable modes have nonzero real parts of their complex frequencies, i.e., they have the form of travelling disturbance waves. The phase speed of the disturbance wave (defined by the ratio σ_R/β) is nearly the same for both modes irrespectively to the variant of the corrugation. This speed generally diminishes with the corrugation amplitude S (except for the small values of S where the slight increase of σ_R can be noticed). For the rectangular channel ($S=0$) the phase speed of both modes is close to 0.9, while in the conditions of the maximal corrugation considered it drops to the value of 0.75 in the symmetric case and 0.68 in the one-sided case. In such conditions the disturbances described by the mode M_2 travel along the channel slightly faster than those corresponding to the mode M_1 .

In the remaining part of this section, the parametric study of the stability characteristics of the most amplified mode M_1 is conducted. The parametric variation of the amplification rate of this mode σ_I with respect to the streamwise wave number β has been presented in the Figure 10. All plots have been obtained for the Reynolds number $Re = 100$. The plot 10a has been computed for the channel's aspect ratio $L = 10$ and symmetric corrugation with the amplitude $S = 0.4$. In can be seen that the strongest destabilization effect is achieved when $M = 5$. This corresponds to the corrugation period larger twice than the average height of the channel. The most amplified mode has the streamwise wave number equal $\beta = 0.7$. Other values of M which can destabilize the flow at the Reynolds numbers $Re=100$ are also shown. The following rule is evident: the corrugation with longer/shorter period (smaller/larger M) destabilizes mostly the mode with longer/shorter wavelength (smaller/larger streamwise wavenumber β). This property is similar to the one discovered for the flow in the periodic channel and described in [21] and [22].

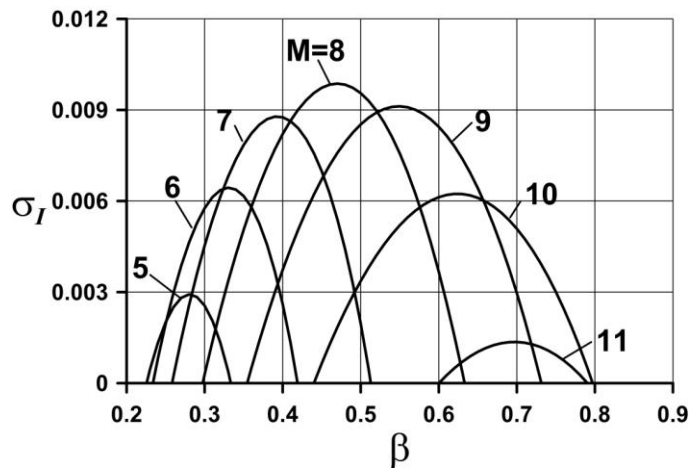
When the aspect ratio of the channel is increased to $L = 20$ then one obtains the results shown in the Figure 10b. Now, the most destabilizing geometry correspond to $M = 9$. It means that the wavelength of the optimal corrugation is larger than for $L = 10$. At the same time, the amplification rate assumes larger values. Moreover, the wall corrugations with the number of periods equal $M = 6$ or $M = 12$ also lead to flow destabilization, while their counterparts for $L = 10$, i.e., $M = 3$ and $M = 6$ do not. This effect is evidently due to the fact that the influence of the sidewalls is being reduced with increasing aspect ratio.



(a)



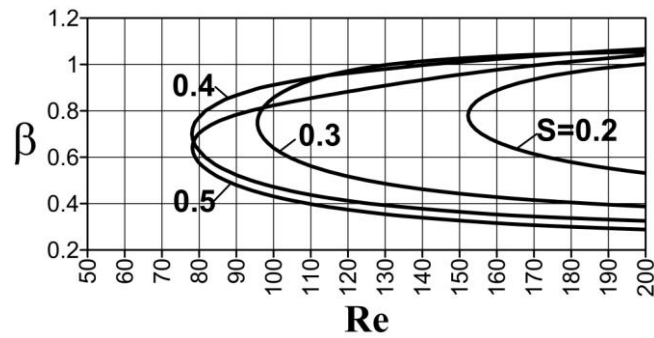
(b)



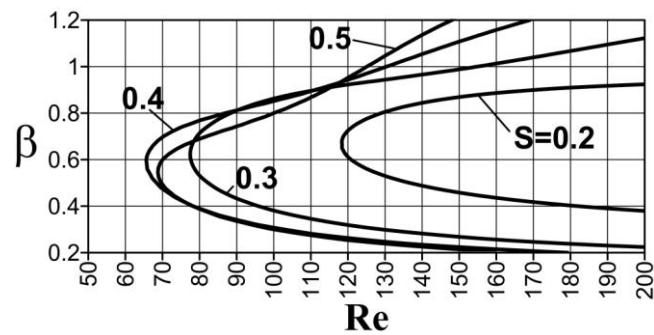
(c)

Figure 10. Amplification rate σ_I of the unstable normal mode plotted versus the streamwise wavenumber β . The Reynolds number is $Re=100$. Each line corresponds to a different number M of the corrugation periods across the channel. Three cases are shown: (a) $L=10$, symmetric corrugation with $S=0.4$, (b) $L=20$, symmetric corrugation with $S=0.4$ and (c) $L=20$, one-sided corrugation with $S=0.8$.

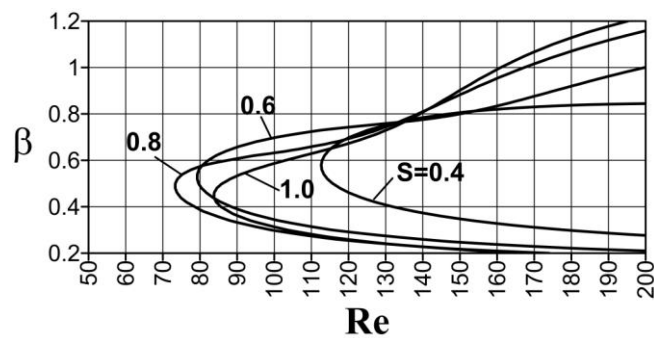
In the Figure 10c, the analogous results obtained for the one-sided wall corrugation with the amplitude $S = 0.8$ are presented. The strongest destabilization of the mode M_1 is obtained for the corrugation with $M = 8$, i.e., for the corrugation period larger than in the case of symmetric corrugation. The smaller values of the amplification rate are observed as it has been already mentioned. The range on unstable wave numbers β is generally shifted to the left, i.e., one-sided wall corrugation will tend to excite disturbances with larger wavelength.



(a)



(b)



(c)

Figure 11. Neutral stability lines plotted in the plane $Re - \beta$ and computed for different values of the corrugation amplitude S . Three cases are shown: (a) $L=10$ and symmetric corrugation, (b) $L=10$ and symmetric corrugation and (c) $L=20$ and one-sided corrugation.

The results of the linear stability analysis can be conveniently summarized in the form of the neutral stability lines (NSL) in the $Re-\beta$ plane. Along these lines the amplification factor of the most amplified mode is zero. In the Figure 11a, the NSL computed for the flow in the channel with the aspect ratio $L = 10$ and the symmetric wall corrugated with $M = 5$ are shown. Each line has been determined for a different value of the corrugation amplitude S . The regions inside the NSL correspond to linearly unstable flows and the turning point corresponds to the critical conditions. It can be noticed that the minimal value of the critical Reynolds number computed for $S = 0.4$ and $S = 0.5$ is nearly the same and equal about 78.

If the aspect ratio of the channel's section is increased to $L = 20$ and the number of corrugation periods is $M = 9$, then the NSL assume the shape shown in the Figure 11b. It can be noticed that the amplitude $S = 0.4$ is the most destabilizing among the considered geometries. The critical Reynolds number drops to 65 which is not far away from 58 obtained in [22] for the channel of infinite width. The critical value of the streamwise wave number β is close to 0.6.

In the Figure 11c, the neutral stability lines computed for the channel with the aspect ratio $L = 20$ and the one-sided wall corrugation with $M = 8$ are presented. The corrugation amplitudes have been chosen to be doubled amplitudes from the Figure 9b. Comparison to the symmetric case leads to the conclusion that one-sided corrugation is generally less effective in destabilizing the flow. The lowest value of the critical Reynolds number has been obtained for $S = 0.8$ and it is equal about 74. The critical value of the streamwise wave number β is approximately equal 0.48.

Finally, we will discuss shortly the flow disturbance patterns related to the unstable normal modes M_1 and M_2 . We consider only the case of the channel with the aspect ratio $L = 20$ and symmetric wall corrugation. The Reynolds number is $Re = 100$ and the streamwise wave number is $\beta = 0.6$. The velocity field of the disturbances, corresponding to the normal mode M_1 and evaluated in the channel's central plane $y = 0$, is shown in the Figure 12. The upper vector plot (a) presents the velocity field of the mode M_1 computed for the flow in the rectangular channel ($S = 0$), while the bottom vector plot (b) shows the velocity pattern of the same mode computed for the corrugated channel with the amplitude $S = 0.4$.

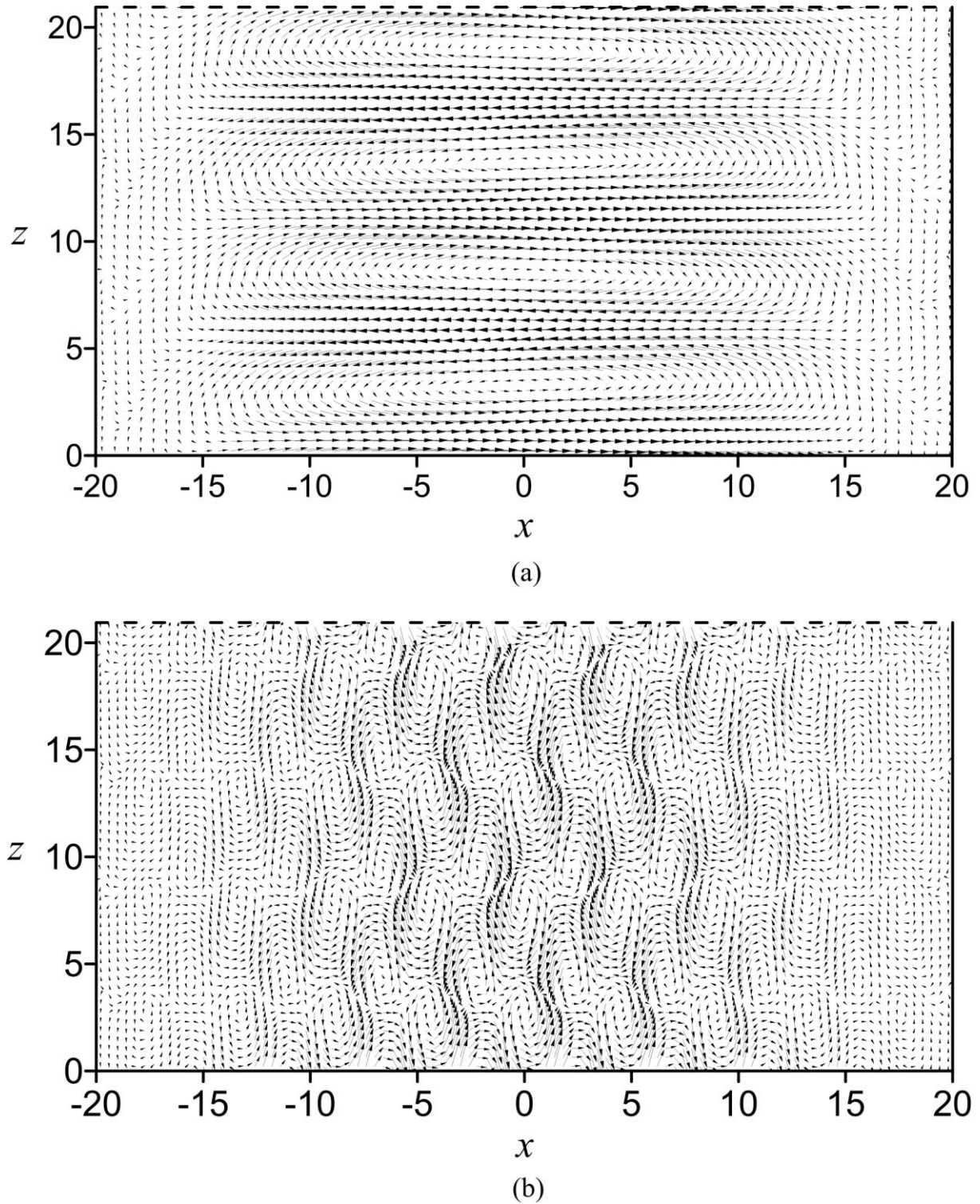


Figure 12. The velocity field of the most amplified normal mode M_1 evaluated in the plane $y = 0$ for the rectangular (a) and symmetrically corrugated (b) channels. The aspect ratio is $L = 20$ and the corrugation parameters are $M = 9$ and $S = 0.4$. In both cases, the Reynolds number is $Re = 100$ and the streamwise wave number is $\beta = 0.6$.

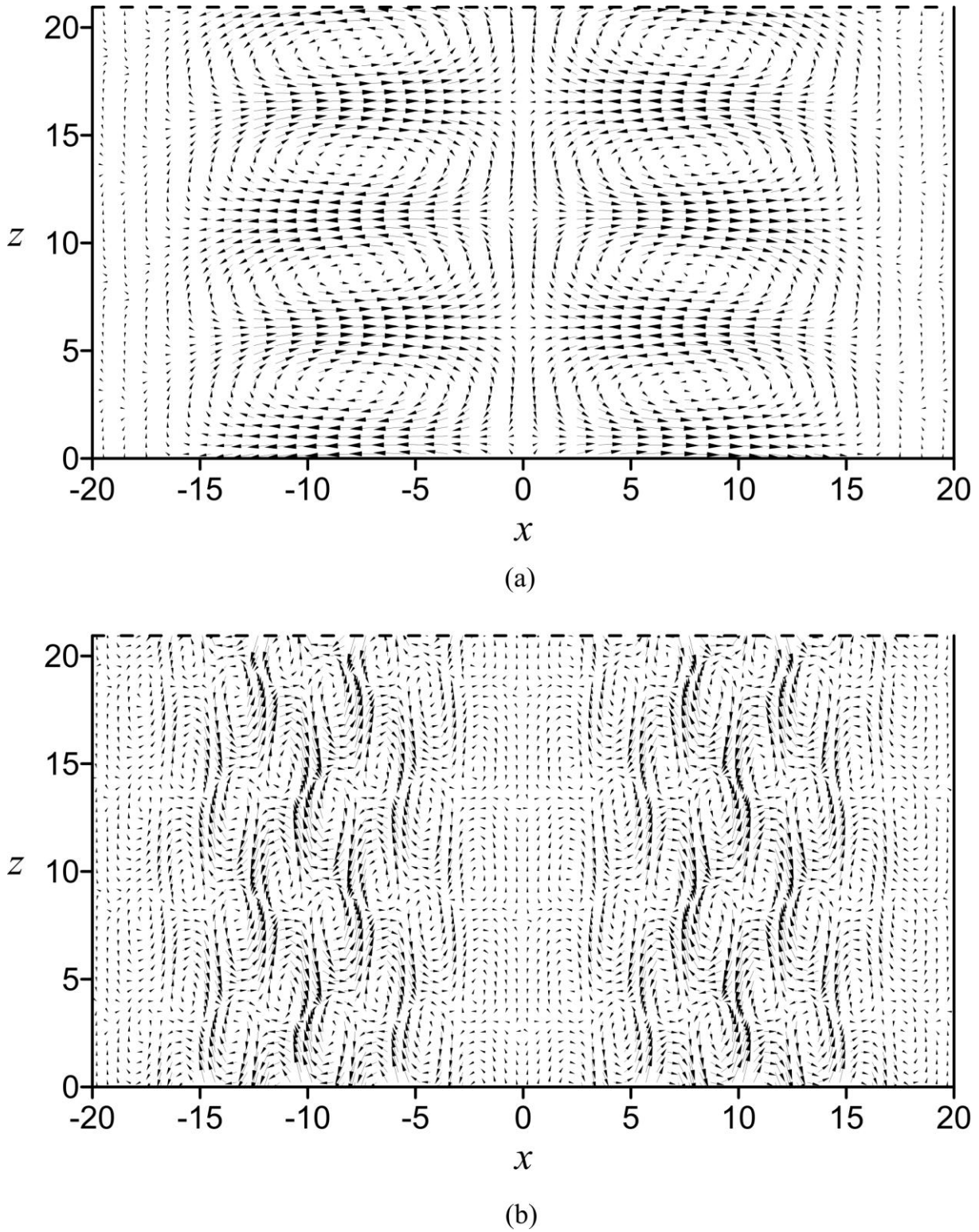


Figure 13. The velocity field of the second most amplified normal mode M_2 evaluated in the plane $y = 0$ for the rectangular (a) and symmetrically corrugated (b) channels. All settings like in the Figure 12

It should be noted that away from the sidewalls both patterns of disturbances are very much similar to the disturbance field of the unstable Squire mode in the infinite channel, see [21]

and [22]. If there is no sidewalls and no corrugation ($S = 0$), then the only nonzero component of the velocity disturbance field is the x -component, i.e., the component along the spanwise direction. In the presence of the sidewalls, i.e., in the rectangular channel, such form of disturbances is obviously impossible and the flow turns around in the vicinity of the sidewalls giving rise to a characteristic pattern of a circular motion shown in the Figure 10a. When the wall corrugation is present then the characteristic array of vortices appears. Again, at the lack of the sidewalls, this pattern is periodic in both streamwise (z) and spanwise (x) directions. In the channel with sidewalls, the spanwise periodicity is lost and the magnitude of disturbance diminishes while the sidewalls are approached.

In the Figure 13, the analogous vortex maps are shown for the second unstable mode M_2 . All parameters are the same as in the Figure 12. In contrast to the mode M_1 , the flow pattern of the mode M_2 does not have any direct counterpart in the flow through the periodic channel. The mode M_2 has an extra symmetry plane $x = 0$, in all other respects the flow pattern in the corrugated channel is similar to the mode M_1 . It should be noted that the normal modes with multiply symmetry planes parallel to the plane $x = 0$ can also exist if the number of the corrugation periods are sufficiently large. These modes are, however, attenuated for the low Reynolds numbers, which are of the main interest in this study.

Summary and conclusions

The instability of the laminar channel flow induced by the transversely-oriented wall corrugation, either symmetric or one-sided, has been investigated numerically. In contrast to earlier works, the channel width is assumed finite, i.e., the flat sidewalls are present. Both the main flow and the field of flow disturbances are approximated with spectral accuracy by means of Galerkin projection method. The calculations are conducted in the transformed computational domains, where the boundary conditions are satisfied exactly. This approach has allowed for investigation of the wall corrugations with large amplitudes. The unstable normal modes have been identified and their parametric variation has been determined. The lines of neutral stability (the critical lines) have been computed numerically for selected cases of the wall corrugation. The patterns of disturbance velocity field corresponding to a pair of the most amplified normal modes have been determined.

The main conclusions from this research can be summarized as follows:

- The transversal corrugation of the channel walls can be used to destabilize the flow in the rectangular channel at the Reynolds number lower than 100. The shape of the corrugation which is appropriate for this purpose has only marginal influence on the flow resistance. This property makes the transversal corrugation more attractive than the longitudinal one, where significant increase of the pressure losses is inevitable.
- For sufficiently large aspect ratios, the influence of the sidewalls is weak and the stability properties of the flow do not differ much from characteristics obtained by Szumbarski in [22] for the flow through periodic channel.
- The most destabilizing form of the sinusoidal wall corrugation is the symmetric one, but its wavelength is smaller and the amplitude slightly larger than in the case of periodic channel. The destabilization effect brought about by the one-sided corrugation is comparable to the effect of symmetric corrugation providing that the amplitude of the former is twice as large.
- In both variant of the wall corrugation, the maximal effect of flow destabilization (i.e., the largest value of the amplification rate of the most unstable normal mode) is achieved for a certain optimal value of the corrugation amplitude. For the Reynolds number $Re = 100$ the optimal value has been estimated to be about 22% and 38% of the averaged height of the channel for the symmetric and one-sided case, respectively.
- The critical Reynolds number of the flow diminishes with increasing aspect ratio of the channel's section approaching asymptotically the value corresponding to the periodic channel. For the aspect ratio $L=10$ Re_L is equal 78, but for $L=20$ it drops to 64 which is close to the asymptotic value of 58 determined by Szumbarski [22]. Since the destabilization effect of one-sided corrugation is weaker, the corresponding value of Re_L is larger, i.e., it is equal 74 for the aspect ratio $L=20$.
- Similarly to the flow in the periodic channel, the most unstable mode has the form of the streamwise periodic array of the counter-rotating vortex structures. The spanwise periodicity is lost for obvious reasons and the magnitude of the flow disturbance near the sidewalls is small due to the no-slip condition. The unstable modes have the form of traveling waves which means that after the nonlinear saturation process the flow field will be fully three-dimensional and oscillatory. Further investigations, including direct numerical simulations, are necessary to find out whether these qualities are sufficient to achieve conditions of effective mixing.

Acknowledgements

This investigation was supported by the Polish Ministry of Science and Education under the project “*Enhancement of the mixing process in micro-flows*”, grant No. N501008733.

References

- [1] Goldstein J.L., Sparrow E.M., 1977: Heat-mass transfer characteristics for flow in a corrugated wall channel. *Journal of Heat Transfer*, 99, pp. 187-195.
- [2] Sobey I.J., 1980: On flow through furrowed channels. Part 1: Calculated flow patterns. *Journal of Fluid Mechanics* 96, pp. 1-26.
- [3] Stephanoff K.D., Sobey I.J., Bellhouse B.J., 1980: On flow through furrowed channels. Part 2: Observed flow patterns. *Journal of Fluid Mechanics* 96, pp. 27-32.
- [4] Nishimura T., Murakami S., Arakawa S., Kawamura Y., 1990: Flow observations and mass transfer characteristics in symmetrical wavy-walled channels at moderate Reynolds number for steady flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 33, pp. 835-844.
- [5] Nishimura T., Arakawa S., Murakami S., Kawamura Y., 1989: Oscillatory viscous flow in symmetric wavy-wall channels. *Chemical Engineering Science*, 44, pp. 2211-2224.
- [6] Nishimura T., Kawamura Y., 1995: Three-dimensionality of Oscillatory Flow in a Two-dimensional Symmetric Sinusoidal Wavy-Walled Channel. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 10, pp. 62-73.
- [7] Nishimura T., Yoshino T., Kawamura Y., 1987: Numerical flow analysis of pulsatile flow in a channel with symmetric wavy walls at moderate Reynolds numbers. *J. Chem. Eng. Jpn.*, 20, pp. 479-485.
- [8] Nishimura T., Kojima N., 1995: Mass transfer enhancement in a sinusoidal wavy-walled channel for pulsatile flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38, pp. 1719-1731.
- [9] Wang G., Vanka S.P., 1995: Convective heat transfer in periodic wavy passages. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No. 17, pp. 3219-3230.
- [10] Ghaddar N., El-Hajj A., 2000: Numerical Study of Heat Transfer Augmentation of Viscous Flow in Corrugated Channels. *Heat Transfer Engineering*, 21, pp. 35-46.

- [11] Niceno B., Nobile E., 2001: Numerical analysis of fluid flow and heat transfer in periodic wavy channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 22, pp. 156-167.
- [12] Cho K.J., Kim M., Shin H.D., 1998: Linear stability of two-dimensional steady flow in wavy-walled channel. *Fluid Dynamic Research*, 23, pp. 349-370.
- [13] Blancher S., Creff R., Le Quere P., 1998.: Effect of Tollmien-Schlichting wave on convective heat transfer in a wavy channel. Part I: Linear Analysis. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19, pp. 39-48.
- [14] Blancher S., Creff R., Le Quere P., 2004: Analysis of convective hydrodynamic instabilities in a symmetric wavy channel. *Physics of Fluids*, 16, No. 10, pp. 3726-3737.
- [15] Szumbariski J., 2002: Immersed boundary approach to stability equations for a spatially periodic viscous flow. *Archives of Mechanics*, 3, 54, 199-222.
- [16] Cabal A., Szumbariski J., Floryan J.M., 2002: Stability of flow in a wavy channel. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 457, pp.191-212.
- [17] Floryan J.M., 2003: Vortex instability in a diverging-converging channel. *J. Fluid. Mech.*, vol. 482, pp. 17-50.
- [18] Viswanath P.R., 2002: Aircraft viscous drag reduction using riblets. *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 38, pp. 571-600.
- [19] Boiko A.V., Grek G.R., Dovgal A.V., Kozlov V.V.: *The Origin of Turbulence in Near-Wall Flows*. Springer-Verlag, 2002.
- [20] Ehrenstein U., 1996: On the linear stability of channel flow over riblets. *Physics of Fluids* 8 (11), pp. 3194-3196.
- [21] Szumbariski J.: *Instability of a viscous liquid flow in a corrugated channel* (in Polish, the habilitation thesis). Published by Warsaw University of Technology. Warszawa, 2007.
- [22] Szumbariski J.: Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45, 3, pp. 659-683, 2007.
- [23] Blonski S., Szumbariski J., Kowalewski T.A.: Low-Reynolds-number instability of the laminar flow between wavy walls. Paper in the Proceedings of the Sixth International ASME Conference on Nanochannels, Microchannels and Minichannels (ICNMM2008), June 23-25, 2008, Darmstadt, Germany.
- [24] Tatsumi T., Yoshimura T.: Stability of the laminar flow in a rectangular duct. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 212, pp. 437-449, 1990.

- [25] Szumbariski J.: Stability analysis of a laminar viscous flow in the finite-span wavy channel. European Fluid Mechanics Conference EFMC-8, Bad Reichenhall, September 13-16 2010.
- [26] Saad Y., 1992: Numerical methods for large eigenvalue problems. Manchester University Press.
- [27] Szumbariski J., Blonski S., Kowalewski T.A.: On the impact of transversely-oriented wall corrugation on hydraulic resistance of a laminar channel flow. Submitted to Archives of Mechanical Engineering, 2010.

ZAŁĄCZNIK NR 6: Nieliniowa ewolucja pola zaburzeń w przepływie.

1. Wstęp

Posługując się metodami liniowej teorii stateczności można określić początkowy etap rozwoju małych zaburzeń w przepływie. Wyznaczane są specjalne postacie pola zaburzeń zwane modami normalnymi (są to rozwiązania własne zlinearyzowanego operatora ewolucji pola zaburzeń) charakteryzujące się tym, że ich wielkość zmienia się w czasie wykładniczo. Obliczane są również warunki krytyczne, przede wszystkim krytyczna liczba Reynoldsa. Dla liczb Reynoldsa wyższych niż wartość krytyczna istnieją zaburzenia o dowolnie małej amplitudzie, które rosną w czasie wykładniczo. Innymi słowy, przepływ w liczbą Reynoldsa wyższą niż jej wartość krytyczna jest niestabilny absolutnie, tj. istnieje forma zaburzeń wywołującą permanentną zmianę formy przepływu bez względu na swoją początkową wielkość.

Wprowadzenie do przepływu małych zaburzeń o eksponencjalnym wzroście (wg teorii liniowej) musi prowadzić dla dużych czasów do nowej formy ruchu, który jednak nie może być określony wyłącznie na podstawie teorii liniowej. Proces „saturacji” zaburzenia jest inherentnie nieliniowy i polega na powstaniu takiego stanu przepływu, w którym „wzbudzone” są wszystkie mody normalne, a proporcje ich udziału w nowej formie ruchu zależą od szczegółów nieliniowej interakcji pomiędzy nimi. Istotną zaletą opisu procesu nieliniowej saturacji przy pomocy modów normalnych jest to, że interakcja poszczególnych modów z przepływem głównym jest wyjątkowo prosta i sprowadza się do zmiany w czasie amplitudy każdego modu. Własność ta wynika oczywiście z faktu, że mody normalne są funkcjami własnymi zlinearyzowanego operatora ewolucji pola zaburzeń.

Nieliniowa ewolucja zaburzeń o skończonej wielkości może być opisana w sposób przybliżony za pomocą układu nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, w którym niewiadomymi są zależne od czasu amplitudy wybranych modów normalnych. Układ taki otrzymywany jest w wyniku standardowego postępowania polegającego na ortogonalizacji residuum wyjściowego równania różniczkowego cząstkowego względem podprzestrzeni rozpiętej przez użyty w analizie zbiór modów normalnych. Szczegółowy opis tej procedury podajemy w następnym punkcie.

2. Nieliniowy model pola zaburzeń o skończonej wielkości

Punktem wyjścia rozważań jest układ równań opisujących ewolucję pola zaburzeń. Jeśli symbolem $\mathbf{V}$ oznaczyć pole prędkości przepływu niezaburzonego główny, to układ ten można zapisać następująco

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

Pierwsze w równań układu to równanie ruchu, które wynika z tego, że zarówno pole prędkości przepływu głównego jak i przepływ zaburzony spełniają równanie Naviera-Stokesa. Drugie równanie to warunek ciągłości pola prędkości zaburzeń.

Przyjmijmy, że w procesie analizy stateczności liniowej przepływu głównego wyznaczone zostały mody normalne. W zagadnieniu przepływowym stanowiącym przedmiot analizy w

projekcie mody te są okresowe względem zmiennej przestrzennej z . Zakładamy, że liczby falowe modów normalnych są równe dowolnej całkowitej wielokrotności liczby podstawowej β , która określa okres geometryczny pola zaburzeń w kierunku osi Oz (jest to kierunek przepływu niezaburzonego).

Celem dalszego postępowania jest otrzymanie przybliżonego opisu ewolucji pola zaburzeń wykorzystującego skończoną (i najlepiej niewielką) liczbę modów. Założymy, że dla każdej liczby całkowitej k został wybrany skończony ciąg modów normalnych z liczbą falową $\beta_k = k\beta$. Oznaczmy te mody symbolami $(\mathbf{w}_{k,\alpha}, \pi_{k,\alpha})$, $\alpha = 1, \dots, N(k)$. Pierwszy z symboli w nawiasie to zespolone pole wektorowe opisujące pole prędkości modu, natomiast drugi symbol to zespolone pole skalarne opisujące rozkład zaburzeń ciśnienia. Zakładamy przy tym, że $N(-k) = N(k)$. Każdy z wybranych modów może być zapisany w postaci

$$(\mathbf{w}_{k,\alpha}, \pi_{k,\alpha}) = (\hat{\mathbf{w}}_{k,\alpha}(x, y) \exp(ik\beta z), \hat{\pi}_{k,\alpha}(x, y) \exp(ik\beta z)) \quad (3)$$

gdzie symbolami z daszkiem oznaczono zespolone amplitudy pola zaburzeń prędkości i ciśnienia.

Nietrudno pokazać, że mody normalne zagadnienia przepływowego omawianego w Załączniku nr 5 mają następujące własności

- $\hat{\mathbf{w}}_{-k,\alpha} = \hat{\mathbf{w}}_{k,\alpha}^*$, a w konsekwencji $\mathbf{w}_{-k,\alpha} = \mathbf{w}_{k,\alpha}^*$ dla $\alpha = 1, \dots, N(k)$
- $\hat{\pi}_{-k,\alpha} = \hat{\pi}_{k,\alpha}^*$, a w konsekwencji $\pi_{-k,\alpha} = \pi_{k,\alpha}^*$ dla $\alpha = 1, \dots, N(k)$
- $\sigma_{-k,\alpha} = -\sigma_{k,\alpha}^*$

Przedstawmy pola zaburzeń prędkości i ciśnienia w postaci skończonej kombinacji liniowej modów normalnych ze zmiennymi czasie współczynnikami zespolonymi

$$\mathbf{v} = \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} a_{k,\alpha}(t) \mathbf{w}_{k,\alpha}(x, y, z) = \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} a_{k,\alpha}(t) \hat{\mathbf{w}}_{k,\alpha}(x, y) \exp(ik\beta z) \quad (5)$$

$$p = \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} a_{k,\alpha}(t) \pi_{k,\alpha}(x, y, z) = \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} a_{k,\alpha}(t) \hat{\pi}_{k,\alpha}(x, y) \exp(ik\beta z) \quad (6)$$

Zauważmy, że wobec własności (4) modów normalnych, pola zaburzeń prędkości i ciśnienia określone formułami (5) i (6) będą polami o wartościach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{-k,\alpha} = a_{k,\alpha}^* \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N(k) \quad , \quad |k| \leq K \quad (7)$$

Z rozważań przedstawionych w Załączniku nr 5 wynika, że mody normalne spełniają równania różniczkowe cząstkowe postaci ($\alpha = 1, \dots, N(k)$, $|k| \leq K$)

$$-i\sigma_{k,\alpha} \mathbf{w}_{k,\alpha} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{k,\alpha} + (\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \pi_{k,\alpha} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{w}_{k,\alpha} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_{k,\alpha} = 0 \quad (9)$$

Wobec równości (9), pole zaburzeń prędkości (5) spełnia tożsamościowo równanie ciągłości. Po podstawieniu wyrażeń (8) i (9) do równania (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} \left\{ a'_{k,\alpha} \mathbf{w}_{k,\alpha} + [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{k,\alpha} + (\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \pi_{k,\alpha} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{w}_{k,\alpha}] a_{k,\alpha} \right\} + \\ & + \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} \sum_m \sum_{\delta=1}^{N(m)} [(\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{m,\delta}] a_{k,\alpha} a_{m,\delta} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Po uwzględnieniu (8) równanie (10) upraszcza się do postaci

$$\sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} (a'_{k,\alpha} + i\sigma_{k,\alpha} a_{k,\alpha}) \mathbf{w}_{k,\alpha} + \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} \sum_m \sum_{\delta=1}^{N(m)} [(\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{m,\delta}] a_{k,\alpha} a_{m,\delta} = 0 \quad (11)$$

Zdefiniujemy następnie obszar trójwymiarowy w formie iloczynu kartezjańskiego

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, \Lambda_z] \quad , \quad \Lambda_z = 2\pi / \beta \quad (12)$$

W powyższej formule symbol Ω odpowiada obszarowi przekroju poprzecznego kanału, natomiast Λ_z to okres geometryczny pola zaburzeń. Zdefiniujemy również iloczyn skalarny zespolonych pól wektorowych wzorem

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot \mathbf{g}^*(x, y, z) dx dy dz \quad (13)$$

Skończenie wymiarowy układ dynamiczny otrzymamy żądając, aby lewa strona równania (11) była ortogonalna w sensie iloczynu skalarnego (13) do wszystkich pól zespolonych $\mathbf{w}_{j,\gamma}$, $\gamma = 1, \dots, N(j)$, $|j| \leq K$. Otrzymujemy w ten sposób nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne postaci

$$\sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} \langle \mathbf{w}_{k,\alpha}, \mathbf{w}_{j,\gamma} \rangle (a'_{k,\alpha} + i\sigma_{k,\alpha} a_{k,\alpha}) + \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} \sum_m \sum_{\delta=1}^{N(m)} \langle (\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{m,\delta}, \mathbf{w}_{j,\gamma} \rangle a_{k,\alpha} a_{m,\delta} = 0 \quad (14)$$

gdzie $|j| \leq K$, $\gamma = 1, \dots, N(j)$.

Równania (14) można również zapisać następująco

$$\sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} M_{j,\gamma;k,\alpha} a'_{k,\alpha}(t) = -i \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} \sigma_{k,\alpha} a_{k,\alpha}(t) - \sum_{(k)} \sum_{\alpha=1}^{N(k)} \sum_m \sum_{\delta=1}^{N(m)} C_{j,\gamma;k,\alpha;m,\delta} a_{k,\alpha}(t) a_{m,\delta}(t) \quad (15)$$

Wprowadzone wyżej symbole odpowiadają elementom macierzy masowej i macierzy konwekcji.

Elementy macierzy masowej zdefiniowane są wzorem ($\alpha, \gamma = 1, \dots, N(j)$)

$$M_{j,\gamma;k,\alpha} = \langle \mathbf{w}_{k,\alpha}, \mathbf{w}_{j,\gamma} \rangle = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{w}}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{w}}_{j,\gamma}^* dx dy \int_0^{\Lambda_z} \exp[i(k-j)\beta z] dz = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k \neq j \\ \Lambda_z \int_{\Omega} \hat{\mathbf{w}}_{j,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{w}}_{j,\gamma}^* dx dy & \end{cases} \quad (16)$$

skąd wynika, że strukturze tej można nadać formę tablicy blokowo diagonalnej.

Elementy macierzy konwekcji obliczane są następująco

$$C_{j,\gamma;k,\alpha;m,\delta} = \langle (\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{m,\delta}, \mathbf{w}_{j,\gamma} \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{m,\delta} \cdot \mathbf{w}_{j,\gamma}^* dx dy dz \quad (17)$$

Biorąc pod uwagę, że (18)

$$(\mathbf{w}_{k,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{w}_{m,\delta} \cdot \mathbf{w}_{j,\gamma}^* = (\hat{w}_{k,\alpha}^x \partial_x \hat{\mathbf{w}}_{m,\delta} + \hat{w}_{k,\alpha}^y \partial_y \hat{\mathbf{w}}_{m,\delta} + im\beta \hat{w}_{k,\alpha}^z \hat{\mathbf{w}}_{m,\delta}) \cdot \hat{\mathbf{w}}_{j,\gamma}^* \exp[i(k+m-j)\beta z]$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} C_{j,\gamma;k,\alpha;m,\delta} &= \int_{\Omega} (\hat{w}_{k,\alpha}^x \partial_x \hat{\mathbf{w}}_{m,\delta} + \hat{w}_{k,\alpha}^y \partial_y \hat{\mathbf{w}}_{m,\delta} + im\beta \hat{w}_{k,\alpha}^z \hat{\mathbf{w}}_{m,\delta}) \cdot \hat{\mathbf{w}}_{j,\gamma}^* dx dy \int_0^{\Lambda_z} \exp[i(k+m-j)\beta z] dz = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } j \neq k+m \\ \Lambda_z \int_{\Omega} [\hat{w}_{k,\alpha}^x \partial_x \hat{\mathbf{w}}_{j-k,\delta} + \hat{w}_{k,\alpha}^y \partial_y \hat{\mathbf{w}}_{j-k,\delta} + i(j-k)\beta \hat{w}_{k,\alpha}^z \hat{\mathbf{w}}_{j-k,\delta}] \cdot \hat{\mathbf{w}}_{j,\gamma}^* dx dy & \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Zauważmy, że elementy macierzy konwekcji są niezerowe tylko wówczas, gdy liczby falowe spełniają związek $\beta_j = \beta_k + \beta_m$. Oznacza to, że bezpośrednia interakcja modów normalnych zachodzi jedynie w obrębie tzw. triady, czyli modów o trzech ściśle związanych liczbach falowych. Własność ta wynika oczywiście z typu nieliniowości równań ruchu.

Zapis otrzymanego układu dynamicznego upraszcza się znacznie, jeśli do aproksymacji pola zaburzeń użyjemy tylko po jednym modzie normalnym dla każdej liczby falowej, tj. $N(k) \equiv 1$, $|k| \leq K$. Wówczas układ (15) można zapisać następująco

$$a_j'(t) = -i\sigma_j a_j(t) - \sum_{(k)} D_{j,k,j-k} a_k(t) a_{j-k}(t) \quad (20)$$

gdzie wprowadziliśmy wielkości

$$D_{j,k,j-k} = \frac{1}{M_{j,j}} C_{j,k,j-k}, \quad |k| \leq K, \quad |j-k| \leq K \quad (21)$$

Mają przy tym miejsce związki

$$M_{j,j} = \Lambda_z \int_{\Omega} (|\hat{w}_j^x|^2 + |\hat{w}_j^y|^2 + |\hat{w}_j^z|^2) dx dy \quad (22)$$

$$C_{j,k,j-k} = \Lambda_z \int_{\Omega} (\hat{w}_k^x \partial_x \hat{\mathbf{w}}_{j-k} + \hat{w}_k^y \partial_y \hat{\mathbf{w}}_{j-k} + i(j-k)\beta \hat{w}_k^z \hat{\mathbf{w}}_{j-k}) \cdot \hat{\mathbf{w}}_j^* dx dy \quad (23)$$

Zauważmy, że wskutek ortogonalności harmonik Fourierowskich macierz masowa jest ściśle diagonalna, co pozwoliło zapisać układ równań w formie rozwiązanej względem pochodnych funkcji-współczynników $a_j(t)$, $|j| \leq K$.

Dla przykładu podajemy postać układu równań dla modelu ewolucji nieliniowej pola zaburzeń wykorzystującego wyłącznie mody o numerach $|j| \leq 3$

$$\begin{cases} a'_0 = \sigma_0^I a_0 - D_{0,0,0} a_0^2 - 2R_{0,1,-1} |a_1|^2 - 2R_{0,2,-2} |a_2|^2 - 2R_{0,3,-3} |a_3|^2 \\ a'_1 = -i\sigma_1 a_1 - (D_{1,-2,3} + D_{1,3,-2}) a_2^* a_3 - (D_{1,-1,2} + D_{1,2,-1}) a_1^* a_2 - (D_{1,0,1} + D_{1,1,0}) a_0 a_1 \\ a'_2 = -i\sigma_2 a_2 - (D_{2,-1,3} + D_{2,3,-1}) a_1^* a_3 - (D_{2,0,2} + D_{2,2,0}) a_0 a_2 - D_{2,1,1} a_1^2 \\ a'_3 = -i\sigma_3 a_3 - (D_{3,0,3} + D_{3,3,0}) a_0 a_3 - (D_{3,1,2} + D_{3,2,1}) a_1 a_2 \end{cases} \quad (24)$$

Wykorzystaliśmy przy tym własność (7), z której wynika w szczególności, że $a_0(t)$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych.

3. Wybór bazy modów normalnych. Mody zerowe.

Warunkiem poprawności przybliżonego opisu ewolucji pola zaburzeń o skończonej wielkości jest właściwy dobór modów normalnych uwzględnionych w opisie. Dobór ten powinien spełniać pewne warunki wynikające z fizycznych pomiędzy różnymi modami normalnymi i odzwierciedlonych w strukturze układu dynamicznego (15). W szczególności, jest oczywiste, że zbiór modów wybranych do aproksymacji pola zaburzeń powinien zawierać przynajmniej jeden mod o numerze falowym $k=0$. Odpowiadające takiemu modowi pole zaburzeń prędkości w ogóle nie zależy od zmiennej przestrzennej z , tj. w każdym przekroju poprzecznym kanału ma taką samą postać.

Mody zerowe mogą być wyznaczone jako rozwiązania własne układu przedstawionego w Załączniku nr 5 wzorami (3.26) w przypadku, gdy liczba falowa $\beta=0$. Istnieją dwie rodziny takich rozwiązań nazywane dalej modami zerowymi 1-ego i 2-ego rodzaju. Z trzeciej własności (4) wynika, że część rzeczywista wszystkich modów zerowych obu rodzajów jest równa zeru.

3.1. Mody zerowe 1-ego rodzaju

Składowe x -owa i y -owa pola zaburzeń prędkości oraz pole zaburzeń ciśnienia modów zerowych 1-ego rodzaju są określone przez rozwiązania własne układu

$$\begin{cases} -i\sigma \mathbf{u}_1 = -\mathbf{D}_1 \mathbf{p} + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \mathbf{u}_1 \\ -i\sigma \mathbf{u}_2 = -\mathbf{D}_2 \mathbf{p} + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Postępując podobnie jak w przypadku ogólnym (Załącznik nr 5) układ (25) może być sprowadzony do równoważnego zagadnienia własnego o mniejszym rozmiarze. Po pomnożeniu pierwszego z równań (25) przez macierz $\mathbf{E}_1$, drugiego przez macierz $\mathbf{E}_2$, a następnie dodaniu otrzymanych w ten sposób równań stronami, otrzymujemy równanie nie

zawierające częstotści zespolonej σ . Równanie to można rozwiązać względem wektora $\mathbf{p}$, a mianowicie

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{E}_1 \mathbf{K} \mathbf{u}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{K} \mathbf{u}_2) \quad (26)$$

przy czym macierz $\mathbf{S}$ jest określona wzorem

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 \quad (27)$$

Formuła (26) pozwala wyeliminować wektor $\mathbf{p}$ z układu (25). W szczególności pierwsze z równań tego układu może być zapisane w postaci

$$(\mathbf{D}_1 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{K} - \mathbf{K}) \mathbf{u}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{E}_2 \mathbf{K} \mathbf{u}_2 = i \text{Re} \sigma \mathbf{u}_1 \quad (28)$$

Następny krok polega na eliminacji wektora $\mathbf{u}_2$ z równania (28). W tym celu wykorzystujemy trzecie z równań układu (25), z którego wynika, że

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{u}_1 \quad (29)$$

Ostatecznie, równanie (28) przyjmuje postać

$$[\mathbf{D}_1 \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{E}_1 \mathbf{K} - \mathbf{E}_2 \mathbf{K} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_1) - \mathbf{K}] \mathbf{u}_1 = i \sigma \text{Re} \mathbf{u}_1 \quad (30)$$

Otrzymane zagadnienie własne pozwala obliczyć częstotści własne i pole składowej x-owej pola prędkości modu zerowego. Pole składowej y-owej wynika wówczas ze wzoru (29). Wreszcie, wektor $\mathbf{u}_3$ określający pole składowej z-owej prędkości modu jest rozwiązaniem równania

$$(\mathbf{K} + i \sigma \text{Re} \mathbf{I}) \mathbf{u}_3 = -\text{Re} (\mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2) \quad (31)$$

czyli zapisanego w dogodny sposób trzeciego równania ogólnego układu (3.26) z Załącznika nr 5. Rozwiązanie to istnieje i jest jednoznaczne jeśli tylko częstotć σ nie jest jednocześnie wartością własną macierzy $\mathbf{K}$.

Obliczenia pokazują, że częstotści modów zerowych 1-ego rodzaju są liczbami zespolonymi o zerowej części rzeczywistej i ujemnej części urojonej, a zatem mody te są zawsze tłumione.

3.2. Mody zerowe 2-ego rodzaju

Mody zerowe drugiego rodzaju mają prostą strukturę kinematyczną, bowiem składowe pola zaburzeń tych modów w płaszczyźnie Oxy znikają tożsamościowo, podobnie jak pole zaburzeń ciśnienia. Mamy zatem

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{0} , \mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{0} , p \equiv 0 \quad (32)$$

Jedyną niezerową składową pola zaburzeń prędkości modów 2-ego rodzaju jest zatem składowa z-owa. Pole tej składowej jest określone przez wektor współczynników $\mathbf{u}_3$, który jest rozwiązaniem własnym zagadnienia postaci

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_3 = -i\sigma \operatorname{Re}\mathbf{u}_3 \quad (33)$$

Ponieważ macierz $\mathbf{K}$ jest symetryczna i ujemnie określona (jako dyskretny ekwiwalent operatora Lapalce'a) to częstości wszystkich modów zerowych 2-ego rodzaju są liczbami zespolonymi z zerową częścią rzeczywistą i ujemną częścią urojoną (mody te są zawsze tłumione).

3.3. Wyniki obliczeń częstości zespolonej i pola zaburzeń wybranych modów zerowych

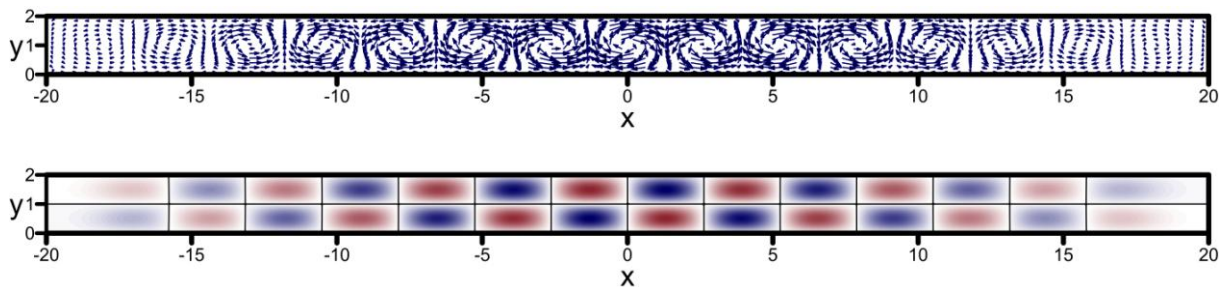
Widma oraz postać pola zaburzeń prędkości modów zerowych wyznaczono numerycznie dla przypadku kanału, w którym ściana dolna jest płaska, a ściana górna jest pofalowana sinusoidalnego. Pofalowanie jest zorientowane poprzecznie względem głównego kierunku przepływu (tj. kierunku osi Oz). Szczegółowy opis geometrii pofalowania podany jest w Załącznikach 4 i 5. Bezwymiarowa szerokość kanału jest równa 40, a średnia wysokość jest równa 2, tzn. stosunek szerokości kanału do jego średniej wysokości jest równy 20. Liczba podziałek pofalowania w poprzek kanału jest równa 8. Amplituda pofalowania jest równa 0.8, tj. lokalna wysokość kanału zmienia się w zakresie od 1.2 do 2.8. Przyjęta do obliczeń parametry są takie jak w modelu poddanym badaniom eksperymentalnym.

Przypadkiem referencyjnym jest przepływ w kanale o przekroju prostokątnym, o szerokości równej 40 i wysokości równej 2. W Tabeli 1 podano wartości części urojonej częstości modów zerowych dla tego przepływu, obliczone dla liczby Reynoldsa $Re = 100$ i uszeregowane wg wzrastającego tłumienia.

l.p.	σ_l (mody zerowe 1-ego rodzaju)	σ_l (mody zerowe 2-ego rodzaju)
1	-0.09277283944624	-0.024735696030568
2	-0.092777074191948	-0.024920751112727
3	-0.092984794548229	-0.025229176250393
4	-0.092999236186625	-0.025660971442859
5	-0.093336089975549	-0.026216136690396
6	-0.093357967100406	-0.026894671992983
7	-0.093825313385526	-0.027696577350693
8	-0.09383468928272	-0.028621852763182
9	-0.094404546703761	-0.029670498230884
10	-0.094450471068157	-0.030842513753415
11	-0.095043927850999	-0.032137899331133
12	-0.09519623935033	-0.033556654963703
13	-0.095747143218904	-0.035098780651411
14	-0.095988621658867	-0.03676427639404
15	-0.09656550945568	-0.038553142191812
16	-0.096702141797884	-0.04046537804445

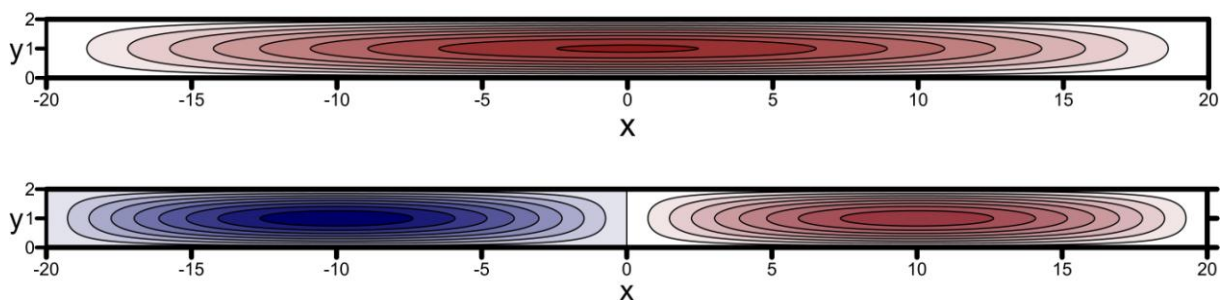
Tabela 1

Przedstawione wyniki pokazują, że mody zerowe są istotnie tłumione, przy czym mody 1-ego rodzaju tłumione są znacznie silniej niż mody 2-ego rodzaju. Inna widoczna własność modów zerowych to bardzo niewielkie zróżnicowanie pomiędzy wartościami własnymi.



Rys. 1

Na Rysunku 1 przedstawiono pole zaburzeń odpowiadające najslabiej tłumionemu modowi zerowemu 1-ego rodzaju przepływu referencyjnego. Widoczna jest charakterystyczna struktura komórkowa tego pola. Górny rysunek pokazuje mapę wektorową pola zaburzeń w widoku na płaszczyźnie przekroju poprzecznego kanału. Można zauważyć naprzemienny układ wirów zorientowanych wzdłużnie (tj. położonych równolegle do osi Oz). Na dolnym rysunku pokazano mapę konturową składowej z -owej. Odcienie koloru niebieskiego i brązowego odpowiadają wartościom różnych znaków (ruch zgodny z kierunkiem przepływu głównego lub do niego przeciwny). Wielkość składowej z -owej pola zaburzeń prędkości modu jest ok. 20 krotnie większa niż składowych poprzecznych, co jest charakterystyczne dla najslabiej tłumionych modów zerowych 1-ego rodzaju. Można zatem powiedzieć, że dominującą formą zaburzenia przepływu odpowiadającą tym modom jest ruch wzdłużny, ze znacznie słabszą składową poprzeczną generowaną przez układ naprzemiennych i wzdłużnie zorientowanych wirów. Interesujące jest to, że układ ten jest w przybliżeniu periodyczny, przy czym okres geometryczny tej struktury z dala od ścian bocznych jest w przybliżeniu 2.7 raza większy niż wysokość kanału.



Rys. 2

Rysunek 2 pokazuje mapy konturowe rozkładu z -owej składowej pola zaburzeń prędkości dla dwóch najslabiej tłumionych modów zerowych 2-ego rodzaju w przepływie referencyjnym. Jak już wspomniano, jest to jedyna niezerowa składowa z z polu prędkości zaburzeń dla takich modów. Mod o najmniejszym tłumieniu (górna mapa) ma prostą strukturę przypominającą przepływ niezaburzony. Mody o większym tłumieniu mają strukturę komórkową, ze wzrastającą liczbą komórek i zróżnicowaniem maksymalnej wartości prędkości w komórkach.

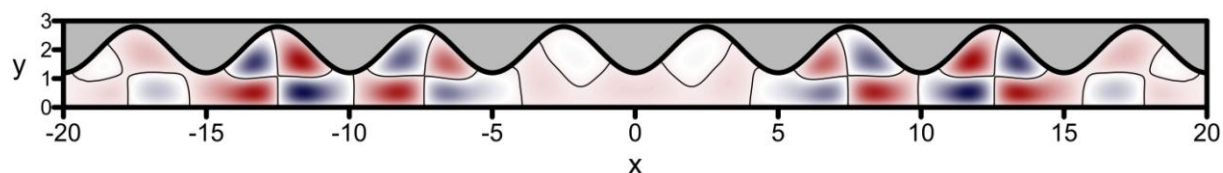
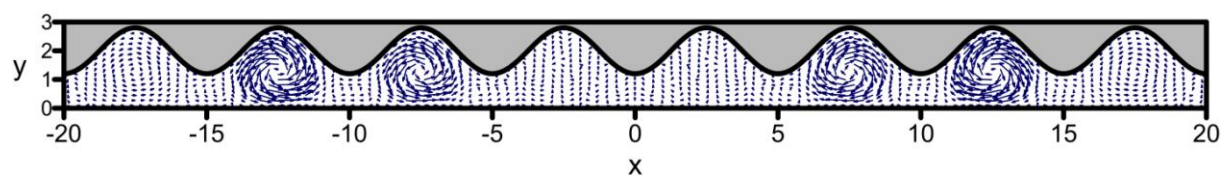
Wprowadzenie poprzecznego pofalowania znacząco modyfikując częstości zespolone (efektywnie – tempo tłumienia) modów zerowych jak również ich formę. W Tabeli 2 podano wartości części urojonej częstości tych modów, obliczone dla przepływu w kanale z pofalowaniem jednostronnym o wcześniej podanych parametrach i liczbie Reynoldsa $Re = 100$. Można zauważyć, że mody zerowe obu rodzajów tworzą grupy liczące po osiem modów (czyli tyle, ile podziałek pofalowania rozmieszczonych jest w poprzek kanału). W każdej z tych grup zróżnicowanie częstości modu jest bardzo niewielkie, natomiast pomiędzy różnymi grupami jest ono znaczące. Porównanie wartości zamieszczonych w Tabeli 2 i Tabeli 1 prowadzi do wniosku, że pofalowanie poprzeczne powoduje redukcję tłumienia w pierwszej grupie modów, przy czym w przypadku modów 1-ego rodzaju efekt ten jest znacznie większy niż w przypadku modów 2-ego rodzaju. Mody należące to drugiej grupy reagują odwrotnie, tzn. pofalowanie zwiększa ich tłumienie (stabilizuje). Powodem takiego stanu rzeczy jest różnica w strukturze geometrycznej modów z obu grup, której nie będziemy tu szczegółowo omawiać.

	σ_I (mody zerowe 1-ego rodzaju)	σ_I (mody zerowe 2-ego rodzaju)
1	-0.066830674533183	-0.023507248365095
2	-0.066832061779660	-0.023521788816542
3	-0.066836526063924	-0.023543746189984
4	-0.066836673393613	-0.023569719983573
5	-0.06683945086530	-0.023596017818574
6	-0.066839973199214	-0.023618610400267
7	-0.066842570226452	-0.023633288375446
8	-0.066842580654595	-0.023638921535097
9	-0.096750052891714	-0.043798075636714
10	-0.096756575051507	-0.043964909981955
11	-0.096775123779488	-0.044238986473398
12	-0.096789631585897	-0.044580145695281
13	-0.096814812165064	-0.044949750441352
14	-0.096818091121129	-0.045290752319037
15	-0.096854708131565	-0.045535245471254
16	-0.096909108243306	-0.045625298763729

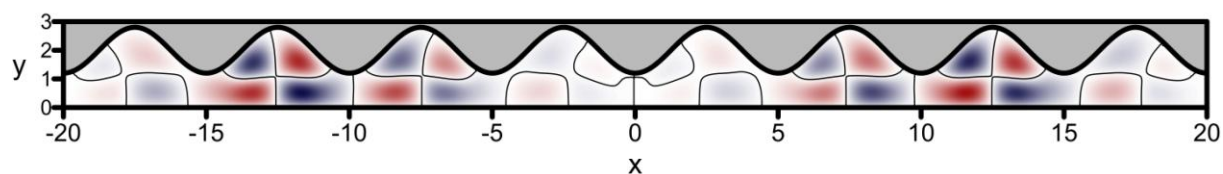
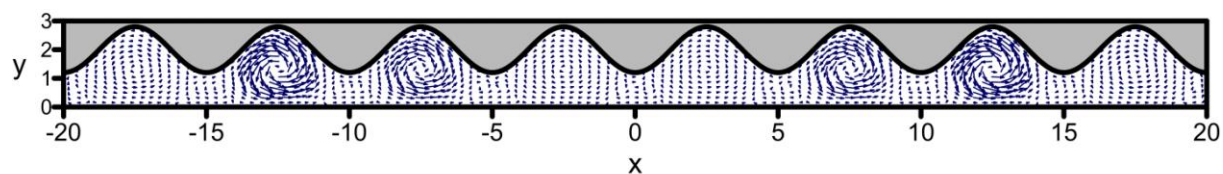
Tabela 2

Strukturę pola prędkości zaburzeń czterech najsłabiej tłumionych modów 1-ego rodzaju (oznaczonych symbolem T1) przedstawiono na Rysunkach od 3 do 6. Na każdym z tych rysunków pokazano mapę wektorową pola w płaszczyźnie poprzecznej kanału (płaszczyźnie Oxy) oraz mapę konturową składowej w kierunku z . Obszary, w których składowa z -owa przyjmują wartości ujemne zaznaczone zostały odcieniami koloru niebieskiego, natomiast tam, gdzie wartości tej składowej są dodatnie – odcieniami koloru bordowego. Zaznaczono również kontur wartości zerowej. Podobieństwo geometryczne struktury pola zaburzeń tych modów jest ewidentne. W polach zaburzeń odpowiadających dwóm najsłabiej tłumionym modom widoczne są dwie pary wirów położone symetrycznie względem płaszczyzny symetrii kanału Oyz . Różnica polega przede wszystkim na tym, że w pierwszym modzie wiry po prawej stronie kanału obracają się w przeciwnych kierunkach, podczas, gdy w modzie drugim kierunki obrotu wirów w obu parach są zgodne. Podobna relacja ma miejsce pomiędzy modem trzecim i czwartym (a także dalszymi), gdzie uwidacznia się dodatkowa para wirów położonych tuż przy płaszczyźnie symetrii Oyz (w modach 1 i 2 wiry te są bardzo słabe, niemal niewidoczne). Warto dodać, że każdym z przedstawionych modów maksymalna

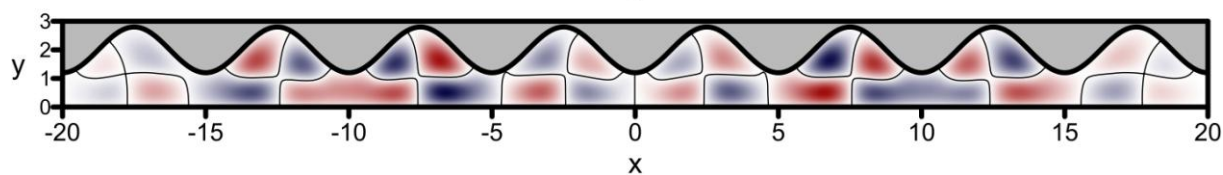
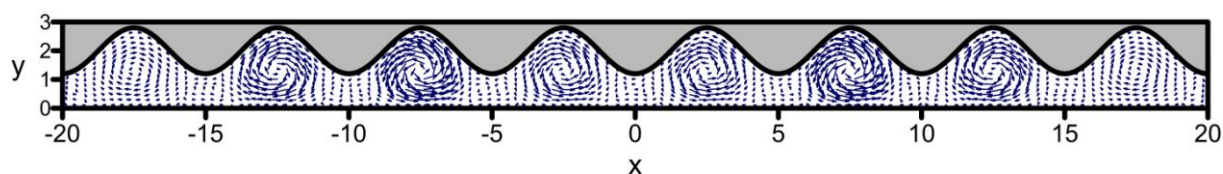
wartość składowej w kierunku z jest około 4 razy większa niż maksymalna wartość prędkości w płaszczyźnie Oxy .



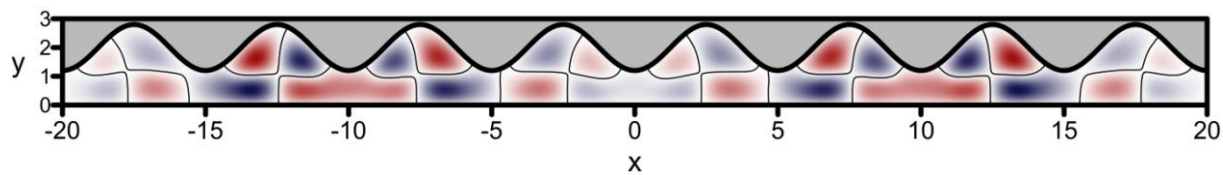
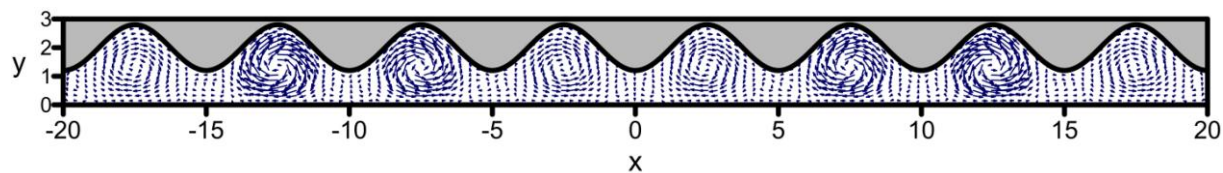
Rys. 3. Pole zaburzeń prędkości modu T1 nr 1.



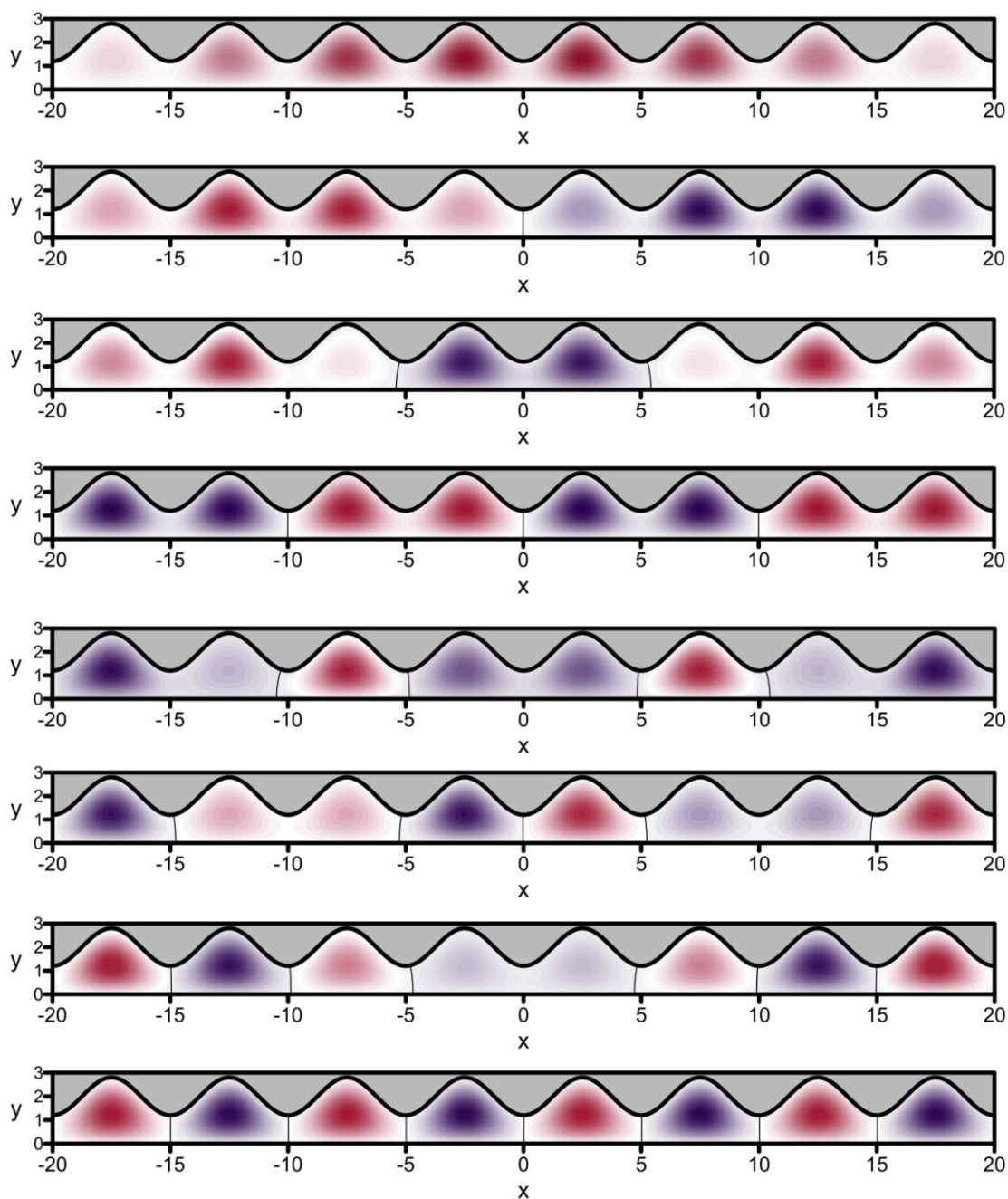
Rys. 4. Pole zaburzeń prędkości modu T1 nr 2.



Rys. 5. Pole zaburzeń prędkości modu T1 nr 3.



Rys. 6. Pole zaburzeń prędkości modu T1 nr 4.



Rys. 7. Polem zaburzeń prędkości (składowa z-owa) ośmiu najslabiej tłumionych modów zerowych drugiego rodzaju. Odcienie koloru niebieskiego i czerwonego oznaczają wartości dodatnie i ujemne.

Na Rysunku 7 przedstawiono mapy konturowe składowej z-owej pola zaburzeń prędkości obliczonego dla pierwszych ośmiu najslabiej tłumionych modów zerowych 2-ego rodzaju. Podobnie jak poprzednio, wartości ujemne zaznaczono odcieniami koloru niebieskiego, a dodatnie – odcieniami koloru bordowego. Różnica w strukturze pola zaburzeń tych modów polega przede wszystkim na innym rozłożeniu wartości dodatnich i ujemnych oraz innym typie symetrii. Podobnie jak ma to miejsce w przypadku referencyjnego przepływu w kanale o przekroju prostokątnym, najslabiej tłumiony mod przyjmuje formę bardzo zbliżoną do przepływu niezaburzonego.

Z przedstawionej wyżej analizy można wyciągnąć wniosek, że w przepływie przez kanał z poprzecznym pofalowaniem istnieje dość liczny zbiór modów zerowych, dla których wielkość tłumienia jest bardzo podobna. W tej sytuacji trudno a priori ocenić, które z tych modów są istotne dla przebiegu i ostatecznego efektu procesu nieliniowej saturacji zaburzeń. Podobnie przedstawia się sytuacja z modami superharmonicznymi, tj. modami, których wzdluzna liczba falowa jest całkowitą wielokrotnością liczby podstawowej β . Dla sugerowanej przez wyniki analizy liniowej przedziału wartości tej liczby (dla pofalowania jednostronnego najsilniejsza destabilizacja ma miejsce, gdy β jest równa około 0.5) mody superharmoniczne również formują grupy zaburzeń o bardzo zbliżonej wielkości tłumienia (części urojonej częstości własnej modu). Nie sposób zatem dokonać racjonalnego wyboru zbioru modów normalnych, o których można zasadnie przypuszczać, że mają zdecydowane znaczenie w procesie ustalania nowej formy zdestabilizowanego przepływu. Ewentualny model musiałby wykorzystywać przynajmniej dwadzieścia kilka różnych modów. Biorąc pod uwagę, że zbiór modów bazowych powinien być wyznaczony od nowa po każdej zmianie geometrii pofalowania i liczby Reynoldsa, uznano, że z punktu widzenia realizacji projektu kontynuowanie prac w kierunku konstrukcji takiego modelu jest niecelowe i obliczeniowo nieefektywne. Uznano również, że istotną z punktu widzenia oceny efektywności mieszania informację o formie przepływu oraz poziomie na którym następuje nieliniowa saturacja pierwotnego zaburzenia można uzyskać na drodze bezpośredniej symulacji wykonanej za pomocą komercyjnego pakietu Fluent.

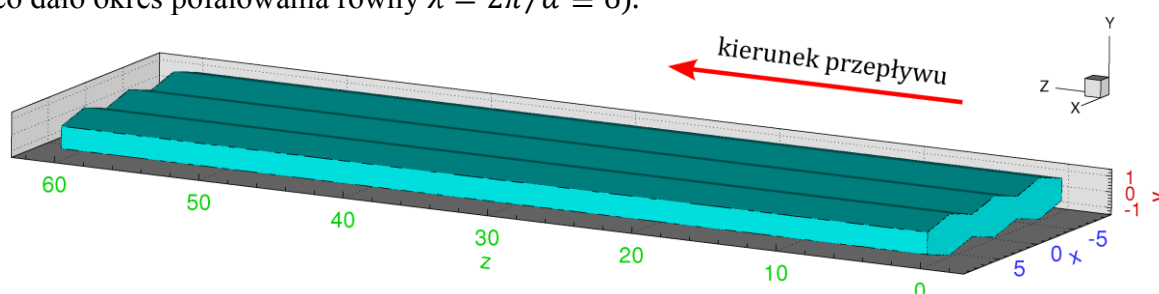
ZAŁĄCZNIK NR 7

ANALIZA STRUKTURY PRZEPŁYWU W GEOMETRII UPROSZCZONEJ

Liniowa analiza stateczności przepływu przez nieskończony kanał (periodyczne warunki brzegowe w obu kierunkach), przeprowadzona w [1, 2], wskazała, że maksymalny efekt wzmocnienia zachodzi dla pofalowania o amplitudzie równej $S = 0.392$ i liczbie falowej $\alpha = 1.039$. Dla takiej geometrii krytyczna liczba Reynoldsa, powyżej której początkowe zaburzenia przepływu ulegać będą wzmocnieniu, zredukowana została do $Re_{cr} = 57.4$ [3]. Ważne jest, że pofalowanie to nie spowodowało wzrostu oporów przepływu, w porównaniu z przepływem Poiseuille’a wymuszonym identycznym gradientem ciśnienia¹. Co więcej, prace [1, 2] oraz przeprowadzone w ramach niniejszego projektu wykazały nieznaczny, około 5% spadek tych oporów [2].

Symulacja numeryczna DNS przepływu w uproszczonej geometrii kanału

Symulacja numeryczna przepływu w nieskończonym kanale, nieściśliwej cieczy newtonowskiej wykonana została metodą objętości skończonych poprzez bezpośrednie rozwiązywanie pełnego, trójwymiarowego, niestacjonarnego układu równań Naviera-Stokesa (tzw. DNS – opis metody przedstawiony został w Załączniku 1). Na potrzeby wstępnej symulacji DNS zdefiniowano uproszczoną geometrię pokazaną na rysunkach 9.1 i 9.2, w której sinusoidalnie pofalowane ścianki zastąpiono ściankami składającymi się z płaskich powierzchni. Taka modyfikacja geometrii podyktowana została chęcią wygenerowania siatki o możliwie najmniej skomplikowanej budowie oraz koniecznością późniejszego wykonania modelu eksperymentalnego. Niemniej starano się zachować wartości amplitudy S i liczby falowej² α jak najbliższe wyznaczonym teoretycznie. Stosując opis bezwymiarowy³ amplituda pofalowania ścian wygenerowanej geometrii wynosiła $S = 0.3$, a liczba $\alpha = 1.05$ (co dało okres pofalowania równy $\lambda = 2\pi/\alpha \cong 6$).

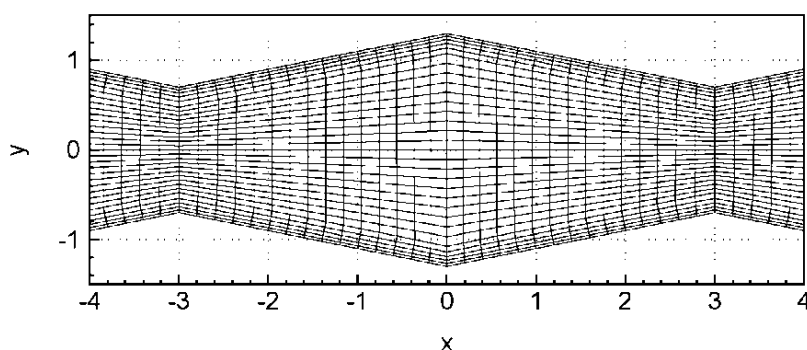


Rys. 9.1. Geometria kanału zdefiniowana na potrzeby symulacji numerycznych, z zaznaczonym czerwoną strzałką kierunkiem przepływu wzdłuż osi x .

¹ Tzn. porównano wydatki objętościowe dwóch niezaburzonych przepływów (tzn. przepływów z liczbą Reynoldsa $Re < Re_{cr}$), wymuszonych takim samym gradientem ciśnienia; jeden przepływ odbywał się w rozważanym kanale z pofalowanymi ściankami, a drugi był odpowiadającym mu przepływem Poiseuille’a w kanale o takim samym polu przekroju pomiędzy płaskimi ściankami. Dla podanych wartości S i α wydatek obserwowany w kanale pofalowanym był o ok. 5% większy, niż w przepływie Poiseuille’a.

² Z uwagi na fakt, że przyjęta geometria nie jest opisana funkcją trygonometryczną, liczbę falową α rozumiemy jako parametr określający jedynie okres powtarzalności kształtów geometrii kanału, zdefiniowany jako $\lambda = 2\pi/\alpha$.

³ Jednostka długości zdefiniowana została jako połowa średniej wysokości kanału.



Rys. 9.2. Przekrój poprzeczny przez fragment kanału o uproszczonej geometrii z naniesioną siatką obliczeniową. Symulowany przepływ odbywa się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku

Model teoretyczny [2] opierał się na geometrii kanału nieograniczonego w kierunkach x i z . W niniejszej pracy wykonano numeryczną analizę przepływu w dwóch konfiguracjach geometrycznych kanału. W pierwszej konfiguracji rozpatrywano przepływ w kanale nieograniczonym w kierunkach x i z , z zadanymi periodycznymi warunkami brzegowymi na odpowiednich ścianach. Dla tej konfiguracji geometria składała się z trzech segmentów pofalowania (rys. 9.1). W drugiej konfiguracji zbudowano bardzo podobną geometrię, ale składającą się z pięciu segmentów pofalowania, przy czym kanał ten był nieskończony jedynie w kierunku z . Skończona szerokość kanału miała dać odpowiedź, jaki wpływ na destabilizację przepływu i wzmacnianie początkowych zaburzeń mają boczne ścianki kanału. W obu rozpatrywanych konfiguracjach długość domeny wynosiła 60 (we wcześniej zdefiniowanych jednostkach bezwymiarowych).

Dla obu konfiguracji geometrycznych kanału wygenerowano strukturalne siatki sześciennie z warstwą przyścienną o takich samych gęstościach. Siatka w geometrii nieograniczonej, zbudowanej z trzech segmentów pofalowania składała się z 405 000 komórek, a w geometrii zbudowanej z pięciu segmentów z fizycznymi ściankami bocznymi, siatka liczyła 675 000 elementów. Siatka widoczna w płaszczyźnie przekroju poprzecznego kanału przedstawiona została na rysunku 9.2.

Właściwe obliczenia poprzedzone były przeprowadzeniem testu wrażliwości rozwiązania na gęstość siatki. W tym celu wykonano wstępne obliczenia na trzech siatkach o różnych gęstościach. Do ilościowego porównania wyników wykorzystano współczynnik zbieżności siatki GCI . Na podstawie wyznaczonych wartości współczynnika GCI stwierdzono, że gęstość siatki przyjęta jako optymalna (czyli siatki złożone z 405 000 i 675 000 elementów, w zależności od konfiguracji kanału) zapewniała błąd rozwiązania mniejszy niż 0.04%, co uznano za wartość zadowalającą.

Liczba Reynoldsa charakteryzująca przepływ została zdefiniowana w oparciu o połowę wysokości kanału referencyjnego (czyli 1 w przyjętych jednostkach bezwymiarowych). W celu wyznaczenia granicy stabilności przepływu, poszukiwano krytycznej liczby Reynoldsa, powyżej której zaburzenia przepływu będą ulegały wzmacnianiu. Szukano również wartości oporów hydraulicznych (spadków ciśnienia) występujących w symulowanych przepływach, w zależności od liczby Reynoldsa. W tym celu przeprowadzono symulacje przepływów dla 13 różnych liczb Reynoldsa, z zakresu $Re = 1 \div 3000$ ($Re = 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 100, 200, 500, 1000$ i 3000), zarówno w geometrii nieograniczonej w kierunkach x i z (nieskończona szerokość i długość kanału), jak też nieograniczonej jedynie w kierunku z (tylko nieskończona długość kanału). Dla przyspieszenia obliczeń jako warunek początkowy dla wszystkich przeprowadzonych symulacji przyjęto wcześniej wygenerowane pole prędkości z około 1% poprzecznym

zaburzeniem przepływu⁴. Zmianę liczby Reynoldsa przepływu dokonywano poprzez zmiany lepkości płynu, przy zachowaniu wszystkich pozostałych parametrów przepływu. Pozwoliło to znacznie przyspieszyć uzyskanie zbieżnego rozwiązania dla kolejnych parametrów przepływu.

Na górnej i dolnej ścianie kanału przyjęto warunek braku poślizgu (warunek brzegowy Dirichleta $\vec{u} = 0$). Na ściankach bocznych warunki brzegowe zadano w zależności od rozpatrywanej konfiguracji. W przypadku symulacji przepływu w kanale o nieskończonej szerokości przyjęto periodyczne warunki brzegowe z zadaniem zerowym gradientem ciśnienia w kierunku x . W przypadku obliczeń w kanale o ograniczonej szerokości (z fizycznymi ściankami bocznymi) zadano standardowy warunek braku poślizgu. Dla obu konfiguracji w kierunku z (kierunek przepływu) zadano strumień masy zapewniający żadaną wartość prędkości przepływu.

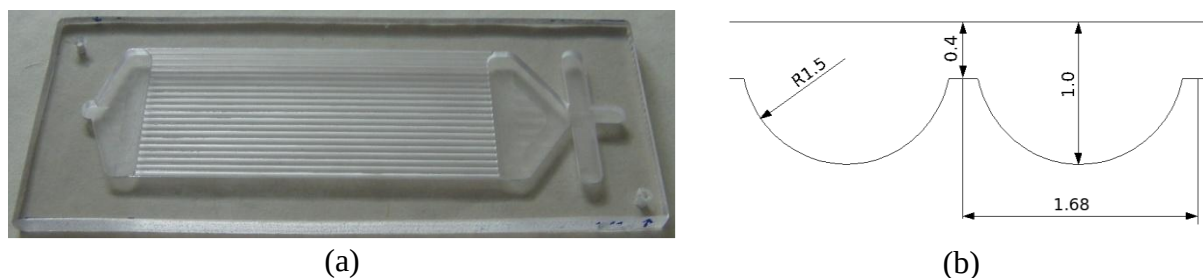
Analiza eksperymentalna przepływu w uproszczonej geometrii kanału

Przedstawiona analiza eksperymentalna przepływu w kanale z pofalowanymi ściankami jest wstępną, jakościową próbą potwierdzenia poprawności przewidywań teoretycznych i symulacji numerycznych, które wskazały na możliwość destabilizacji przepływu przy niskich liczbach Reynoldsa, nawet przy $Re < 60$. Eksperymenty te mają na celu jedynie dać odpowiedź, czy taka destabilizacja jest możliwa przy niskich liczbach Reynoldsa. Dlatego też, nie zamieszczono tutaj ilościowego porównania wyników eksperymentalnych z uzyskanymi na drodze symulacji numerycznych.

Badania eksperymentalne przepływu przez kanał o pofalowanych ściankach przeprowadzone zostały w uproszczonym modelu wykonanym z poliwęglanu (rys. 9.4a) na precyzyjnej mikro-frezarce. Wykonany kanał składał się z 20 segmentów pofalowania o kształcie i wymiarach przedstawionymi na rysunku 9.4b. Jego minimalna i maksymalna wysokość wynosiły odpowiednio 0.4mm i 1mm (średnia wysokość była równa $793\mu\text{m}$), długość 75mm , zaś całkowita szerokość 33.6mm . W celu zapewnienia niezakłóconego dostępu optycznego do wnętrza kanału, górną ściankę wykonano jako płaską powierzchnię⁵. Umożliwiło to rejestrację obrazów bez zniekształceń, które spowodowałyby krzywizna powierzchni, przez którą prowadzona by była obserwacja. Długość wykonanego kanału jest prawdopodobnie zbyt mała, aby umożliwić samorzutne pojawienie się zaburzeń i ich pełne rozwinięcie do statystycznie stacjonarnej postaci przepływu. Jednakże przyjęto założenie, że jeśli przewidywania teoretyczne są słuszne, a symulacje numeryczne były przeprowadzone poprawnie, to początkowe zaburzenia przepływu wywołane silnie rozbieżną geometrią wlotu do kanału będą wzmacniane przez pofalowanie ścianek.

⁴ Było to zaburzone pole prędkości przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 50$; pole to otrzymano korzystając z wyniku symulacji przeprowadzonej dla przepływu burzliwego z $Re = 3000$, gdzie po zmniejszeniu liczby Reynoldsa do $Re = 50$ prowadzono obliczenia do momentu uzyskania przepływu, w którym poprzeczne zaburzenia ulegną zmniejszeniu do ok. 1% prędkości średniej. Tak wygenerowane pole prędkości z 1% zaburzeniem poprzecznym stanowiło warunek początkowy wszystkich przeprowadzonych symulacji.

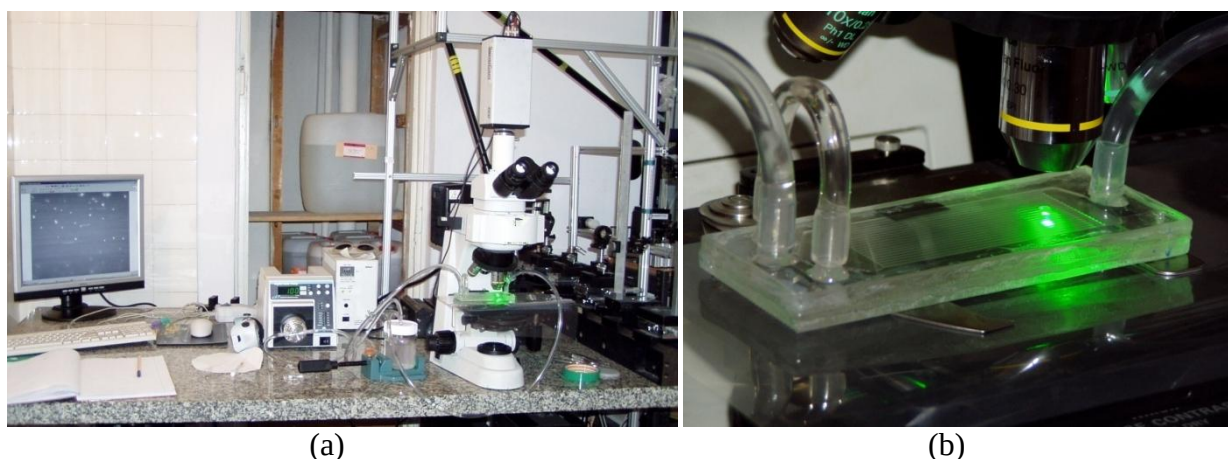
⁵ Efekt destabilizacji przepływu w kanale z pofalowaną tylko jedną ścianką jest porównywalny efektem obserwowanym w kanale z pofalowanymi dwoma ściankami pod warunkiem, że amplituda pofalowania dla pofalowanej tylko jednej ścianki jest dwukrotnie większa od amplitudy pofalowania przy pofalowanych obu ściankach.



Rys. 9.4. a) Wstępny model eksperymentalny kanału z pofalowanymi ściankami wykonany z poliwęglanu, składający się z 20 segmentów pofalowania; ścianka górna jest płaska aby zapewnić niezakłócony dostęp optyczny do wnętrza kanału. b) fragment schematycznego przekroju poprzecznego kanału z naniesionymi wymiarami (w milimetrach).

Analiza eksperymentalna przepływu wykonana została na stanowisku pomiarowym, opisanym w rozdziale 2 załącznika nr 9. Przepływ wymuszany był pompą zębatą *Digital Gear Pump, Cole-Parmer Instrument Co.* w zakresie od 0.76 mm/s do 2.6 m/s , co zapewniało liczbę Reynoldsa, opartą o połowę średniej wysokości kanału, od $Re = 0.3$ do $Re = 1050$. użytym podczas pomiarów płynem była odgazowana, dejonizowana woda z dodanymi fluorescencyjnymi cząstkami znacznikowymi o średnicy $2 \mu\text{m}$ (*Fluorescent Polymer Microspheres – aqueous, Duke Scientific Inc.*). Fotografie stanowiska pomiarowego oraz modelu kanału w trakcie eksperymentu, pokazane zostały na rysunku 9.5.

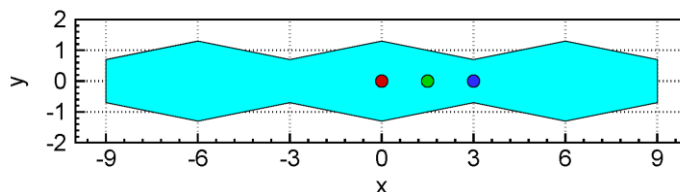
Do analizy eksperymentalnej przepływu przez kanał z pofalowanymi ściankami wykorzystano technikę μPIV . W wyniku pomiarów otrzymano dwuwymiarowe chwilowe pola prędkości, na podstawie których możliwe było wyznaczenie pola zaburzeń. Wykonano również bezpośrednią wizualizację pojedynczych cząstek znacznikowych, dzięki której otrzymano ich trajektorie. Dla ruchu niezaburzonego rejestrowane trajektorie były liniami prostymi. Zwiększając prędkość przepływu, można było znaleźć moment, w którym cząsteczki zaczynały poruszać się po liniach zakrzywionych – świadczyć to mogło o rozpoczęciu się destabilizacji przepływu.



Rys. 9.5. a) Stanowisko eksperymentalne wykorzystane do analizy przepływu przez kanał z pofalowanymi ściankami; widoczne główne elementy układu: mikroskop epi-fluorescencyjny z zamontowaną kamerą PIV oraz połączone silikonowymi rurkami: model kanału leżący na stoliku mikroskopu, pompa zębata wymuszająca przepływ i zbiornik wyrównawczy z płynem. b) Leżący na stoliku mikroskopu poliwęglanowy wstępny model eksperymentalny kanału z pofalowanymi ściankami, oświetlony zielonym światłem lasera.

Wyniki analizy numerycznej i eksperymentalnej w uproszczonej geometrii kanału

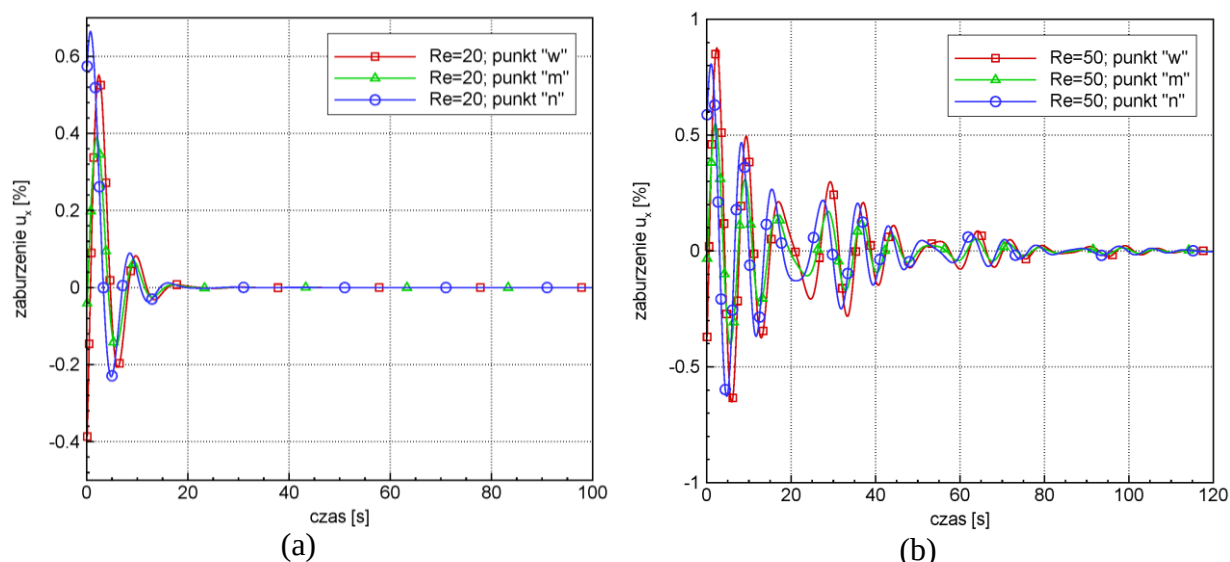
Przeprowadzone symulacje numeryczne przepływu przez kanał z pofalowanymi ściankami oraz wykonany wstępny eksperyment potwierdziły wnioski analizy bazującej na liniowej teorii stateczności [2]. Wykazano, że dla przepływu laminarnego w kanale o odpowiednio pofalowanych ściankach destabilizacja ruchu i późniejsze wzmacnianie zaburzeń możliwe są do osiągnięcia przy stosunkowo niskich wartościach liczby Reynoldsa ($Re_{cr} = 60 \div 80$).



Rys. 9.6. Przekrój poprzeczny numerycznej domeny obliczeniowej z zaznaczonymi trzema punktami (czerwone, zielone i niebieskie kółko) służącymi do wykreślenia charakterystyk przepływu; punkt czerwony nazywany będzie jako „w”, punkt zielony – „m”, a punkt niebieski – „n”.

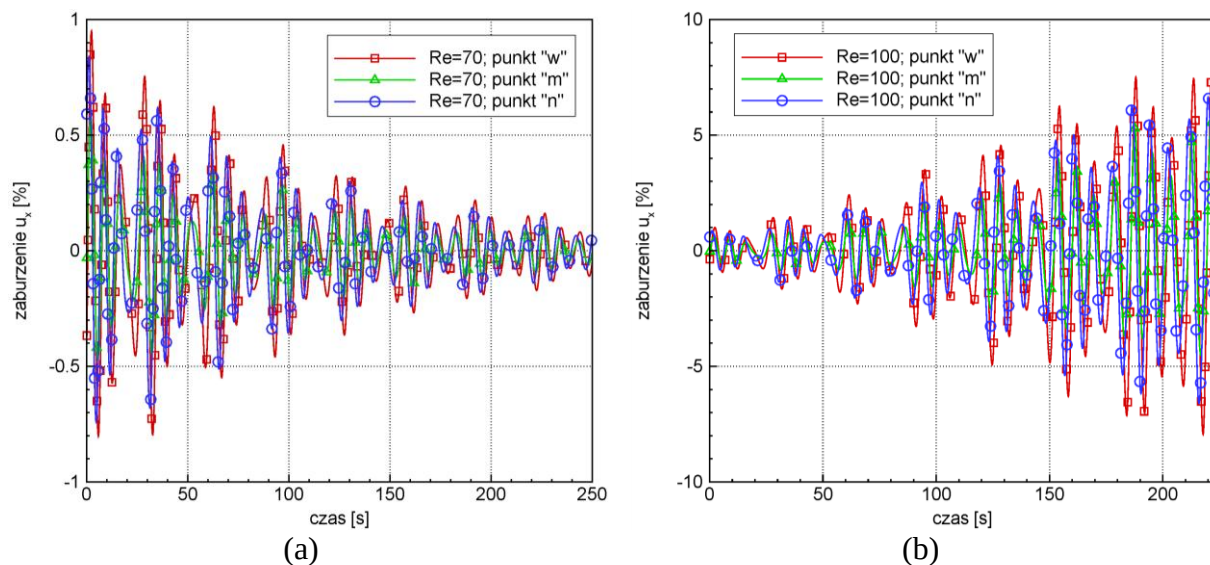
W celu określenia krytycznej liczby Reynoldsa wyznaczono „czasowy przebieg” poprzecznych zaburzeń prędkości w trzech arbitralnie wybranych punktach domeny obliczeniowej, zaznaczonych kolorowymi kółkami na rysunku 9.6. Wszystkie trzy punkty zlokalizowane są na płaszczyźnie symetrii kanału. Punkt czerwony, nazwany jako „w” zlokalizowany jest w najszerszym miejscu kanału; punkt niebieski „n” – w najwęższym, a punkt zielony „m” – w miejscu pośrednim (w połowie drogi pomiędzy punktami „w” i „n”). Wyznaczane zaburzenia zdefiniowane zostały jako procentowo wyrażony stosunek prędkości w kierunku x (składowa u_x) do całkowitej średniej prędkości w kanale. Dla przepływu niezaburzonego otrzymywana jest wartość zero, gdyż w niezaburzonym przepływie laminarnym niezerowa jest jedynie wzdłużna składowa prędkości. Analiza przebiegu tych zaburzeń, wyznaczonych osobno dla przepływów o coraz większej liczbie Reynoldsa, pozwoliła na znalezienie krytycznej liczby Reynoldsa Re_{cr} . We wszystkich obliczeniach zadawano jednakowe zaburzenie początkowe na poziomie 1% prędkości średniej. W przepływach z $Re < Re_{cr}$ to początkowe zaburzenie ulegać będzie wygaszaniu, a dla $Re > Re_{cr}$ obserwowane będzie ich wzmacnianie.

Na rysunku 9.7a przedstawiono czasowy przebieg zaburzenia u_x w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re = 20$. Widoczne szybkie tłumienie początkowych zaburzeń i ich wygaśnięcie po około 20 sekundach ruchu świadczy o tym, że liczba Reynoldsa jest tutaj znacznie niższa od krytycznej. Dla przepływu z liczbą Reynoldsa równą 50 tłumienie jest nadal dość sile, ale już w dużo mniejszym stopniu, gdyż wygaszenie zaburzeń następuje tutaj po około 100 sekundach.



Rys. 9.7. a) Wyznaczone numerycznie (DNS) wygaszanie zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re = 20$ - przebieg czasowy zaburzenia prędkości u_x w trzech wcześniej zdefiniowanych punktach domeny. b) Taki sam przebieg zaburzenia w przepływie z $Re = 50$.

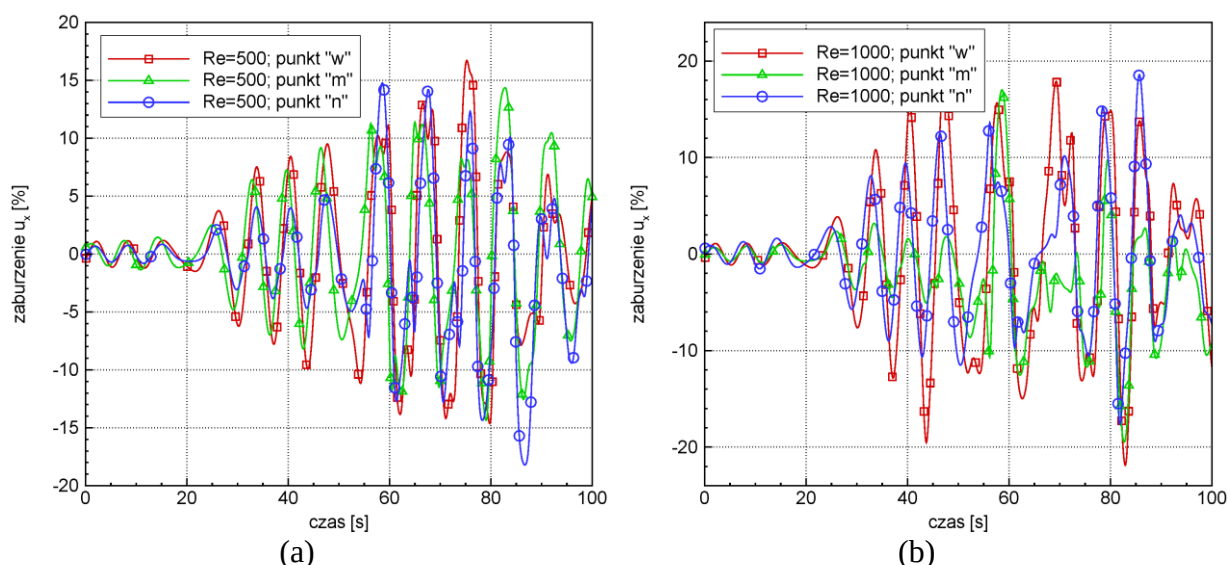
Tak samo wyznaczony przebieg zaburzenia dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 70$, pokazany na rysunku 9.8a przedstawia już znacznie mniej intensywne tłumienie zaburzenia początkowego, niemniej jednak wygaszanie tego zaburzenia jest nadal dobrze widoczne. Powolne zanikanie zaburzenia początkowego dla zadanej konfiguracji geometrii ścianek oznacza, że liczba Reynoldsa $Re = 70$ jest bliska wartości krytycznej, powyżej której zaburzenia będą ulegały wzmacnianiu. Widoczny na rysunku 9.8b przebieg dla przepływu z $Re = 100$ przedstawia już wyraźne wzmacnianie zaburzenia początkowego, co świadczy o tym, że została przekroczona krytyczna liczba Reynoldsa i nawet niewielkie, jednoprocetowe zaburzenie przepływu nie ulegnie wygaszeniu, a będzie wzmacniane. W ciągu około 200s początkowe poprzeczne zaburzenie prędkości, równe około 1% prędkości średniej, rozwijane jest do wartości w przybliżeniu równej 8%. Dla danej konfiguracji geometrycznej i wartości liczby Reynoldsa jest to stan nasycenia, oznaczający równowagę wzmacniającego działania pofalowania ścianek oraz tłumiącego wpływu lepkości i skończonej geometrii kanału.



Rys. 9.8. a) Wyznaczone numerycznie (DNS) wygaszanie zaburzeń w przepływie z liczbą

Reynoldsa $Re = 70$ - przebieg czasowy zaburzenia prędkości u_x w trzech wcześniej zdefiniowanych punktach domeny. b) Przebieg zaburzenia w przepływie z $Re = 100$ – widoczne wzmacnianie zaburzenia początkowego.

W przepływach z wyższymi liczbami Reynoldsa wzmacnianie początkowych zaburzeń będzie silniejsze i szybciej będzie prowadziło do osiągnięcia stanu nasycenia. Nasycenie obserwowane będzie tutaj przy innej, wyższej wartości zaburzeń poprzecznych, zależnych od liczby Reynoldsa przepływu. Widoczne na rysunku 9.9 przebiegi wzmacniania zaburzeń pokazują, że w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re = 500$ stan nasycenia osiągany jest po około 60 sekundach ruchu (rys. 9.9a), a dla $Re = 1000$ po około 40 sekundach (rys. 9.9b), przy czym w obu przypadkach osiągana jest podobna wartość zaburzeń, równa około 15%.

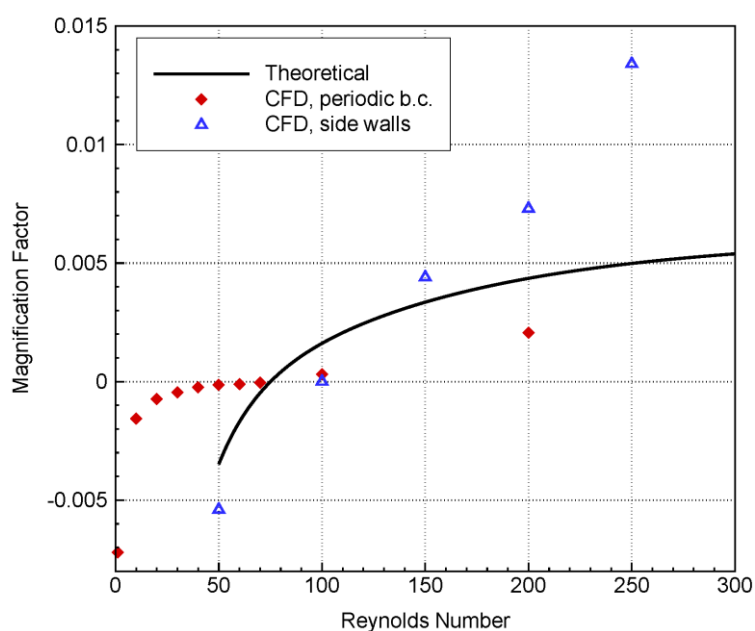


Rys. 9.9. a) Silne wzmacnianie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa (a) $Re = 500$ oraz (b) $Re = 1000$.

Przytoczone dotychczas wyniki obliczeń uzyskane zostały w symulacjach *DNS* przepływu w kanale o nieograniczonej długości i szerokości, składającym się z trzech segmentów pofalowania (rys. 2.2). Na podstawie tych symulacji stwierdzono, że krytyczna liczba Reynoldsa dla podanej konfiguracji znajduje się pomiędzy $Re = 70$, a $Re = 100$, przy których to stwierdzono odpowiednio albo tłumienie, albo wzmacnianie początkowego zaburzenia. Aby sprawdzić, jak silny wpływ na wzmacnianie i tłumienie tych zaburzeń mają fizyczne ścianki boczne kanału, przeprowadzono podobne symulacje i analizę ich wyników w geometrii o skończonej szerokości kanału. Domena obliczeniowa zbudowana była tutaj z 5 segmentów pofalowania, a na ściankach bocznych zadano warunek braku poślizgu ($\vec{u} = 0$). Śledzenie przebiegu czasowego zaburzeń początkowych w przepływach z wzrastającą liczbą Reynoldsa pozwoliło, podobnie jak poprzednio, na wyznaczenie krytycznej liczby Reynoldsa.

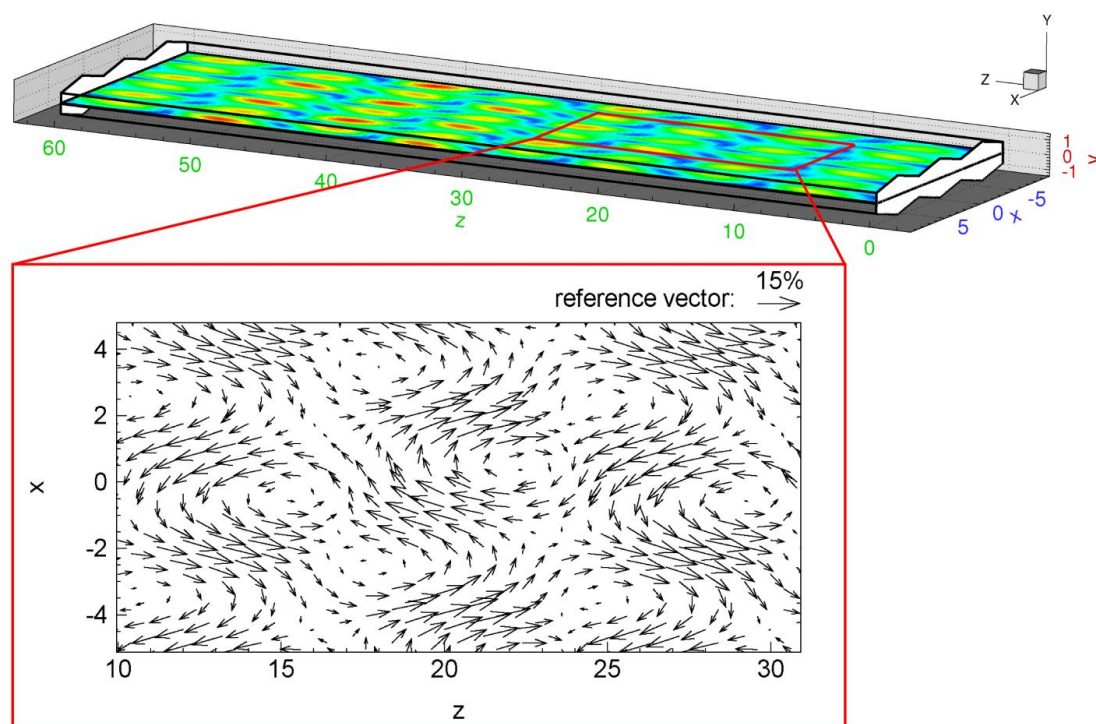
W celu ilościowego opisu efektu wzmacniania zaburzeń i porównania wyników otrzymanych dla obu rozpatrzonych geometrii wyznaczono współczynnik wzmocnienia zaburzeń. Zdefiniowany on został jako średnie nachylenie obwiedni czasowych przebiegów zaburzeń przepływu (średnie nachylenie obwiedni wykresów na rys. 9.7 – 9.9). Ujemne wartości tak zdefiniowanego współczynnika oznaczają tłumienie i w efekcie wygaszenie zaburzeń, a wartości dodatnie – ich wzmacnianie i dążenie do osiągnięcia stanu nasycenia. Na rysunku 9.10 przedstawiono wartości współczynnika wzmocnienia w funkcji liczby Reynoldsa, wyznaczone dla dwóch konfiguracji geometrycznych. Czerwone symbole w

kształcie diamentów (na rys. 9.10 opisane jako „CFD, periodic b.c.”) wyznaczone zostały w wyniku symulacji DNS przepływu przez kanał o nieskończonej długości i szerokości, natomiast niebieskie trójkąty („CFD, side walls”) – w kanale o nieskończonej długości, ale o skończonej szerokości, ograniczonej fizycznymi ściankami bocznymi. Dodatkowo pokazano czarną ciągłą linią („Theoretical”) współczynnik wzmocnienia wyznaczony w liniowej analizie stateczności przepływu w kanale o nieskończonej długości i szerokości, o pofalowaniu identycznym jak w analizie numerycznej [3].



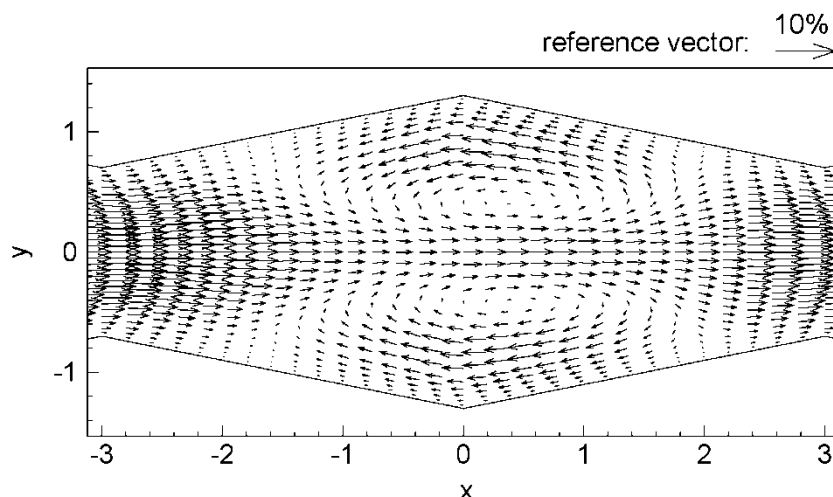
Rys. 9.10. Współczynnik wzmocnienia zaburzeń poprzecznych przepływu (w arbitralnie przyjętych jednostkach): wyznaczony w liniowej analizie stateczności (czarna linia „Theoretical”) i numerycznie w wyniku symulacji DNS przeprowadzonej w kanale o nieskończonej długości i szerokości (czerwone diamenty „CFD, periodic b.c.”) oraz w kanale o nieskończonej długości z fizycznymi bocznymi ściankami (niebieskie trójkąty „CFD, side walls”).

Wyniki pokazane na rysunku 9.10 wskazują na niewielki wpływ ścianek bocznych kanału na efekt wygaszania i wzmacniania początkowych zaburzeń przepływu. Dla konfiguracji o nieskończonej szerokości krytyczna liczba Reynoldsa wynosi około 80, a w kanale ograniczonym ściankami bocznymi – około 100. Świadczyć to może o niezbyt silnym tłumiącym działaniu bocznych ścianek kanału, chociaż rozpatrywana geometria z fizycznymi ściankami bocznymi składała się tylko z 5 segmentów pofalowania i można było się spodziewać wyraźnego wpływu ścianek bocznych. Liniowa analiza stateczności przepływu w kanale o geometrii identycznej jak w analizie numerycznej również pozostaje w zgodzie z wynikami numerycznymi, wskazując, że dla kanału o nieskończonej długości i szerokości, z rozpatrywanym „zębatym” pofalowaniem ścianek o amplitudzie $S = 0.3$ i liczbie $\alpha = 1.05$, krytyczna liczba Reynoldsa wynosi $Re_{cr} = 75$ [3].



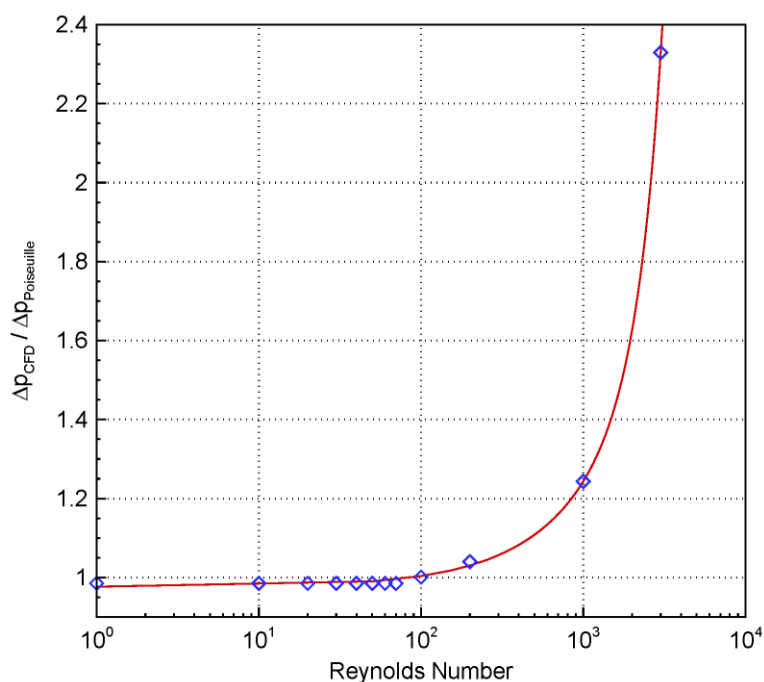
Rys. 9.11. Wyznaczone numerycznie pole zaburzeń składowych prędkości u_{xz} na poziomej płaszczyźnie symetrii kanału (płaszczyzna $x - z$; $y = 0$) dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$. Przepływ główny odbywa się w kierunku rosnących wartości osi z (kierunek i zwrot prędkości średniej).

Powstająca w wyniku destabilizującego i wzmacniającego działania pofalowanych ścianek kanału złożona forma ruchu ma postać przemieszczającej się struktury wirowej. Na rysunkach 9.11 i 9.12 pokazano pole zaburzeń w takim przepływie, wyznaczone jako różnica chwilowego i średniego pola prędkości unormowana przez prędkość średnią. Rysunek 9.11 przedstawia pole tak zdefiniowanego zaburzenia składowych prędkości u_{xz} na poziomej płaszczyźnie symetrii kanału (płaszczyzna $x - z$, $y = 0$) dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$. Widoczna charakterystyczna struktura wirowa jest falą biegnącą, poruszającą się z prędkością zbliżoną do średniej prędkości przepływu niezaburzonego na płaszczyźnie symetrii $y = 0$. Rozmiar pojedynczego wiru jest porównywalny z geometrycznym okresem pofalowania ścianek, który w rozpatrywanym kanale wynosi $\lambda = 2\pi/\alpha \cong 6$. Dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$ wartość zaburzenia prędkości w kierunkach $x - z$ jest na poziomie 10 – 15% średniej prędkości przepływu. Na rysunku 9.12 zostało pokazane pole tak samo wyznaczonych zaburzeń prędkości w kierunkach $x - y$, wykreślone na pionowej płaszczyźnie symetrii kanału (płaszczyzna $x - y$, $z = 30$). Maksymalna wartość tych zaburzeń jest rzędu 10% średniej prędkości przepływu. W tej płaszczyźnie zaburzenia w środkowej części kanału mają postać naprzemiennego ruchu w kierunku rosnących i malejących wartości osi x , z tworzącymi się w pobliżu górnej i dolnej ścianki wirami, również naprzemiennie poruszającymi się lewo- bądź prawoskrętnie.



Rys. 9.12. Wyznaczone numerycznie pole zaburzeń składowych prędkości u_{xy} na pionowej płaszczyźnie symetrii kanału (płaszczyzna $x - y$; $z = 30$ - porównaj z górną częścią rysunku 9.11) dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$. Przepływ główny odbywa się w kierunku osi z (czyli w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku).

Obok wyznaczenia krytycznej liczby Reynoldsa przeprowadzono analizę oporów hydraulicznych rozpatrywanego przepływu. Rozważania teoretyczne [2] wykazały, że dla przepływu niezaburzonego, tzn. dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re < Re_{cr}$, opory hydrauliczne w kanale z wprowadzonym sinusoidalnym pofalowaniem ścianek są nieznacznie mniejsze od oporów przepływu Poiseuille’a w kanale zbudowanym z 2 płaskich ścianek ustawionych w odległości równej średniej odległości ścianek w kanale pofalowanym (tzn. pola przekroju poprzecznego kanałów z pofalowanymi i płaskimi ściankami są jednakowe). W przeprowadzonej analizie numerycznej wyznaczono na podstawie symulacji *DNS* spadki ciśnienia dla przepływów z liczbami Reynoldsa z zakresu $Re = 1 \div 3000$. Wyniki porównano ze spadkami ciśnienia wyliczonymi analitycznie dla analogicznego przepływu Poiseuille’a [4] w kanale z płaskimi ściankami. Stosunek uzyskanych spadków ciśnienia w funkcji liczby Reynoldsa (przedstawionej w skali logarytmicznej) pokazano na rysunku 9.13. Można zauważyć, że w zakresie liczb Reynoldsa niższych od wartości krytycznej opory hydrauliczne są niższe dla kanału z pofalowaniem ścianek, i stanowią około 98.5% oporów wyznaczonych dla przepływu Poiseuille’a. W momencie przekroczenia krytycznej liczby Reynoldsa pojawiające się zawirowania ruchu sprawiają, że opory hydrauliczne zaczynają wzrastać. Według pokazanej na wykresie zależności wartość oporów hydraulicznych wyznaczonych w symulacji *DNS* (czyli oporów uwzględniających pojawienie się poprzecznych zaburzeń przepływu) zaczynają być wyższe od wartości wyznaczonych analitycznie („zwykły” przepływ Poiseuille’a - spadek ciśnienia bez uwzględnienia pojawiających się zawirowań) przy liczbie Reynoldsa $Re \cong 86$. Może to być uważane, obok opisanej wcześniej analizy tłumienia i wzmacniania początkowych zaburzeń ruchu, za kolejny dowód świadczący o tym, że w rozpatrywanym przepływie krytyczna liczba Reynoldsa wynosi około 80.

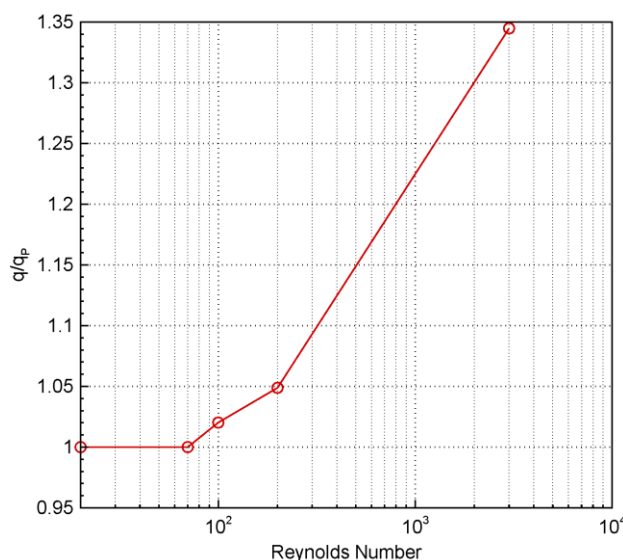


Rys. 9.13. Stosunek oporów hydraulicznych (spadku ciśnienia) wyznaczonych w symulacjach DNS i wyliczonych analitycznie dla przepływu Poiseuille’a pomiędzy płaskimi ściankami w funkcji liczby Reynoldsa; pokazana czerwona linia jest aproksymacją wielomianową trzeciego rzędu punktów oznaczających wyznaczone stosunki spadku ciśnienia (niebieskie symbole w kształcie diamentów). Pozioma oś wykresu zawierająca liczby Reynoldsa jest w skali logarytmicznej.

Warto zauważyć, że dla liczb Reynoldsa niewiele wyższych od wartości krytycznej, wzrost oporów przepływu jest nieznaczny. Dzięki temu możliwe jest uzyskanie przepływu, w którym zawirowania będą dostatecznie silne, aby wymusić powstanie złożonej formy ruchu, przy jednoczesnym zachowaniu niskich oporów hydraulicznych, porównywalnych z oporami w przepływie Poiseuille’a. Dla przykładu w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re = 100$, gdzie poprzeczne zaburzenia mają wartość rzędu kilkunastu procent średniej prędkości przepływu i postać złożonej, trójwymiarowej struktury (zobacz rysunki 9.11 i 9.12), opory hydrauliczne są wyższe jedynie o 0.3% od oporów przepływu Poiseuille’a. Można zatem przypuszczać, że odpowiednie pofalowanie ścianek kanału, bez wprowadzania istotnego wzrostu oporów hydraulicznych, może znacząco poprawić wydajność procesów wymiany ciepła i masy realizowanych w układach mikroprzepływowych.

Dodatkowo, oprócz sprawdzenia wpływu zaburzeń przepływu na opory hydrauliczne, przeprowadzono analizę zmian możliwego do przekazania strumienia ciepła wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Wykonano obliczenia z przyjętym stałym gradientem temperatury pomiędzy górną i dolną ścianką kanału. Sprawdzano możliwy do przekazania pomiędzy ściankami strumień ciepła dla narastających liczb Reynoldsa przepływu. Zmiany liczby Reynoldsa dokonywano wyłącznie poprzez zmianę lepkości płynu, przy zachowaniu stałego strumienia masowego przepływającego medium i własności termodynamicznych (ciepło właściwe i współczynnik przewodzenia ciepła), co pozwoliło na zachowanie stałych warunków termodynamicznych układu i bezpośrednie porównanie otrzymanych wyników (zmiany gęstości płynu czy strumienia masowego płynącego płynu zmieniłyby ilość ciepła, jaką unosiłby przepływ). Na rysunku 9.14 przedstawiono wynik przeprowadzonej analizy.

Wykreślono zmianę przekazywanego strumienia ciepła q/q_p , która zdefiniowana została jako stosunek strumienia uzyskanego dla danej liczby Reynoldsa i strumienia wyznaczonego dla przepływu niezaburzonego ($Re < Re_{cr}$). Jak można zauważyć, dla liczb Reynoldsa $Re \leq 70$, czyli przepływów w których nie ma zaburzeń, stosunek q/q_p jest stały i równy 1. Dopiero przekroczenie krytycznej liczby Reynoldsa wskutek pojawienia się zaburzeń przepływu powoduje wzrost obserwowanego strumienia ciepła. Dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 200$ stwierdzono około 5% wzrost strumienia ciepła możliwego do przekazania pomiędzy ściankami kanału. Dla przepływu burzliwego, z liczbą Reynoldsa $Re = 3000$ wzrost ten wynosi około 35%.



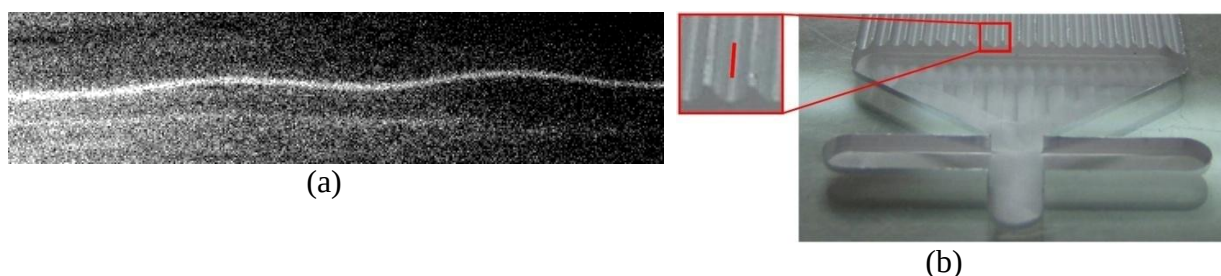
Rys. 9.14. Znormalizowany strumień ciepła oddawanego przez górną ściankę kanału w funkcji liczby Reynoldsa. Liczba Reynoldsa w skali logarytmicznej.

Wnioski wynikające z przeprowadzonych symulacji numerycznych zostały potwierdzone eksperymentalnie. Wstępne pomiary wykonane w kanale opisanym w poprzednim podrozdziale wskazują na możliwość destabilizacji przepływu już przy niewielkich liczbach Reynoldsa. Rysunek 9.15a przedstawia wynik eksperymentu pozwalającego na szybką identyfikację krytycznej liczby Reynoldsa, przy której zaczyna się destabilizacja przepływu. Widoczna na tym rysunku falista trajektoria pojedynczej cząstki unoszonej przez przepływ z liczbą Reynoldsa $Re = 60$ wskazuje na istnienie nieznacznych poprzecznych zaburzeń przepływu⁶.

Należy zwrócić uwagę, że z powodu wysokiej rozdzielczości przestrzennej optycznych technik mikroskopowych (rejestracja trajektorii przedstawionej na rys. 9.15a wykonana została przy użyciu mikroskopu), rozmiar obserwowanego obszaru przepływu jest bardzo mały, znacznie mniejszy od charakterystycznych długości opisujących geometrię kanału. Szerokość rysunku 9.15a pokazującego trajektorię cząstki znacznikowej wynosi jedynie 0.3mm , przy czym szerokość jednego segmentu pofalowania kanału jest równa około 1.5mm (porównaj z rys. 9.4b). W celu zobrazowania dysproporcji pomiędzy wielkością obszaru obserwowanego pod mikroskopem, a wielkością kanału, na rysunku 9.15b pokazano

⁶ W przepływie w pełni laminarnym, bez jakichkolwiek zaburzeń, trajektorie cząstek winny być liniami prostymi; „odejście” zarejestrowanej trajektorii od linii prostej może świadczyć o pojawieniu się zaburzeń poprzecznych przepływu.

zbliżenie jednego segmentu pofalowania, z naniesioną czerwoną linią przedstawiającą lokalizację wykonanego pomiaru⁷.

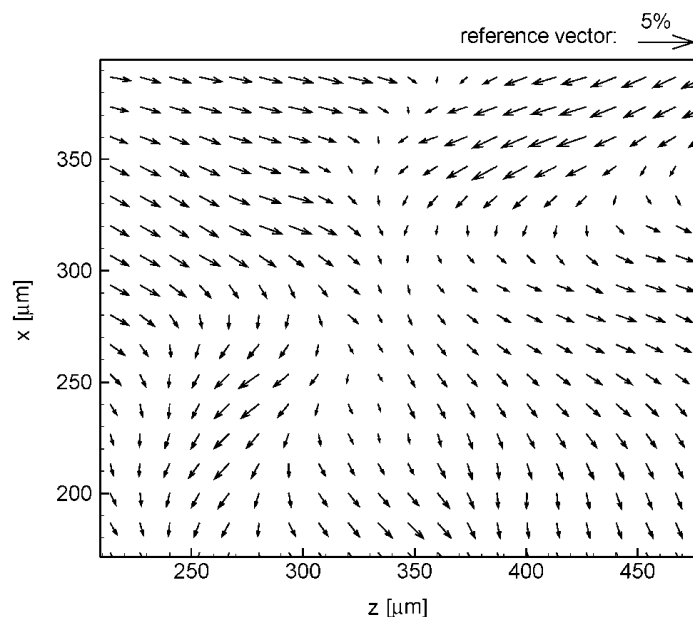


Rys. 9.15. a) Trajektoria pojedynczej cząsteczki znacznikowej zarejestrowana w kanale z pofalowaną ścianką w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re = 60$; szerokość zdjęcia wynosi 0.3mm , a czas ekspozycji wykonania fotografii 0.12s . b) Lokalizacja w kanale, gdzie zarejestrowano trajektorię cząstki.

Wykonane ilościowe pomiary chwilowego pola prędkości techniką μPIV dały wyniki zgodne ze wcześniejszymi rezultatami uzyskanymi numerycznie czy wynikającymi z liniowej analizy stabilności przepływu. Pokazane na rysunku 9.16 pole zaburzeń prędkości $x - z$, zmierzone w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re = 100$, wskazuje na obecność wyraźnych zawirowań. Zaburzenia przepływu, zdefiniowane tak samo jak w analizie numerycznej, w płaszczyźnie pomiaru, tj. płaszczyźnie $x - z$ mają wartość kilku procent średniej prędkości przepływu, co jest wynikiem zbliżonym do uzyskanego numerycznie. Z uwagi na bardzo małą powierzchnię obszaru, dla którego możliwe jest wyznaczenie pola prędkości techniką μPIV , trudne jest bezpośrednie porównanie uzyskanego wyniku z polem zaburzeń obliczonym numerycznie, pokazanym na rysunku 9.11 (w jednostkach bezwymiarowych rozmiar wyznaczonego eksperymentalnie pola zaburzeń wynosi 0.68×0.56 , czyli znacznie mniej od rozmiaru obszaru pokazanego na rys. 9.11). Niemniej jednak widoczne zawirowania mogą świadczyć o istnieniu złożonej struktury przepływu, podobnej do wyznaczonej numerycznie oraz potwierdzają, że możliwa jest destabilizacja przepływu przy stosunkowo niskich liczbach Reynoldsa ($Re < 100$).

Obecność złożonych, trójwymiarowych zawirowań oraz fakt, że zawirowania te mają charakter fali biegnącej, mogą mieć istotny wpływ na wzrost intensywności procesów wymiany ciepła i masy obserwowanych w przepływie przez kanał z odpowiednio pofalowanymi ściankami. Taka skomplikowana struktura ruchu możliwa jest do osiągnięcia w przepływach laminarnych z niskimi liczbami Reynoldsa, nie wprowadzając istotnego wzrostu oporów hydraulicznych przepływu przez taki kanał. Można zatem oczekiwać, że odpowiednie pofalowanie ścianek kanału może być ważnym zabiegiem poprawiającym wydajność pracy mikromieszalników, mikroreaktorów czy też mikrowymienników ciepła, gdzie na ogół mają miejsce przepływy z niskimi liczbami Reynoldsa, przez co występują trudności z wymuszeniem dostatecznej intensywności procesów wymiany ciepła i masy. Małe wymiary kanałów występujących w takich urządzeniach powodują znaczne opory przepływu. Dlatego ważne jest stosowanie rozwiązań poprawiających wydajność pracy układów mikroprzepływowych nie wprowadzając zbyt dużych dodatkowych oporów przepływu.

⁷ Czerwona linia widoczna na zbliżeniu rysunku 6.15b jest około 4 – 5 razy dłuższa od zarejestrowanej trajektorii pokazanej na rysunku 6.15a – za względu na czytelność rysunku zrezygnowano z wrysowania linii o długości identycznej z trajektorią.



Rys. 9.16. Wyznaczone eksperymentalnie pole zaburzeń składowych prędkości u_{xz} , zmierzone 0.2 mm poniżej górnej płaskiej ścianki kanału, w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re = 100$. Szerokość i wysokość rysunku w jednostkach bezwymiarowych (1 bezwymiarowe = $1/2$ średniej wys. kanału = $396.5\mu\text{m}$) wynoszą odpowiednio $z = 0.68$ i $x = 0.56$.

Należy jednak pamiętać, że opisane w cytowanych wyżej pracach warunki utraty stateczności dotyczą sytuacji wyidealizowanej, a mianowicie zakłada się, że obszar przepływu (kanał) jest nieograniczony zarówno w kierunku ruchu płynu (ang. streamwise) jak i w kierunku poprzecznym tj. kierunku pofalowania ścian (ang. spanwise). Innymi słowy, pomijany jest całkowicie wpływ ścian bocznych (przepływ jest okresowy w kierunku poprzecznym do ruchu płynu), a także efekty przepływowe na wlocie i wylocie z kanału. Można podejrzewać, że wyznaczone dla tak wyidealizowanego przypadku warunki destabilizacji są zbyt „optymistyczne”, tj. faktyczna wartość krytycznej liczby Reynoldsa będzie większa. Powstaje pytanie: czy pozostaje ona nadal dość mała, aby pofalowanie poprzeczne mogło być uznane za interesujące z punktu widzenia destabilizacji i intensyfikacji mieszania w przepływie laminarnym?

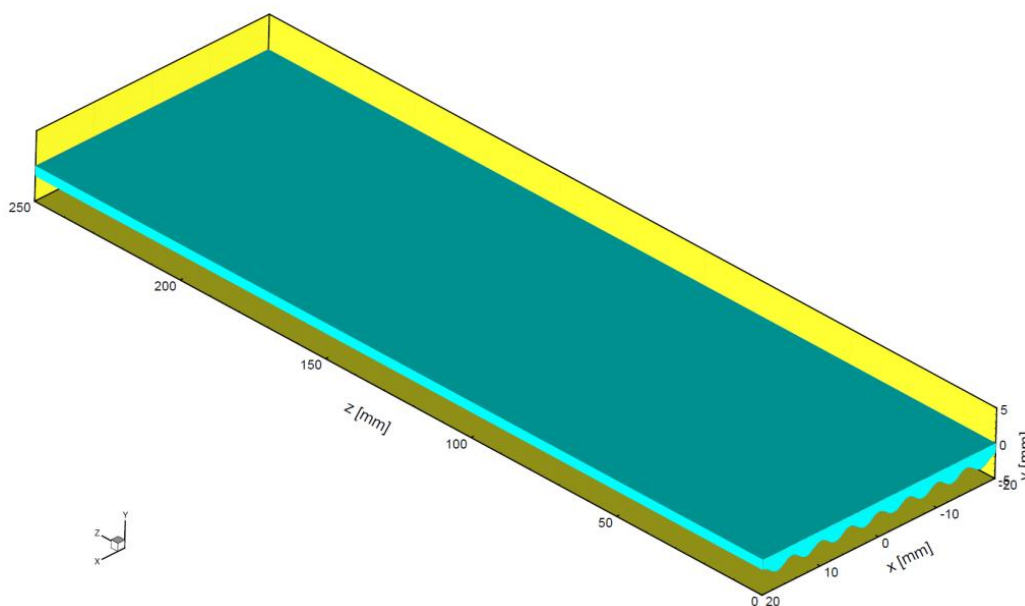
Istnieje jeszcze inny potencjalny problem. Otóż, w przypadku kanału o przekroju poprzecznym charakteryzującym się dużym stosunku szerokości do wysokości może pojawić się problem z utrzymaniem dokładnie prostopadłej orientacji napędzającego przepływ gradientu ciśnienia względem kierunku pofalowania. Ewentualne odchylenie od idealnej konfiguracji powodować będzie zmianę formy przepływu głównego (nie będzie on już prostym przepływem z jedną tylko niezerową składową pola prędkości), której wpływ na charakterystyki statecznościowe trudno przewidzieć.

W powyższych rozważaniach wynika, że z praktycznego punktu widzenia kluczowe znaczenie ma umiejętność określenia jaki wpływ na warunki krytyczne przepływu ma wpływ skończonej szerokości kanału (wpływ ścian bocznych), a także – dla kanałów o dużej szerokości – niewielkie odchylenie kierunku gradientu ciśnienia od idealnie prostopadłego względem pofalowania ścian.

ZAŁĄCZNIK NR 8

ANALIZA NUMERYCZNA CFD WPLYWU POFALOWANIA GEOMETRII NA OPORY HYDRAULICZNE, STRUMIEŃ CIEPŁA ORAZ STRUKTURĘ PRZEPŁYWU

Liniowa analiza stateczności przepływu w pofalowanym kanale wskazała na możliwość powstania zaburzeń o małej amplitudzie destabilizujących przepływ przy liczbach Reynoldsa rzędu 100. Potwierdzenie tej hipotezy wymaga przeprowadzenia badań eksperymentalnych. Jednak z uwagi na koszty i pracochłonność parametrycznych badań doświadczalnych, w pierwszym etapie przeprowadzono symulację numeryczną rozpatrywanego modelu poszukując rozwiązania pełnego, trójwymiarowego układu równań Naviera-Stokesa dla przepływu w kanale o żądanej geometrii ścianek.



Rys. 1. Przykładowa geometria układu zdefiniowana na potrzeby symulacji numerycznych.

Symulacja numeryczna przepływu wykonana została metodą objętości skończonych, przy wykorzystaniu komercyjnego pakietu do obliczeń przepływowych Fluent (Ansys Inc.). Niestacjonarny przepływ nieściśliwej cieczy lepkiej w kanale modelowano przez bezpośrednie rozwiązywanie w trzech wymiarach pełnych równań Naviera-Stokesa (DNS – Direct Numerical Simulation; opis wykorzystanej metody numerycznej przedstawiony został w Załączniku nr 1). Uzyskanie poprawnych rozwiązań dla zaburzonego niestabilnościami ruchu płynu wymagało wykonania obliczeń dla bardzo małych kroków czasowych i bardzo gęstej siatki obliczeniowej. Odpowiadało to ponad 10 mln elementów dla zadanej geometrii i wymagało wielotygodniowych obliczeń dla uzyskania wstępnych wyników dla wybranej geometrii i liczby Reynoldsa. Z tego względu rozpatrywanie przepływu w bardzo długim

kanale i śledzenie narastania zaburzeń wymagałoby olbrzymich mocy obliczeniowych i nie mogło być zrealizowane. Wobec tego, w celu detekcji możliwych do wystąpienia zaburzeń przepływu w modelu numerycznym założono przepływ w nieskończonym kanale przyjmując okresowe warunki brzegowe na wlocie i wylocie kanału. Na potrzeby obliczeń wygenerowano geometrie identyczne do planowanych w eksperymencie (geometrie $G_0 - G_4$ oraz G_p , zdefiniowane w rozdziale 2 głównej części raportu). Przykładowa domena obliczeniowa dla geometrii G_0 pokazana została na rysunku 1.

Rozpatrywane warianty geometrii kanału, zdefiniowane w rozdziale 2 głównej części niniejszego raportu, składały się z od 5 do 10 segmentów pofalowania. Referencyjna geometria konfiguracji bazowej G_p miała natomiast obie ścianki płaskie (zobacz rysunek 2.7 w głównej części raportu). W każdym przypadku jednak domena numeryczna stanowiła obszar o długości 250mm, szerokości 40mm i średniej wysokości 2mm. Dla każdego przypadku kanał miał identyczne pole przekroju poprzecznego. Na ściankach górnej i dolnej oraz bocznych przyjęto standardowe warunki braku poślizgu, a na ściankach przedniej i tylnej (kierunek O_z , tj. kierunek przepływu), jak już wspomniano wyżej, przyjęto warunki okresowości z zadaniem strumienia masy, zapewniającym żadaną wartość prędkości przepływu.

Tabela. 1. Parametry symulacji numerycznych DNS

Pakiet obliczeniowy	Fluent 12.1, podwójna precyzja
Model	3-D, laminarny, niestacjonarny, nieściśliwy
Płyn	$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, lepkość zmieniana dla osiągnięcia zadanej liczby Reynoldsa
Wydatek masowy	$\dot{m} = 0.16 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
Wlot & wylot	warunki okresowe
Schemat	drugiego rzędu, upwind
Krok czasowy	0.0002 s
Kryterium zbieżności	residua $< 10^{-6}$
Siatka	strukturalna, od 10mln do 20mln elementów, w zależności od geometrii
Typowy czas obliczeń	1s czasu fizycznego $\approx$ 1 miesiąc czasu CPU

Liczba Reynoldsa charakteryzująca przepływ została zdefiniowana w oparciu o połowę średniej wysokości kanału i maksymalną prędkość przepływu. W celu wyznaczenia granicy stabilności przepływu, poszukiwano krytycznej liczby Reynoldsa, powyżej której zaburzenia przepływu będą ulegały wzmocnieniu. W tym celu jako warunek początkowy dla wszystkich symulacji przyjęto zaburzone pole przepływu otrzymane dla liczby $Re = 50$. Przeprowadzono obliczenia dla kilku różnych, narastających wartości liczb Reynoldsa z zakresu od $Re = 50$ do $Re = 3000$ (w zależności od geometrii; $Re = 50, 75, 90, 100, 150, 200, 500$ oraz 3000). Zmian liczby Reynoldsa przepływu dokonywano poprzez zmiany lepkości płynu, przy zachowaniu wszystkich pozostałych parametrów przepływu. W ten sposób

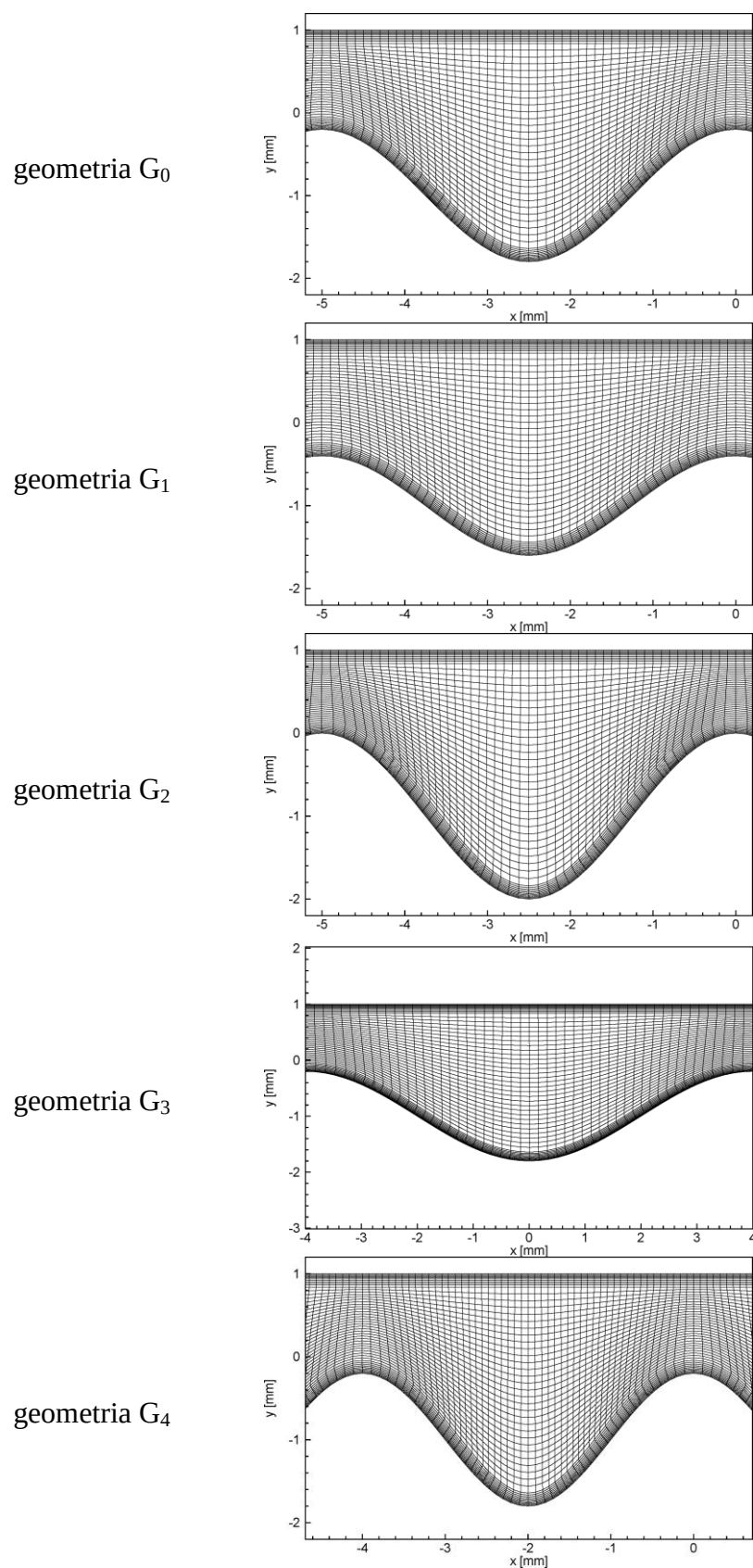
zapewniono jednakowe skalowanie rozwiązań dla znacznego zakresu zmian liczby Reynoldsa. Szczegółowe parametry przeprowadzonych obliczeń zestawione zostały w tabeli 1.

Należy podkreślić, że przeprowadzone symulacje numeryczne były bardzo kosztowne numerycznie, zarówno pod względem czasu CPU, jak i zapotrzebowania na pamięć operacyjną RAM. Wymuszony specyfiką symulacji DNS rozmiar siatki, wynoszący od 10mln komórek (dla geometrii G_3 składającej się z 5 segmentów pofalowania), do 20mln komórek (dla geometrii G_4 składającej się z 10 segmentów pofalowania) spowodował gigantyczne zapotrzebowanie wykonywanych obliczeń na pamięć RAM, która wynosiła od 15 do 30 GB przy obliczeniach „na jednym procesorze” i wzrastała przy podziale zadania na wiele procesów. Podział ten był jednak konieczny, gdyż duży rozmiar siatki numerycznej oraz zadany bardzo krótki krok czasowy równy 0.0002s sprawiły, że obliczenia stały się bardzo „kosztowne numerycznie”. Aby skrócić czas obliczeń, symulacje prowadzono najczęściej równolegle, z podziałem na od 5 do 10 równoległych procesów (w zależności od geometrii, tj. od ilości segmentów pofalowania). Typowy czas prowadzenia takiej „równoległej” symulacji to około 1 miesiąc dla 1 sekundy czasu fizycznego symulowanego przepływu. Wszystkie symulacje wykonane zostały na dwóch komputerach dużej mocy¹ będących na wyposażeniu laboratorium numerycznego Zakładu Mechaniki i Fizyki Płynów IPPT PAN.

Ogromna czasochłonność obliczeń uniemożliwiła wykonanie pełnej analizy numerycznej rozwoju zaburzeń w czasie. Z uwagi na to, że głównym celem niniejszych symulacji było stwierdzenie czy destabilizacja przepływu i dalsze wzmacnianie początkowych zaburzeń jest możliwe w zaproponowanych konfiguracjach geometrycznych kanału, obliczenia wykonano jedynie dla wybranych, wymienionych na wstępie wartości liczby Reynoldsa i stosunkowo krótkich czasów rozwoju przepływu. Obliczenia przerywano w momencie kiedy stawało się możliwe stwierdzenie, że początkowe, niewielkie zaburzenia poprzeczne przepływu ulegają wzmacnianiu lub też, że są wygaszane. Dzięki temu było możliwe wykrycie wspomnianej krytycznej wartości liczby Reynoldsa, powyżej której zachodzi wzmacnianie zaburzeń, a poniżej której – wygaszanie. Nie starano się tutaj natomiast, jak to miało miejsce w symulacjach przeprowadzonych dla geometrii uproszczonej (załącznik nr 7), wyznaczyć intensywności tego wzmacniania czy wygaszania, oraz nie próbowano określić fluktuacji pola prędkości w stanie saturacji (tzn. nie starano się określić maksymalnych, możliwych do osiągnięcia wartości poprzecznych zaburzeń prędkości dla poszczególnych geometrii i liczb Reynoldsa).

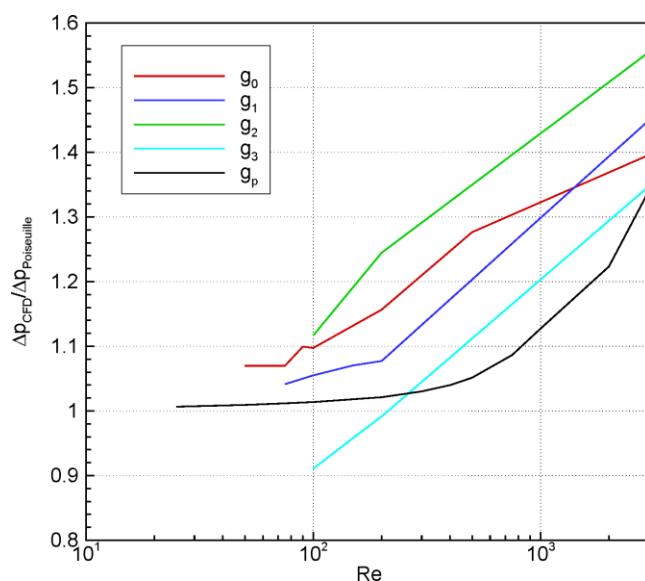
Na rysunku 2 przedstawiono kształty fragmentów geometrii kanałów dla poszczególnych wariantów pokazane na przekrojach poprzecznych z zaznaczoną siatką obliczeniową. W każdym z przypadków wygenerowano strukturalną, sześcienną siatkę numeryczną z warstwą przyścienną. Dla geometrii G_0 , G_1 oraz G_2 siatka składała się z 16 milionów elementów, dla geometrii G_3 – z 10 mln, a dla geometrii G_4 – z 20mln elementów.

¹ 24-procesorowy serwer numeryczny wyposażony w 128GB pamięci operacyjnej RAM oraz 8-procesorowy serwer z 32GB pamięci RAM.



Rys. 2. Siatka numeryczna wygenerowana dla poszczególnych geometrii kanału.

Zgodnie z modelem teoretycznym zaprojektowana geometria pofalowania kształtu ścianki kanału nie wprowadza istotnych, dodatkowych oporów hydraulicznych, a dla małych liczb Reynoldsa może je nawet obniżyć. Przeprowadzone obliczenia numeryczne potwierdziły te przewidywania. Na rysunku 3 wykreślono wyznaczone numerycznie znormalizowane gradienty ciśnienia w funkcji liczby Reynoldsa, dla poszczególnych konfiguracji geometrycznych kanału. W celu łatwiejszej analizy i interpretacji, wyznaczone w symulacjach numerycznych wartości gradientu ciśnienia znormalizowano gradientem ciśnienia wyznaczony teoretycznie dla przepływu Poiseuille’a. Taka prezentacja wyznaczonych gradientów ciśnienia pozwoli na łatwe późniejsze bezpośrednie porównanie wyników numerycznych, z wynikami uzyskanymi eksperymentalnie.



Rys. 3. Wyznaczony numerycznie znormalizowany gradient ciśnienia w funkcji liczby Reynoldsa dla poszczególnych geometrii.

Można zauważyć, że w zakresie niewielkich liczb Reynoldsa, zbliżonych do 100, w każdym z analizowanych wariantów konfiguracji geometrii kanału, wyznaczone numerycznie gradienty ciśnienia są zbliżone do teoretycznych oporów hydraulicznych (wartości zbliżone do 1 na rysunku 3). Co ważne, dla geometrii G_3 , składającej się z 5 segmentów pofalowania ($M=5$) o amplitudzie $s=0.8\text{mm}$ opór hydrauliczny jest mniejszy od teoretycznego o prawie 10%, co potwierdza przewidywania teoretyczne wskazujące, że odpowiednio dobrane pofalowanie ścianek może spowodować obniżenie oporów hydraulicznych. Efekt obniżenia oporu hydraulicznego, jak wynika z rysunku 3, jest widoczny w symulacjach numerycznych jedynie dla geometrii G_3 . Z tego też względu geometrię G_3 należy uznać za najbardziej optymalną, jeśli za parametr decydujący przyjmiemy minimalizację oporów hydraulicznych w projektowanym kanale (jest to zgodne z wynikiem późniejszej analizy eksperymentalnej – porównaj rysunek 17 w załączniku nr 9). Niemniej jednak, w pozostałych geometriach zaobserwowany wzrost gradientu ciśnienia jest nadal niewielki. W geometrii G_0 , uznanej na

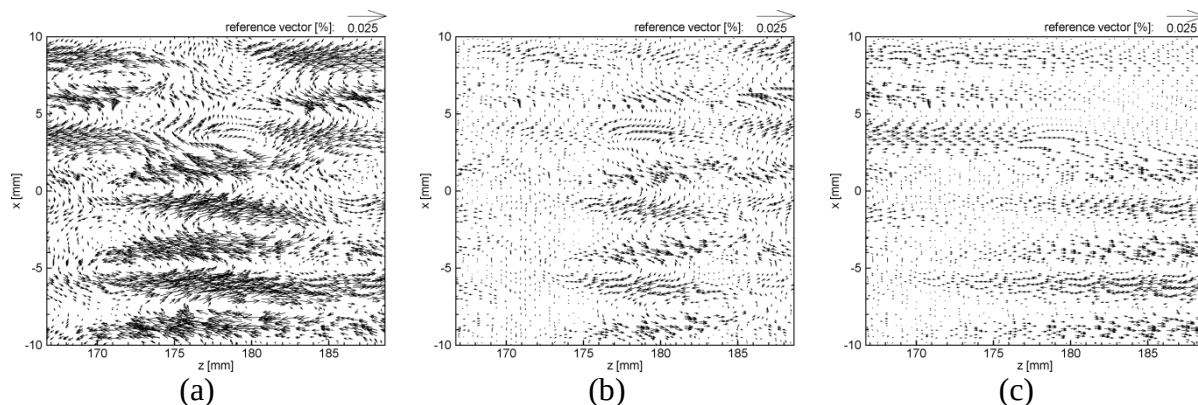
podstawie modelu teoretycznego za optymalną z punktu widzenia destabilizacji przepływu, wzrost oporów przepływu wynosi zaledwie 8% dla liczby Reynoldsa $Re=100$.

Podczas wykonywania symulacji numerycznych ciekawym wydało się zbadanie, jak wprowadzenie modyfikacji geometrii ścianek wpływa na warunki wymiany ciepła w układzie. Z uwagi na koszt numeryczny, analizę taką wykonano jedynie dla geometrii o optymalnym kształcie G_0 oraz, w celu porównania dla geometrii bazowej G_p o ściankach płaskich. Symulacje wykonano dla przepływu z liczbą Reynoldsa równą $Re=100$ i starano się w nich sprawdzić ilość ciepła możliwego do odebrania przez chłodny płyn utrzymywany w temperaturze 20°C od pofalowanej ścianki kanału wykonanej z aluminium, utrzymywanej w stałej temperaturze 30°C . W takich warunkach, dla płaskiej ścianki geometrii bazowej, obliczony całkowity strumień ciepła wynosi 135.8W . Dla takiego samego przepływu w kanale o optymalnie pofalowanej ściance (geometria G_0) obliczony strumień ciepła osiąga wartość 208.4W , wskazując na ponad 50% wzrost wydajności takiego wymiennika ciepła. Zaobserwowany wzrost odbieranego strumienia ciepła spowodował wzrost liczby Nusselta od 1525 dla geometrii G_p , do 1922 dla optymalnej geometrii G_0 . Oczywiście udział w zwiększeniu strumienia ciepła ma również wzrost pola powierzchni pofalowanej ścianki kanału. Jednak, jeśli dokonać porównania powierzchni ścianki płaskiej w geometrii G_p i powierzchni pofalowanej ścianki w geometrii G_0 , to okaże się, że wzrost pola powierzchni wynosił niespełna 22% ($A_{G_0}/A_{G_p} = 0.01218\text{m}^2/0.01\text{m}^2 \cong 1.218$), co tylko częściowo tłumaczy tak wysoki wzrost wydajności cieplnej. Podkreślić należy również, że wprowadzone pofalowanie ścianki, przy rozpatrywanej liczbie Reynoldsa $Re=100$, wprowadziło jedynie 8% wzrost oporów hydraulicznych. Można zatem przypuszczać, że proponowane w niniejszym projekcie modyfikacje geometrii ścianek kanałów, mogą okazać się ciekawym i wydajnym sposobem zwiększenia sprawności kompaktowych, niewielkich wymienników ciepła, w których z uwagi na niewielkie wymiary i brak możliwości wymuszenia przepływów ze znacznymi prędkościami (i co z tym idzie ze znacznymi ciśnieniami), nie jest możliwe wygenerowanie przepływu turbulentnego, który zapewniłby dostateczną ilość odbieranego ciepła.

Podstawowym celem wykonanych symulacji numerycznych było potwierdzenie przypuszczeń teoretycznych o możliwości destabilizacji przepływu w kanałach o proponowanej geometrii już przy niewielkich liczbach Reynoldsa. W tym celu, jak napisano na wstępie, wykonano szereg symulacji dla narastających liczb Reynoldsa w poszczególnych wariantach geometrii, które miały wykazać, że w przepływach z niskimi liczbami Reynoldsa można uzyskać przepływ zaburzony. Symulacje te miały również na celu znalezienie przybliżonych wartości liczb Reynoldsa, powyżej których zaburzenia będą ulegać wzmocnieniu, a poniżej – wygaszaniu.

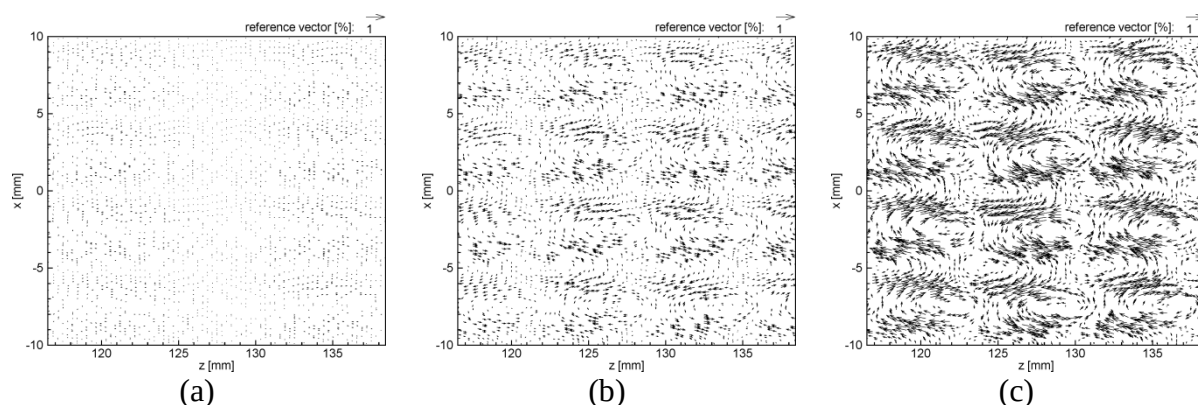
Jako parametr charakteryzujący wielkość zaburzenia przepływu przyjęto znormalizowaną wartość fluktuacji prędkości. Zdefiniowano ją jako chwilowe fluktuacje prędkości (czyli różnice chwilowego pola i uśrednionego po czasie pola prędkości) podzielone przez prędkość maksymalną obserwowaną w danym przepływie. Taką definicję przyjęto, gdyż analizowane przepływy są silnie zdominowane przez jedną składową prędkości wzdłuż osi kanału (w kierunku Oz na rysunku 1). Proponowane znormalizowane fluktuacje

pokażą zatem wartość poprzecznych fluktuacji prędkości wyrażonych jako ułamek (procent) dominującego przepływu głównego. Dla zilustrowania analizowanego efektu poniżej wykreślono pola zaburzeń na poziomej płaszczyźnie z-x na środku wysokości kanału (zobacz rysunek 1).



Rys. 4. Wygaszanie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=50$ przez kanał o geometrii G_0 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z-x dla kolejnych chwil czasowych oddalonych o $\Delta t=50ms$.

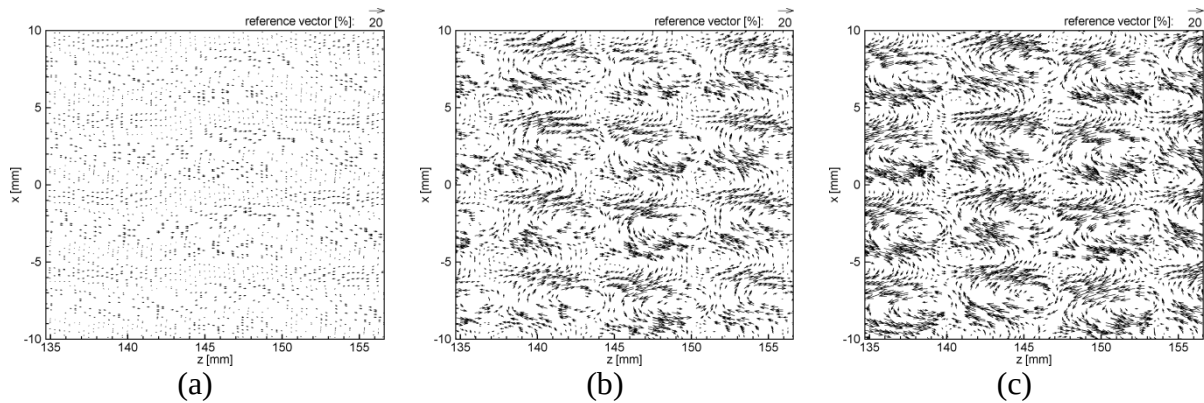
Na rysunku 4 pokazane zostały chwilowe zaburzenia prędkości w płaszczyźnie z-x wyznaczone numerycznie w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=50$ w kanale o geometrii G_0 , wyrysowane w trzech kolejnych chwilach czasowych co 50ms. Jak można zauważyć następuje tutaj wygaszanie początkowych, niewielkich zaburzeń, które mają postać wirów. Wzrost prędkości przepływu do wartości odpowiadającej liczbie Reynoldsa $Re=75$ (rys. 5), spowodował, że zaburzenia początkowe zaczęły ulegać łagodnemu wzmacnianiu, osiągając wartość 1% przepływu głównego.



Rys. 5. Wzmacnianie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=75$ przez kanał o geometrii G_0 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z-x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50ms$.

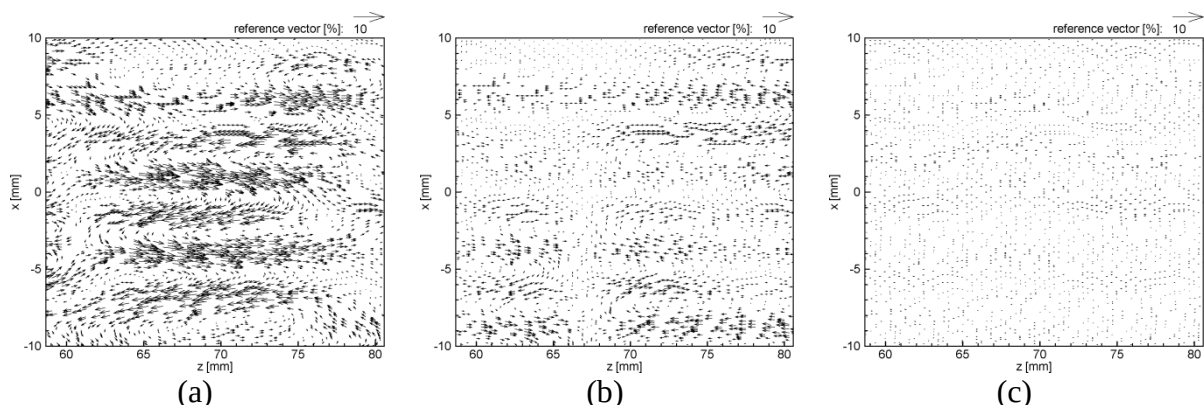
Dalszy wzrost liczby Reynoldsa do wartości $Re=100$ wywołał natomiast już bardzo silne wzmacnianie zaburzeń, które w bardzo krótkim czasie osiągnęły wartość około 20% prędkości maksymalnej przepływu głównego (rys. 6). Można zatem wnioskować, że

krytyczna wartość liczby Reynoldsa, rozdzielająca zakres wygaszania i wzmacniania początkowych zaburzeń, dla geometrii optymalnej G_0 , znajduje się pomiędzy $Re=50$, a $Re=75$, z przypuszczeniem wartości zbliżonej do $Re=75$. Wynik ten jest w dobrej zgodności z przypuszczeniami teoretycznymi, gdzie wyznaczono krytyczną wartość liczby Reynoldsa na poziomie 60.



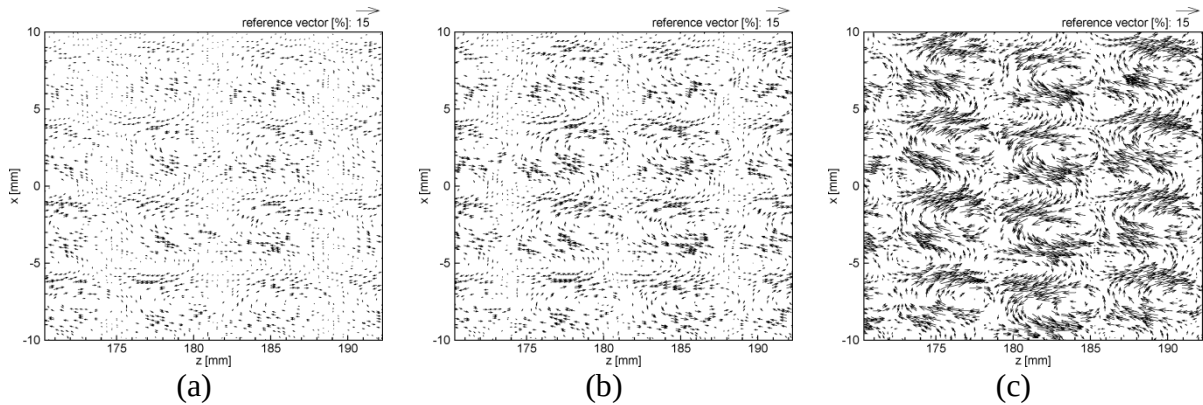
Rys. 6. Wzmacnianie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=100$ przez kanał o geometrii G_0 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z - x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50$ ms.

Podobne zachowanie przepływu można zaobserwować w geometrii G_1 , gdzie jedynie niewielkiemu przesunięciu w kierunku wyższych wartości uległo położenie krytycznej wartości liczby Reynoldsa. W geometrii tej, w porównaniu z geometrią optymalną G_0 , zmniejszono jedynie amplitudę pofalowania do $S=0.6$, przy zachowaniu długości tego pofalowania (zarówno w geometrii G_0 , jak i G_1 , było 8 segmentów pofalowania). W przepływie przez tę geometrię z liczbą Reynoldsa $Re=75$ obserwujemy dobrze widoczne wygaszanie nawet stosunkowo dużych, bo wynoszących aż 10% zaburzeń początkowych, które w krótkim czasie zostają wytłumione do wartości poniżej 1% (rysunki 7a, b, c).



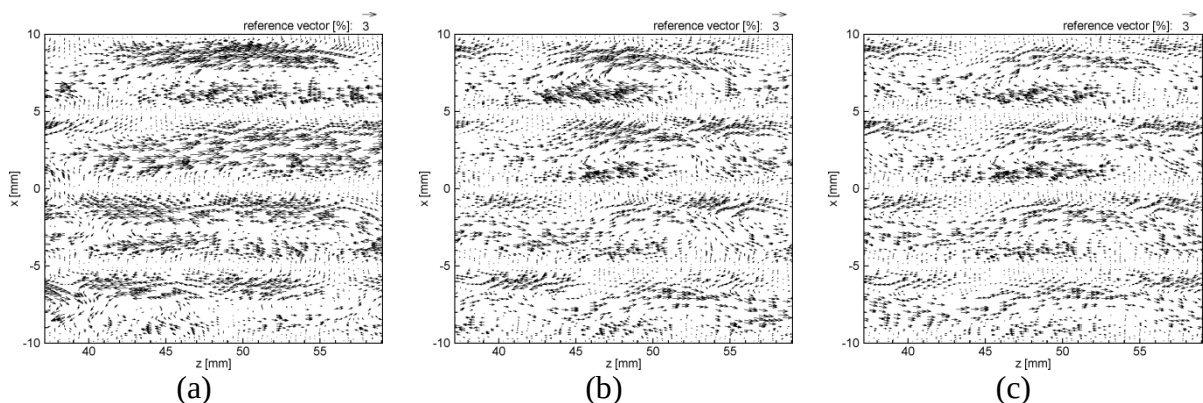
Rys. 7. Wygaszanie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=75$ przez kanał o geometrii G_1 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z - x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50$ ms.

Zwiększenie liczby Reynoldsa do wartości $Re=100$ spowodowało jednak przejście przepływu w reżim, w którym zaburzenia początkowe podlegają już wzmacnianiu. Po niewielkim czasie, zaburzenia pokazane na rysunku 8 osiągają wartość około 15%. Dla geometrii G_1 krytyczna liczba Reynoldsa przybiera wartość pomiędzy $Re=75$ i $Re=100$. Powyżej liczby Reynoldsa rzędu 200 zaburzenia rosną już dla wszystkich 5 analizowanych geometrii pofalowanej ścianki.



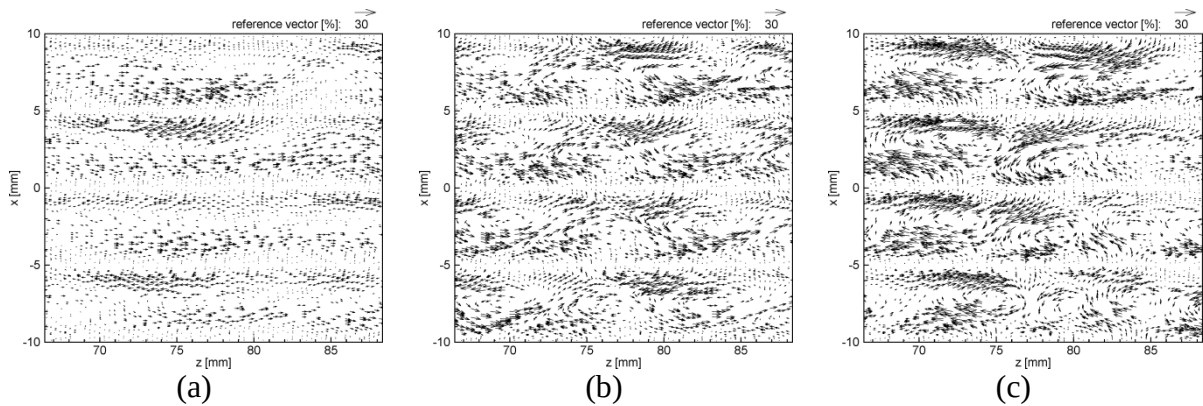
Rys. 8. Wzmacnianie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=100$ przez kanał o geometrii G_1 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z - x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50$ ms.

W przepływie przez geometrię G_2 , w której w odróżnieniu od geometrii G_1 zwiększono amplitudę pofalowania do wartości $s=1.0$ mm, zauważono dalsze niewielkie przesunięcie krytycznej liczby Reynoldsa w kierunku wyższych wartości. Pokazane na rysunku 9 zaburzenia dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re=100$ wykazują bardzo niewielką tendencję do tłumienia fluktuacji poprzecznych. Jednak tłumienie to jest ledwo widoczne, a zaburzenia cały czas utrzymują się na poziomie bliskim 3%, co może świadczyć o zbliżaniu się do krytycznej wartości liczby Reynoldsa.



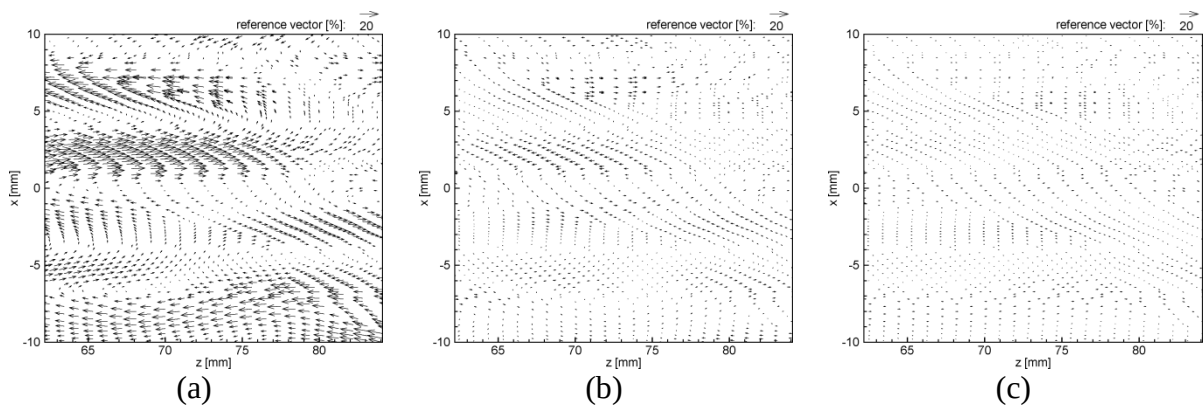
Rys. 9. Wygaszanie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=100$ przez kanał o geometrii G_2 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z - x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50$ ms.

Zwiększenie liczby Reynoldsa do $Re=200$ wywołało już spodziewane silne wzmacnianie zaburzeń początkowych, które osiągnęły tutaj maksymalnie wartość aż około 30% (rys. 10).

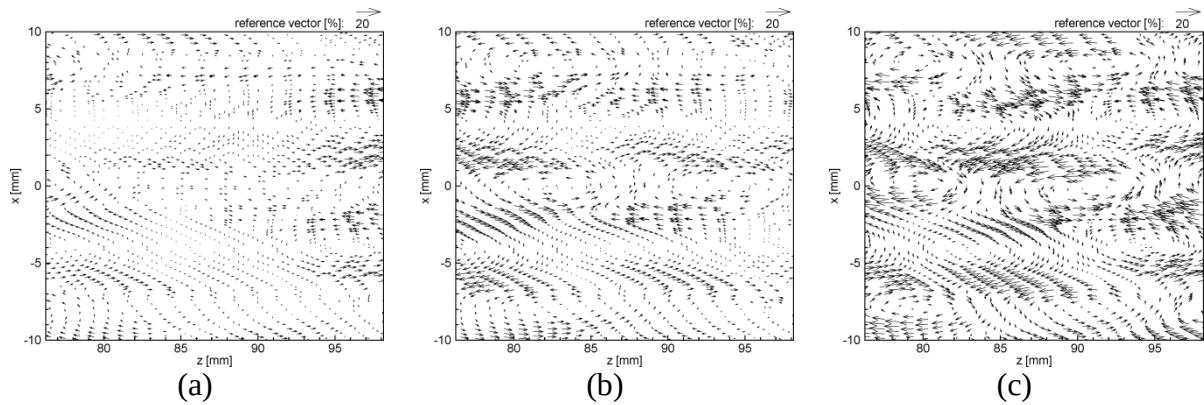


Rys. 10. Wzmacnianie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=200$ przez kanał o geometrii G_2 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z - x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50$ ms.

W geometrii G_3 wartość krytycznej liczby Reynoldsa położona jest pomiędzy 100 i 150. Jak możemy wywnioskować z rysunku 11, przy liczbie Reynoldsa $Re=100$ w tej geometrii następuje dobrze widoczne wygaszanie zaburzeń początkowych, a przy liczbie Reynoldsa $Re=150$ – wzmacnianie (rys. 12).



Rys. 11. Wygaszanie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=100$ przez kanał o geometrii G_3 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z - x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50$ ms.



Rys. 12. Wzmacnianie początkowych zaburzeń w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=150$ przez kanał o geometrii G_3 : (a), (b), (c) - znormalizowane zaburzenia pola prędkości wykreślone na płaszczyźnie z - x dla kolejnych chwil oddalonych o $\Delta t=50$ ms.

Podsumowując niniejszą analizę możemy stwierdzić, że symulacje numeryczne DNS potwierdziły wykazaną teoretycznie możliwość destabilizacji przepływu już przy bardzo niewielkich liczbach Reynoldsa. Ponadto pokazano, że wyznaczona numerycznie krytyczna liczba Reynoldsa, rozdzielająca reżim wygaszania i wzmacniania początkowych zaburzeń, dla poszczególnych geometrii wynosi:

- dla G_0 : $50 < Re_{kr} < 75$, przypuszczalnie blisko wartości 75;
- dla G_1 : $75 < Re_{kr} < 100$;
- dla G_2 : $100 < Re_{kr} < 200$, przypuszczalnie blisko wartości 100;
- dla G_3 : $100 < Re_{kr} < 150$,

czyli geometrią najbardziej optymalną z punktu widzenia jak najwcześniejszej destabilizacji przepływu jest geometria G_0 (co zostało przewidziane w analizie teoretycznej). Natomiast ze względu na opory hydrauliczne, jak pokazano wcześniej, najbardziej optymalną geometrią jest geometria G_3 .

ZAŁĄCZNIK NR 9

ANALIZA EKSPERYMENTALNA WPLYWU POFALOWANIA GEOMETRII NA OPORY HYDRAULICZNE, STRUMIEŃ CIEPŁA ORAZ STRUKTURĘ PRZEPŁYWU

SPIS TREŚCI

1. Model eksperymentalny	161
2. Opis stanowiska eksperymentalnego	162
3. Jakościowa analiza stabilności przepływu	170
4. Analiza oporów hydraulicznych	174
5. Analiza struktury pola prędkości	177
6. Analiza efektywności mieszania na podstawie pomiaru pola temperatury powierzchni kanałów	204

1. Model eksperymentalny

Analiza struktury przepływu wody przez badany kanał o zmodyfikowanej dolnej ściance oraz analiza oporów hydraulicznych i efektywności mieszania wykonana była na podstawie pomiarów przeprowadzonych w wykonanym z metalu i szkła modelu eksperymentalnym przedstawionym na rysunku 1a i 1b.



Rys. 1. Model eksperymentalny kanału; a) widok kompletnego kanału z zamontowaną wkładką G_3 oraz widocznym układem pomiaru ciśnienia; b) kanał ze zdemontowaną górną ścianką – widoczna przestrzeń montowania wkładek zapewniających odpowiednie pofalowanie dolnej ścianki kanału.

Konstrukcja kanału umożliwia łatwą zmianę metalowych mosiężnych wkładek, które zapewniały odpowiednie zmodyfikowanie dolnej ścianki układu (zobacz rysunek 2.5, 2.6 i 2.7 w dokumencie głównym raportu). Główna część układu wykonana została z aluminium. Podyktowane to było z jednej strony łatwością obróbki mechanicznej podczas frezowania, a z drugiej koniecznością użycia materiału o dobrym przewodnictwie termicznym, ze względu na planowane pomiary strumienia ciepła możliwego do odebrania od ścianek przez przepływającą kanałem wodę. Ważnym czynnikiem, który wpłynął na wybór aluminium była również masa powstałego modelu. Część eksperymentów (μ PIV) wykonywana była bowiem pod mikroskopem, a zbyt duży ciężar modelu mógłby spowodować uszkodzenie mechanicznych elementów stolika mikroskopowego.

Górna ścianka modelu wykonana została ze szkła i była płaską płytką o grubości 2mm. Konieczność wykonania płaskiej i przezroczystej górnej ścianki układu narzucona była przez chęć użycia optycznej techniki pomiarowej – Cyfrowej Anemometrii Obrazowej w mikroskali, tzw. μ PIV. Pozwoliło to uzyskać dobrej jakości niezdeformowane obrazy struktury przepływu wewnątrz kanału. Umożliwiło to również wykonanie pomiarów ciekłokrystalicznych (optyczna obserwacja barwnego pokrycia ciekłokrystalicznego interesującej powierzchni), gdzie ważny jest również niezakłócony optyczny dostęp do analizowanego miejsca w układzie.

Konstrukcja kanału umożliwia wykonanie wszystkich zaplanowanych pomiarów, tj. pomiaru oporów hydraulicznych (pomiar gradientu ciśnienia wzdłuż kanału), pomiaru

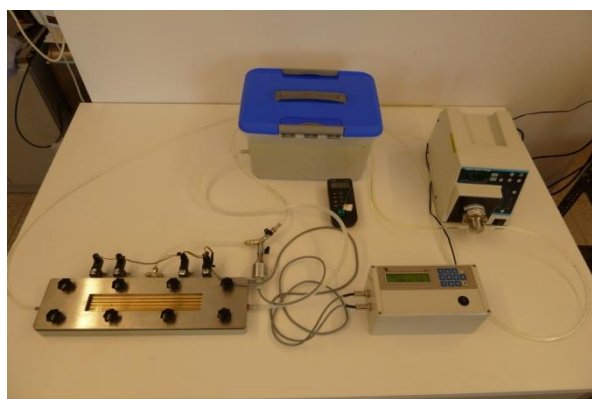
struktury prędkości optyczną techniką μ PIV oraz pomiaru strumienia ciepła odbieranego od dolnej ścianki kanału.

Wymiary kanału oraz wszystkie warianty modyfikacji geometrii jego dolnej ścianki zamieszczone zostały w rozdziale 2 w raporcie głównym.

2. Opis stanowiska eksperymentalnego

Pomiar gradientu ciśnienia

Pomiar gradientu ciśnienia wzdłuż kanału wykonany został przy wykorzystaniu specjalnie zaprojektowanego i wytworzonego systemu pomiaru ciśnienia (rys. 2), opartego o ultraczułe czujniki ciśnienia klasy 0.1 i mikrozawory sterowane mikrokontrolerem elektronicznym połączonym złączem USB z komputerem. Pomiaru dokonywano w 4 punktach umieszczonych na podłużnej osi symetrii kanału. Po jednym punkcie pomiarowym umieszczono w kanale doprowadzającym i odbierającym wodę z pomiarowej części układu (tuż przed i tuż za pofalowaną częścią kanału) oraz 50mm od wlotu do pofalowanej części i 50mm przed wylotem pofalowanej części kanału. Pomiar mógł być odczytywany jako bezwzględna wartość ciśnienia w poszczególnych punktach pomiarowych, bądź też jako różnica ciśnień pomiędzy wybranymi punktami.



(a)



(b)

Rys. 2. Stanowisko pomiarowe do pomiaru gradientu ciśnienia wzdłuż kanału; a) widoczny cały układ składający się z modelu kanału z zamontowanymi mikrozaworami i czujnikiem ciśnienia oraz mikrokontrolera sterującego pomiarem ciśnienia, pompy zębatej wymuszającej przepływ, zbiornika wyrównawczego z wodą oraz termoelektrycznego czujnika temperatury (termopara); b) zbliżenie modelu kanału z zamontowanym czujnikiem ciśnienia i 4 mikrozaworami.

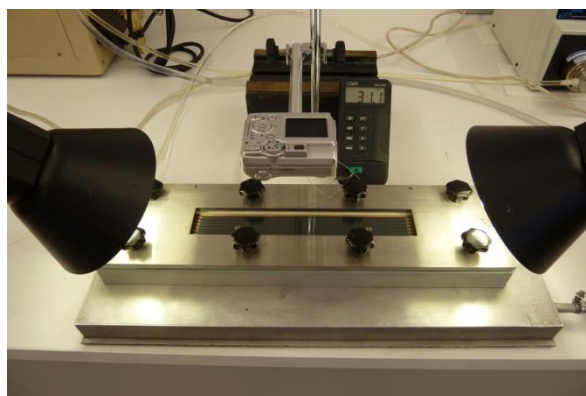
Pomiar strumienia ciepła

W tej części pracy podjęto próbę pomiaru intensywności chłodzenia dolnej, pofalowanej powierzchni kanału przez płynącą kanałem wodę. Pomiaru dokonano na stanowisku pokazanym na rysunku 3. Głównymi elementami stanowiska są dwa wysokowydajne termostaty cieczowe *Julabo F30* (Julabo Labortechnik GmbH). Jeden z nich zapewniał

utrzymywanie zadanej temperatury ścianek kanału, drugi zaś właściwej temperatury wody przepływającej przez kanał. Podczas pomiarów model kanału umieszczony był na specjalnie zaprojektowanej, termostатовanej płycie grzewczej.



(a)



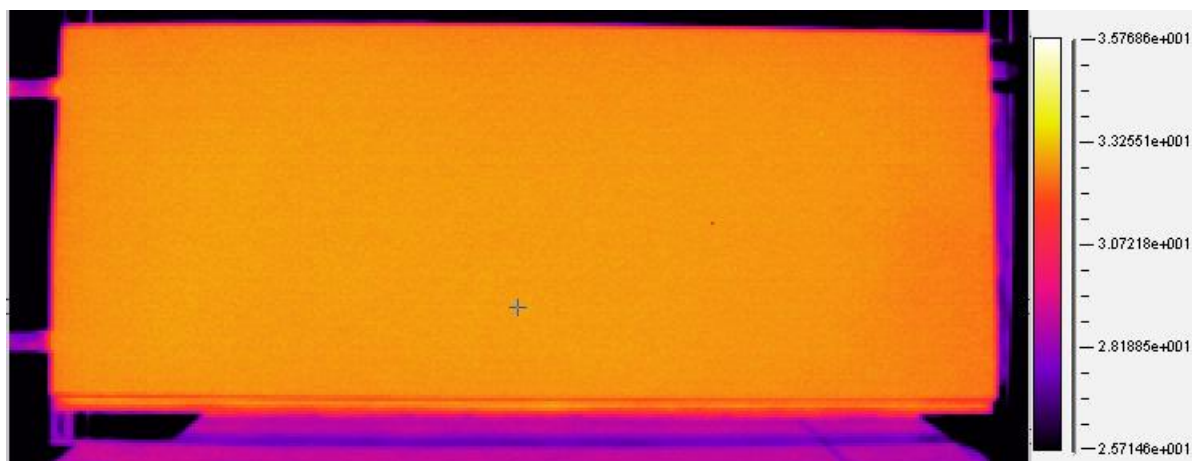
(b)

Rys. 3. Stanowisko eksperymentalne pomiaru intensywności chłodzenia ścianek kanału (a) z widocznym kanałem pomiarowym umieszczonym na termostатовanej płycie grzewczej oraz dwoma termostatami, pompą zębatą wymuszającą przepływ, układem oświetleniowym oraz aparatem cyfrowym rejestrującym zmiany barw pokrycia ciekłokrystalicznego powierzchni kanału; a) widok całego układu; b) zbliżenie kanału pomiarowego z widocznym aparatem cyfrowym, systemem oświetlającym i termoelektrycznym czujnikiem temperatury.

Przed rozpoczęciem pomiarów wykonano test jednorodności temperatury powierzchni płyty grzewczej. Testowego pomiaru dokonano przy użyciu kamery termowizyjnej *FLIR System PHOENIX-MWIR* (rys. 4). Pomiar wykazał, że przy średniej temperaturze powierzchni płyty wynoszącej 35°C (górna granica zakresu temperatur przeprowadzanych pomiarów), niejednorodność temperatury wynosiła maksymalnie 1.8°C . Wynik pomiaru kamerą termowizyjną przedstawiony został na rysunku 5.



Rys. 4. Pomiar jednorodności temperatury powierzchni termostатовanej płyty grzewczej, wykonany kamerą termowizyjną *FLIR System PHOENIX-MWIR*.



Rys. 5. Rozkład temperatury powierzchni termostатовanej płyty grzewczej zarejestrowany kamerą termowizyjną podczas testu jednorodności temperatury.

Pierwszy z termostatów połączony został igielitowymi węzami z termostатовaną płytą grzewczą, na której umieszczony został kanał pomiarowy. Dzięki temu kanał pomiarowy utrzymywany był w zadanej, stałej i kontrolowanej temperaturze. Do zbiornika drugiego termostatu doprowadzone były igielitowe węże, przez które była zasysana woda o zadanej temperaturze przez pompę zębatą i przetłaczana przez kanał pomiarowy.

Wielkością mierzoną podczas tych eksperymentów był rozkład temperatury dolnej, pofalowanej powierzchni kanału, która była pokryta warstwą ciekłokrystaliczną, której barwa w sposób ścisły zależy od temperatury. Rejestracji barwnych obrazów dokonywano za pomocą aparatu cyfrowego *Nikon E4600*. Po wykonaniu kalibracji układu, tzn. powiązaniu rejestrowanych barw warstwy ciekłokrystalicznej z temperaturą mierzoną za pomocą termopary, możliwy był precyzyjny pomiar całego niestacjonarnego pola temperatury interesującej powierzchni (opis kalibracji zamieszczony został w rozdziale 6 niniejszego załącznika).

Przygotowanie interesującej nas powierzchni do pomiarów z użyciem termo czułych warstw ciekłokrystalicznych polegało na pokryciu takiej powierzchni odpowiedniej grubości warstwą ciekłych kryształów (tzw. TLC – Termochromic Liquid Crystals) firmy Hallcrest (*TLC Sprayable Coating BM/R30C5W/C17-10*). Aby wyeliminować wpływ barwy podłoża (mosiężnej powierzchni kanału) pierwszym krokiem prac przygotowawczych było pokrycie powierzchni kanałów dedykowaną czarną farbą podkładową, również firmy Hallcrest (*Sprayable Black Backing Coating BB-G1*). Po wyschnięciu farby podkładowej możliwe było nakładanie warstwami wcześniej odpowiednio rozcieńczonej i przefiltrowanej emulsji ciekłokrystalicznej. Po wyschnięciu całkowita grubość warstwy ciekłych kryształów powinna wynosić od 10 do 20 μm .

Niestety większość emulsji ciekłokrystalicznych jest wodo rozpuszczalna, w tym również użyta emulsja firmy Hallcrest. Aby zabezpieczyć przygotowane pokrycie ciekłokrystaliczne przed działaniem wody konieczne było jeszcze naniesienie warstwy wodoodpornego lakieru bezbarwnego, który z jednej strony odizolowałby emulsję ciekłokrystaliczną od wody, a z drugiej nie zakłócał optycznej obserwacji barw tej emulsji. Dobór takiego lakieru okazał się

zadaniem bardzo trudnym, gdyż „łagodne” lakiery oparte na nieagresywnych rozpuszczalnikach nie zapewniały ochrony przed działaniem wody na wystarczającym poziomie. Nie zapewniały również wystarczająco trwałego związania lakieru z warstwą emulsji ciekłokrystalicznej. Po kilkunastu minutach od rozpoczęcia pomiaru lakier taki ulegał rozmiękczeniu na skutek działania wody, lub też „odklejał” się od zabezpieczonej nim powierzchni. Użycie „silniejszych” lakierów, opartych na agresywnych rozpuszczalnikach, które mogłyby w zadowalającym stopniu ochronić ciekłe kryształy przed wypłukaniem powodowało niestety degradację ciekłych kryształów, przez co intensywność barw była w dużym stopniu stłumiona i pomiar stawał się niemożliwy do wykonania. W ramach projektu wykonano testy kilku rodzajów lakierów, począwszy od akrylowych wodorozpuszczalnych (ale wodoodpornych), przez akrylowe olejowe, po emalie i lakiery poliuretanowe. Lakiery akrylowe nie zapewniały wystarczającej ochrony przed wodą. Emalie natomiast niszczyły wrażliwą na działanie silnych substancji chemicznych strukturę ciekłych kryształów. Powodzeniem zakończyła się dopiero próba z użyciem lakieru poliuretanowego (HartzLack® Polyurethan Satin mat). Pokrycie to było wystarczająco dobrze związane z podłożem, odporne na działanie wody (po odpowiednio długim okresie schnięcia, tj. 2-3 dni) i dostatecznie transparentne. Nie powodowało również znaczącego pogorszenia intensywności barw emulsji ciekłokrystalicznej. Ogólny wynik zastosowania tego lakieru uznano za zadowalający i właściwe pomiary wykonano z zastosowaniem tego lakieru poliuretanowego.

Wszystkie pokrycia badanych powierzchni (farba podkładowa, ciekłe kryształy oraz lakier zabezpieczający) наносzono przy użyciu aerografu (Paasche Talon), który umożliwiał precyzyjne ustawienia natryskiwania, takie jak ilość podawanej cieczy, która ma być наносzona, strumień powietrza unoszącego tą ciecz oraz wielkość kropelek wytwarzanego aerozolu i kąt, z jakim ten aerozol był wytłaczany z aerografu.



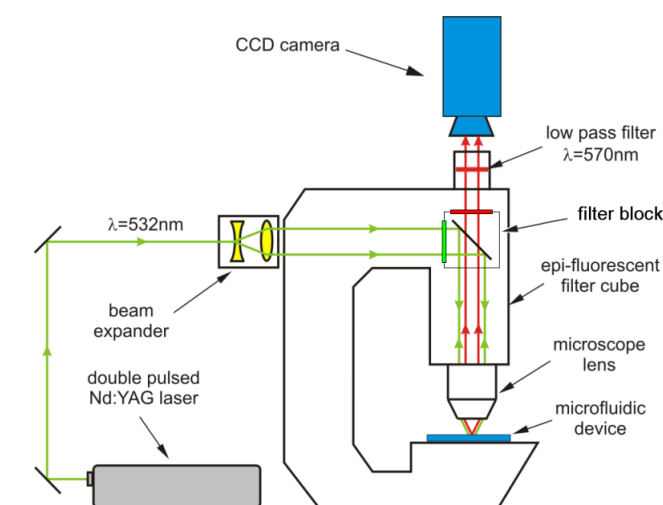
Rys. 6. Płytki w trakcie testu odporności pokrycia ciekłokrystalicznego na działanie lakieru.

Każda próba nanoszenia poszczególnych warstw pokrycia ciekłokrystalicznego i zabezpieczenia lakierem była kontrolowana przez umieszczanie pomalowanych płytek na płycie termostatowanej w stałej temperaturze. Oceniano intensywność rejestrowanych barw (rys. 6). Jeśli intensywność barw nie była znacząco pogorszona, zabezpieczoną lakierem płytkę umieszczano w kanale pomiarowym i przeprowadzano test odporności na działanie

wody. Jeśli nie zaobserwowano pogorszenia jakości lakierowanej powierzchni w ciągu 2-3 godzin trwania testowego eksperymentu, uznawano pokrycie za wystarczająco dobre.

Stanowisko pomiarowe μ PIV

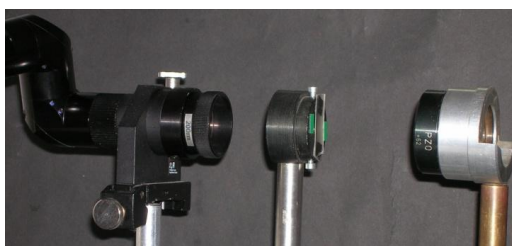
Analiza eksperymentalna struktury przepływu przez badany kanał przeprowadzona była w oparciu o technikę μ PIV. Zbudowany system μ PIV składał się z mikroskopu, kamery cyfrowej i laserowego systemu oświetlającego [3]. Ideowy schemat części optycznej stanowiska pomiarowego przedstawiony został na rysunku 7. Głównym elementem stanowiska jest mikroskop epi-fluorescencyjny *Nikon ECLIPSE E-50i*, wyposażony w zestaw obiektywów i filtrów optycznych.



Rys. 7. Schemat stosowanego w badaniach stanowiska pomiarowego μ PIV

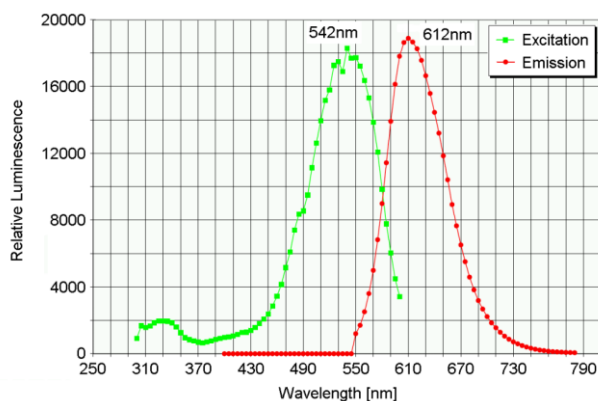
Wszystkie pomiary wykonane były przy użyciu przystosowanego do pomiarów fluorescencyjnych obiektywu *Nikon LU Plan Fluor* o 10-krotnym powiększeniu, aperturze numerycznej $NA = 0.30$ i długości roboczej $WD = 17.5\text{mm}$. Źródłem światła w przeprowadzonych eksperymentach był impulsowy laser typu Nd:YAG (*SoloPIV Nd YAG Lasers, New Wave Research Inc.*) emitujący 5-nanosekundowe impulsy światła o długości fali 532nm i energii 30mJ . Wiązka światła wychodząca z lasera wprowadzona była do układu „ramienia optycznego” (*ILA GmbH*), które pozwoliło w wygodny i bezpieczny sposób skierować ją do wnętrza mikroskopu. Pomiędzy końcówką ramienia optycznego a mikroskopem umieszczony został układ optyczny („beam expander”) formujący wiązkę tak, aby po wprowadzeniu do mikroskopu nie rozpraszała się na ściankach bocznych kanałów prowadzących tą wiązkę wewnątrz mikroskopu oraz żeby po przejściu przez obiektyw i dotarciu do analizowanego przepływu oświetlała cały obszar widoczny pod mikroskopem (zobacz rys. 7). Przy formowaniu i wprowadzaniu wiązki do mikroskopu należy zachować ostrożność, gdyż nieumiejętny dobór elementów ją formujących czy też nieprecyzyjne wprowadzenie do mikroskopu może spowodować uszkodzenie podzespołów mikroskopu. Z uwagi na skomplikowaną budowę (wiele soczewek) obecnie stosowanych obiektywów mikroskopowych, szczególnie łatwo jest doprowadzić do zogniskowania światła laserowego

we wnętrzu obiektywu i jego uszkodzenia, nawet przy niedużej energii impulsów lasera Nd:YAG. W wykorzystanym układzie należało uformować wiązkę światła, która miała na wejściu do mikroskopu średnicę około 15mm i była nieznacznie rozbieżna ($9 \div 10\text{mrad}$). Takie uformowanie wiązki osiągnięto za pomocą złożenia dwóch soczewek i holograficznej folii rozpraszającej *LSD®* (*LSD®Light Shaping Diffuser, Physical Optics Corporation, Torrance, CA, USA*). Fotografie układu formowania wiązki przedstawiono na rysunku 8. Pierwsza soczewka o ogniskowej $+200\text{mm}$ zamontowana była na końcówce ramienia optycznego. W odległości 65mm od tej soczewki umieszczona była folia *LSD®* o kącie rozpraszania 10° , która podobnie jak zwykła soczewka wprowadzała zmianę kąta rozbieżności wiązki, dodatkowo powodując, że niemożliwe już było utworzenie z tej wiązki punktowego ogniska. Światło po przejściu przez folię *LSD®* ma postać podobną do światła przechodzącego przez układ soczewki i matówki. Dzięki temu uzyskano pewność, że nie nastąpi zogniskowanie wiązki lasera na pozostałych elementach optycznych układu i ich ewentualne uszkodzenie. W odległości 70mm od folii *LSD®* ustawiona była druga soczewka o ogniskowej $+62\text{mm}$. Tak uformowana wiązka była następnie precyzyjnie ustawiana w osi toru oświetlającego mikroskopu i wprowadzana do jego wnętrza.



Rys. 8. Fotografia układu optycznego („beam expander”) formującego wiązkę światła laserowego do pożądanej postaci, składającego się kolejno (od lewej) z: końcówki „ramienia optycznego” z zamontowaną soczewką sferyczną o ogniskowej $+200\text{mm}$, folii holograficznej *LSD®* 10° i soczewki sferycznej $+62\text{mm}$

Zielony kolor światła oświetlającego (długość fali 532nm) narzucił własności optyczne, jakie powinny posiadać fluorescencyjne cząstki znacznikowe wykorzystane w eksperymentach. Ich maksimum wzbudzenia powinno być jak najbardziej zbliżone do długości fali światła oświetlającego. W przeprowadzonych pomiarach wykorzystano cząstki polistyrenowe wytworzone przez firmę *Duke Scientific Inc.*, które według danych dostarczonych przez producenta mają maksimum wzbudzenia światłem o długości fali 542nm , a maksymalna intensywność emisji jest dla światła o długości fali 612nm (światło o barwie czerwonej). Dokładną charakterystykę pasma wzbudzenia i emisji użytych fluorescencyjnych cząstek znacznikowych przedstawia dostarczony przez producenta rysunek 9. Dane te zostały potwierdzone przez pomiary wykonane spektroskopem *Ocean Optics RH-4000*. Zmierzone widmo emisji cząstek wzbudzonych światłem laserowym o długości fali 532nm było niemal identyczne z rys. 9.



Rys. 9. Spektrum wzbudzenia i emisji użytych fluorescencyjnych cząstek znacznikowych [1]

Znając długość fali światła oświetlającego ($532nm$) i emitowanego przez cząstki ($612nm$) możliwe było dobranie właściwego bloku filtrów mikroskopu epi-fluorescencyjnego. Dla podanych długości fal światła wybrano blok typu TRITC (Ex 540/25, DM 565, BA 605/55), w którym filtr wzbudzający przepuszczał tylko światło o długości fali $540nm$ z szerokością „okna przepuszczającego” $25nm$, zwierciadło dichroiczne miało granicę odbijanie-przepuszczanie zadaną jako $565nm$, a drugi filtr (emisyjny) przepuszczał tylko światło o długości fali $605nm$ z „szerokością okna” $55nm$. Tuż przed kamerą zamontowany był jeszcze dodatkowy filtr odcinający światło o długości fali poniżej $570nm$ (zobacz rys. 7), aby zapewnić jak najpełniejsze wyeliminowanie rejestracji zielonego światła wzbudzającego, pozwalając przy tym na niezakłóconą rejestrację światła czerwonego, emitowanego przez fluorescencyjne cząstki znacznikowe.

Rejestrację obrazów wykonano przy użyciu czarno-białej specjalistycznej kamery CCD dedykowanej do pomiarów PIV (*SensiCam Double Shutter, PCO IMAGING*). Umożliwiała ona zapis 12-bitowych obrazów o rozdzielczości 1280×1024 piksele. Synchronizacja kamery i lasera wykonana była przy użyciu synchronizatora *ILA mini PIV-Synchronizer (ILA GmbH)*, a ich praca mogła być sterowana programowo z komputera PC. Po synchronizacji układ kamery i lasera pozwalał na rejestrację par zdjęć z minimalnym odstępem czasowym zdjęć w parze wynoszącym $200ns$ i częstotliwością rejestracji takich par równą $3.75Hz$. Ograniczeniem ilości zdjęć możliwych do zapisania w jednej serii pomiarowej była pojemność pamięci operacyjnej komputera sterującego, która wynosiła $3GB$ i pozwalała na jednorazowe zarejestrowanie serii około 1200 par obrazów.

Na potrzeby przeprowadzonych pomiarów zbudowano i wykorzystano układ wymuszający przepływ przez model kanału. Pozwalał on na zadawanie prędkości mierzonej w centralnej części kanału praktycznie od zera do około $1.3m/s$, co odpowiadało maksymalnej liczbie Reynoldsa (opartej o połowę wysokości średniej kanału) równej około $Re \sim 1300$. Układ wymuszający przepływ zbudowany był na bazie precyzyjnej mikro-pompy zębatej *Digital Gear Pump, Cole-Parmer Instrument Co.*, wyposażonej w głowicę *Suction Shoe Pump Head, Cole-Parmer Instrument Co.* Dodatkowo układ składał się ze zbiornika wyrównawczego o pojemności około $300cm^3$ i przewodów o średnicy $8mm$, łączących elementy układu (rys. 10). Pompa zasysała ciecz ze zbiornika wyrównawczego i przetłaczając

ją przez kanał z powrotem zwracała do zbiornika. Zestaw ten zapewniał maksymalny strumień objętościowy podawania cieczy równy około $55 \text{ cm}^3/\text{s}$, co odpowiadało liczbie Reynoldsa równej około $Re \sim 1300$. Przedstawiony system zaprojektowano tak, aby pracował w układzie zamkniętym z jak najmniejszą ilością cieczy niezbędnej do jego napełnienia. Podyktowane to było względami ekonomicznymi, gdyż używane jako posiew fluorescencyjne cząstki znacznikowe są bardzo drogie. Starając się zminimalizować objętość cieczy używanej do pomiarów minimalizowano również niezbędną ilość cząstek znacznikowych i tym samym koszty przeprowadzenia eksperymentów.



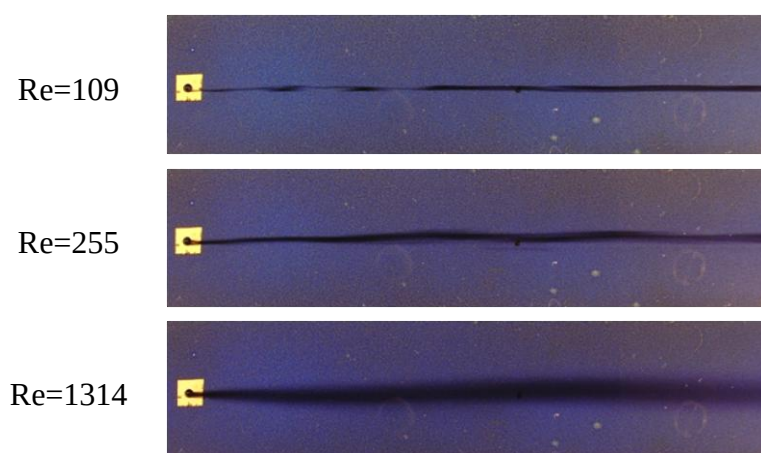
Rys. 10. Stanowisko pomiarowe techniką μPIV z widocznymi głównymi elementami: mikroskop epi-fluorescencyjny z zamontowaną kamerą CCD oraz umieszczonym na jego stoliku kanałem pomiarowym, pompa zębata, ramię optyczne i układ optyczny formujący i doprowadzający wiązkę lasera do wnętrza mikroskopu oraz komputer sterujący pracą całego układu.

Wszystkie eksperymenty przeprowadzono z użyciem wody dejonizowanej, która przed pomiarami była odgazowana poprzez kilkukrotne doprowadzenie do stanu wrzenia. Do pomiarów użyto polistyrenowych cząstek znacznikowych o średnicy $2 \mu\text{m}$ (*Fluorescent Polymer Microspheres – aqueous, Duke Scientific Inc.*). Optymalna koncentracja cząstek wynosiła $35 \cdot 10^6 \frac{\text{cząstek}}{\text{cm}^3}$. Aby zmniejszyć napięcie powierzchniowe i ograniczyć koalescencję cząstek, do przygotowanej zawiesiny dodano substancję powierzchniowo czynną SDS (*Sodium Dodecyl Sulfate, Polskie Odczynniki Chemiczne S.A.*) w stężeniu masowym 0.001%.

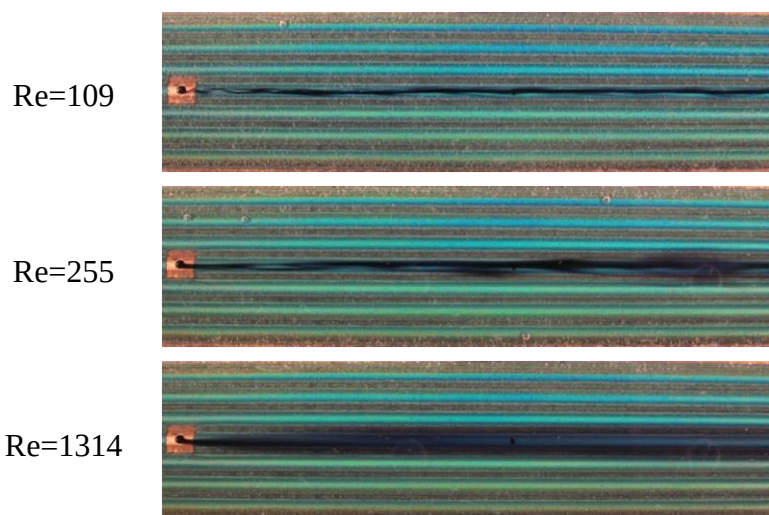
3. Jakościowa analiza stabilności przepływu

Wstępną detekcję krytycznej liczby Reynoldsa, przy której zachodzi utrata stabilności przepływu, przeprowadzono w oparciu o wizualizację struktury wtryskiwanej cienkiej strugi zabarwionej cieczy. W przepływie laminarnym mieszanie się strugi barwnika z cieczą unoszącą ten barwnik, powinno zachodzić jedynie na drodze dyfuzji molekularnej. W momencie utraty stabilności, kiedy przepływ zaczyna nabierać charakteru coraz bardziej turbulentnego, mieszanie zostaje drastycznie zintensyfikowane. Zostaje ono wówczas zdominowane przez turbulentny transport masy, a mechanizm dyfuzyjny staje się pomijalnie mały. Obserwacja zachowania się wtryskiwanej strugi cieczy przy narastającej liczbie Reynoldsa może dostarczyć jakościowych informacji o momencie utraty stabilności przepływu. Liczba Reynoldsa, przy której zaobserwowano znaczący wzrost szybkości „rozmywania się” barwnika może być przesłanką do stwierdzenia, że przepływ przestał być laminarny. W niniejszej analizie wykonano parametryczne badania dla każdej z 6 konfiguracji geometrycznych kanału (5 konfiguracji o zmodyfikowanym kształcie ścianki: $G_0 - G_4$ oraz konfiguracja bazowa (referencyjna) G_p o wszystkich ściankach płaskich), dla 9 różnych, narastających liczb Reynoldsa ($Re=36, 73, 109, 146, 182, 219, 255, 547$ oraz 1314), czyli w sumie wykonano 54 pomiary. Pomiary te poprzedzone były testowymi seriami pomiarowymi, podczas których zostały dobrane odpowiednie wartości strumieni podawanego barwnika, w zależności od szybkości przepływu cieczy przez kanał.

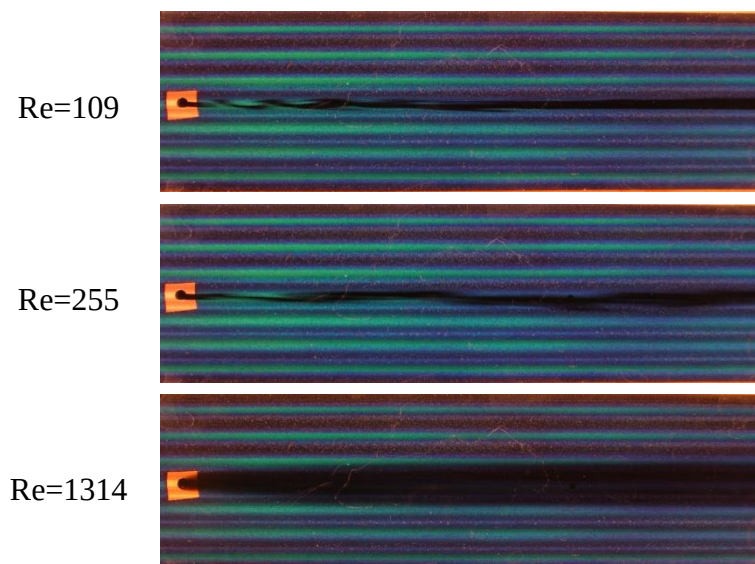
W przeprowadzonych eksperymentach, jako barwnika użyto atramentu, wtryskiwanego ze stałym, zadaniem wydatkiem objętościowym za pomocą pompy strzykawkowej *New Era NE-100*. Strumień podawanego barwnika był dobierany w zależności od aktualnej liczby Reynoldsa tak, aby uzyskiwać ciągły, nieprzerwany strumień zabarwionej cieczy, który w całości jest unoszony przez przepływ główny w kanale.



Rys. 11. Pomiar intensywności mieszania barwnika w geometrii referencyjnej G_p dla trzech różnych liczb Reynoldsa; barwnik wtryskiwany przez otwór z lewej strony rysunku jest unoszony przez przepływ główny. W tle barwa ścianki z pokryciem ciekłokrystalicznym.



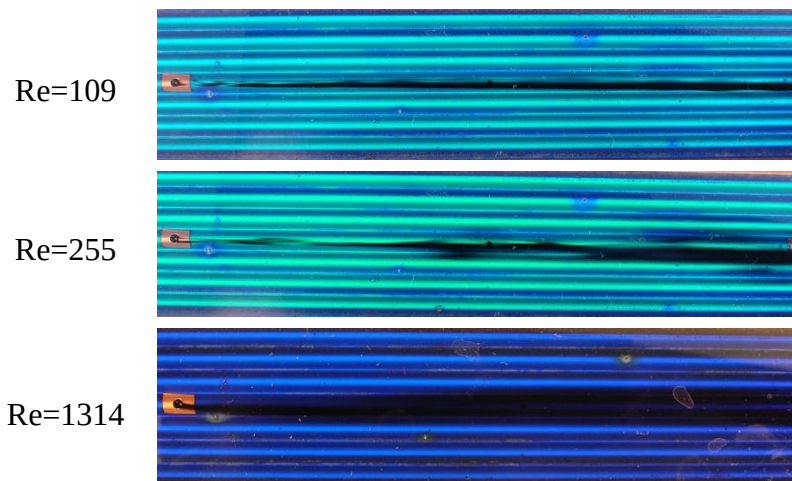
Rys. 12. Pomiar intensywności mieszania barwnika w geometrii G_0 dla trzech różnych liczb Reynoldsa; barwnik wtryskiwany przez otwór z lewej strony rysunku jest unoszony przez przepływ główny. W tle barwa ścianki z pokryciem ciekłokrystalicznym.



Rys. 13. Pomiar intensywności mieszania barwnika w geometrii G_1 . W tle barwa ścianki z pokryciem ciekłokrystalicznym.

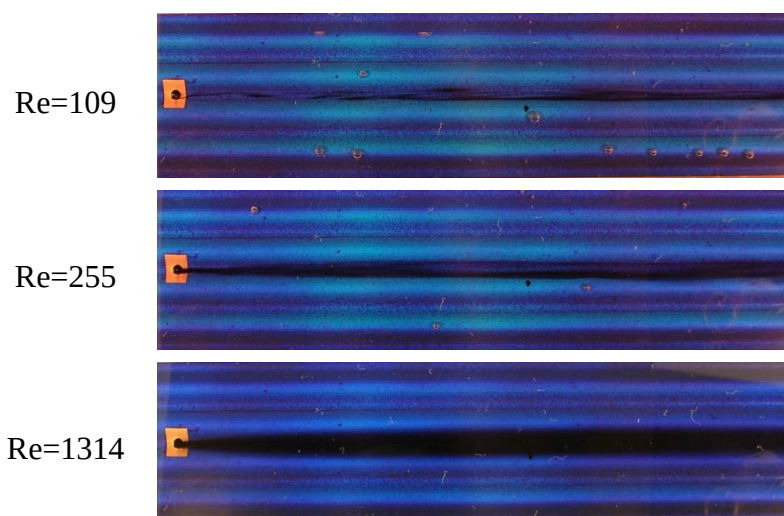
Na rysunku 11 pokazano wyniki takiej analizy dla bazowego kanału o płaskich ściankach. Zamieszczono przykładowe fotografie dla trzech różnych liczb Reynoldsa: $Re = 109$, $Re = 255$ oraz $Re = 1314$. Jak można zauważyć, w kanale bazowym przepływ z liczbą Reynoldsa równą $Re = 109$ jest w pełni laminarny – struga barwnika na całej obserwowanej długości pozostaje cienka i nie ulega mieszanii z unoszącą cieczą. Zwiększenie prędkości przepływu do poziomu, przy którym liczba Reynoldsa osiąga wartość 255 powoduje jedynie niewielkie zwiększenie intensywności mieszania się atramentu z otaczającą go cieczą. Można przyjąć ciągle, że mieszanie następuje głównie wskutek dyfuzji molekularnej, a transport turbulentny jest na bardzo niskim poziomie. Dopiero zwiększenie liczby Reynoldsa do ok. 1300 spowodowało wyraźną zmianę intensywności mieszania. Jak można zauważyć na rysunku 11 struga atramentu dla $Re = 1314$ bardzo szybko przybiera postać rozmytej smugi, co może świadczyć o burzliwym charakterze przepływu.

Przeprowadzając taką samą analizę dla geometrii o zmodyfikowanej dolnej ścianie (rysunki 12, 13, 14, 15 oraz 16) zauważono nico inne zachowanie się wtryskiwanej strugi barwnika. Tutaj, dla geometrii G_0 , G_1 , G_2 i G_3 (odpowiednio rysunki 12, 13, 14 oraz 15) można zauważyć, że pierwsze „oznaki” zaburzeń widoczne są już przy liczbie Reynoldsa równej 109. Na strudze barwnika pojawiają się pierwsze niestabilności. Jedynie w geometrii G_4 struga pozostaje ciągle gładka, bez widocznych zaburzeń.

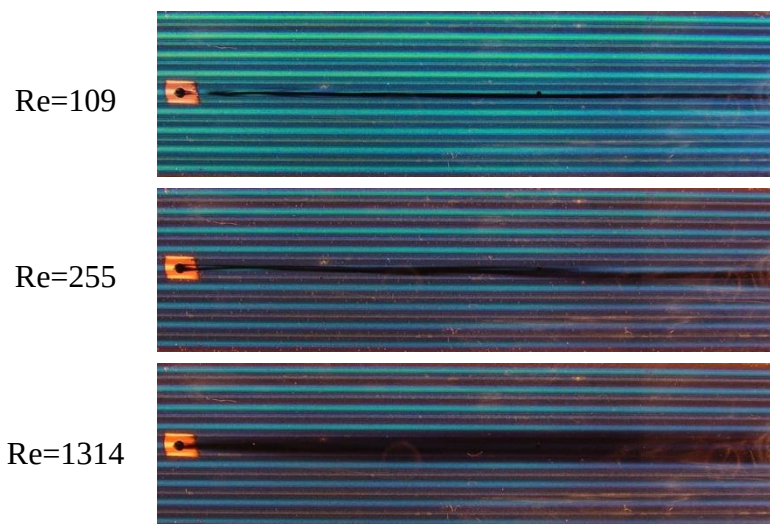


Rys. 14. Pomiar intensywności mieszania barwnika w geometrii G_2 . W tle barwa ścianki z pokryciem ciekłokrystalicznym.

Natomiast przy liczbie Reynoldsa równej 255, zaburzenia są wyraźnie widoczne już we wszystkich konfiguracjach geometrycznych kanału. Świadczy to o tym, że mieszanie zostało zdominowane wydajnym transportem turbulentnym unoszącego barwnik płynu. W geometriach o pofalowanej ścianie dolnej, podobnie jak dla geometrii bazowej G_p o płaskiej dolnej ścianie, przy liczbie Reynoldsa równej 1314 przepływ wykazuje burzliwy charakter, gdzie struga barwnika miesza się z dużą intensywnością z wodą płynącą kanałem.



Rys. 15. Pomiar intensywności mieszania barwnika w geometrii G_3 . W tle barwa ścianki z pokryciem ciekłokrystalicznym.



Rys. 16. Pomiar intensywności mieszania barwnika w geometrii G_4 . W tle barwa ścianki z pokryciem ciekłokrystalicznym.

Podsumowując wstępną analizę stabilności przepływu polegającą na wizualizacji barwnika dodawanego do przepływu i obserwacji intensywności jego mieszania można stwierdzić, że wprowadzenie modyfikacji kształtu dolnej ścianki kanału (oprócz geometrii G_4) spowodowało, że już przy $Re=109$ zauważalne są pierwsze oznaki destabilizacji przepływu (w odróżnieniu do geometrii G_p , gdzie przy $Re=109$ przepływ pozostawał laminarny). Przy $Re=255$ we wszystkich przeanalizowanych geometriach o zmodyfikowanym kształcie, niestabilności przepływu były już wyraźnie widoczne. Przy tej samej liczbie Reynoldsa w geometrii bazowej G_p niestabilności przepływu były niemal niezauważalne. Świadczy to o tym, że wprowadzona modyfikacja geometrii obniżyła krytyczną liczbę Reynoldsa do wartości około 100.

4. Analiza oporów hydraulicznych

Cechą charakterystyczną ruchu płynu lepkiego jest występowanie naprężeń stycznych. Skutkiem tego są siły tarcia wewnętrznego, które mają zwrot przeciwny do prędkości przepływu. Dlatego też, ruch rzeczywistego (lepkiego) płynu związany jest zawsze z występowaniem oporów (hydraulicznych), na pokonanie których zostaje zużyta pewna część energii przepływającego płynu. Wynika stąd, że strumień energii niesionej przez płyn maleje w kierunku „w dół” przewodu. W przypadku ruchu płynu lepkiego przez przewód zamknięty o dowolnym kształcie przekroju, miarą strat energii na skutek występowania sił tarcia wewnętrznego (tzw. liniowa strata energii, proporcjonalna do długości przewodu) jest spadek ciśnienia panującego w tym przewodzie.

Wartość strat energii wywołanych tarciami wewnętrznymi określa tzw. wzór *Darcy'ego-Weisbacha* postaci [2]:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{u^2}{2} \rho,$$

gdzie l to długość przewodu, d - średnica przewodu, ρ - gęstość płynu, u - średnia prędkość przepływu, a λ to współczynnik oporu liniowego (strat tarcia).

Współczynnik oporu liniowego jest w ogólnym przypadku funkcją liczby Reynoldsa Re i chropowatości względnej. Wartość tego współczynnika na ogół wyznaczana jest doświadczalnie, ale dla przypadku przepływu laminarnego możliwe jest wyznaczenie teoretyczne zależności pomiędzy współczynnikiem oporu liniowego i liczbą Reynoldsa. Zależność ta ma postać:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

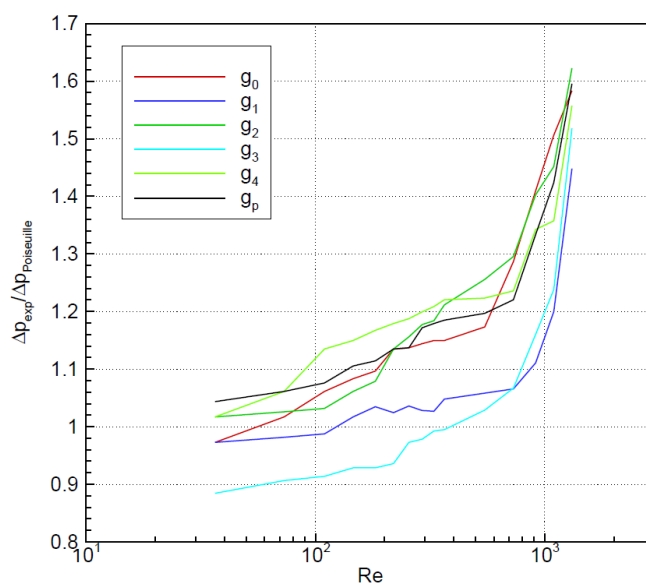
i wynika z prawa Hagen-Poiseuille'a. Dla przypadku turbulentnego współczynnik oporu liniowego może być wyznaczony z empirycznej zależności zwanej formułą *Blasiusa*:

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}} \approx (100Re)^{-1/4}, \quad Re \leq 10^5.$$

Przytoczone wzory dotyczą współczynnika oporu liniowego w przewodach o gładkich ścianach. Jednak wzory te mają duże zastosowanie praktyczne, bo chropowatość w hydraulice jest pojęciem względnym, gdyż istnienie laminarnej warstwy przyściennej „wygładza” wewnętrzne nierówności przewodu. Ze wzrostem liczby Reynoldsa grubość warstwy laminarnej maleje, jednak dopóki jest ona większa od chropowatości względnej ścianek kanału¹, to kanał możemy traktować jako gładki (gładki hydraulicznie).

¹ Grubość przyściennej warstwy laminarnej δ jest większa od chropowatości względnej k jeśli spełniony jest warunek: $u_* k / \nu < 5$, gdzie u_* jest prędkością tarcia, a ν lepkością kinematyczną.

Podsumowując: dla przepływu laminarnego możemy dokładnie określić teoretycznie wartość gradientu ciśnienia towarzyszącego liniowym oporom przepływu. Porównując wyznaczone teoretycznie gradienty ciśnienia z wynikami pomiarów możemy określić wartość liczby Reynoldsa, przy której wyniki eksperymentalne zaczynają się znacznie różnić od wartości teoretycznych. Jeśli różnice te pojawią się przy niskich liczbach Reynoldsa, przy których spodziewać by się należało, że przepływ powinien mieć charakter laminarny, możemy przypuszczać że nastąpiła destabilizacja przepływu wywołana wprowadzoną modyfikacją geometrii ścianek kanału.



Rys. 17. Znormalizowany gradient ciśnienia w funkcji liczby Reynoldsa dla poszczególnych geometrii.

W ramach niniejszej analizy przeprowadzono pomiary gradientu ciśnienia w badanym kanale dla 15 różnych, narastających liczb Reynoldsa z zakresu od 36 do 1314 ($Re=36, 73, 109, 146, 182, 219, 255, 292, 328, 365, 547, 730, 912, 1095$ oraz 1314) dla wszystkich wariantów modyfikacji geometrii ścianek ($G_0 - G_4$) oraz dla geometrii bazowej G_p o ściankach płaskich. Wykonano w sumie 90 niezależnych pomiarów gradientu ciśnienia. Pomiary wykonano na zbudowanym w ramach niniejszego projektu stanowisku eksperymentalnym, opisanym w rozdziale 2.

W celu łatwiejszej analizy wyników pomiarów oraz ich interpretacji, zmierzone wartości gradientu ciśnienia podzielono przez gradient ciśnienia wyznaczony teoretycznie dla przepływu Poiseuille’a. Wyniki analizy pokazano na rysunku 17.

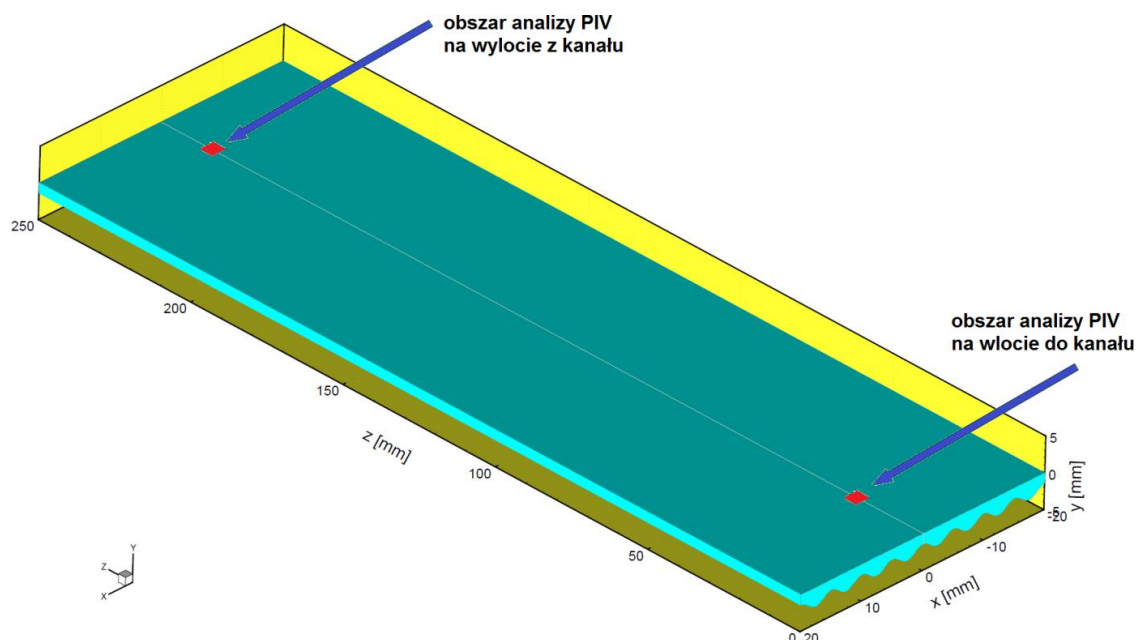
Można zauważyć, że dla niskich liczb Reynoldsa wprowadzona modyfikacja geometrii ścianek w większości przypadków nie dość, że nie wprowadza żadnych dodatkowych oporów hydraulicznych przepływu, ale nawet je redukuje (wartości $\Delta p_{exp} / \Delta p_{Poiseuille}$ poniżej 1 na rys. 17). Jest to szczególnie widoczne dla geometrii G_3 i jest potwierdzeniem numerycznych i teoretycznych wyników uzyskanych we wcześniejszych etapach niniejszego projektu, że

odpowiednio wprowadzona modyfikacja geometrii może powodować obniżenie strat hydraulicznych dla przepływów laminarnych.

Wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa stosunek oporów hydraulicznych wyznaczonych eksperymentalnie i teoretycznie również rośnie. Dla $Re > 100$ efekt obniżania oporów hydraulicznych znika. Nie jest też wyraźnie widoczna granica, przy jakiej wartości liczb Reynoldsa stosunek ten zaczyna gwałtownie wzrastać. Można jednak stwierdzić, że przepływ z liczbą Reynoldsa równą kilkaset nie jest już przepływem laminarnym, w którym opory hydrauliczne można wyznaczyć teoretycznie ze wzoru Poiseuille'a.

5. Analiza struktury pola prędkości

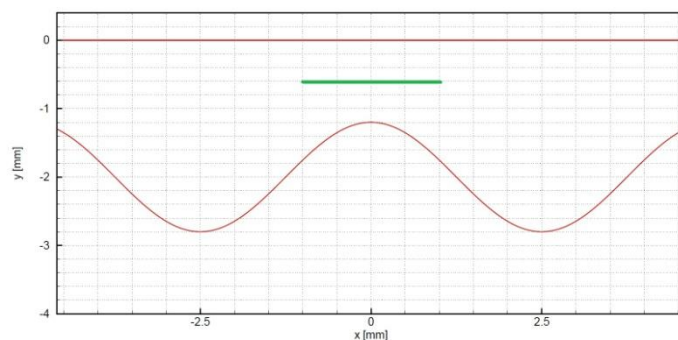
Przepływy turbulentne oraz przepływy, w których spodziewane są niestabilności będące „zwiastunem” przejścia do przepływu burzliwego, z uwagi na chaotyczną naturę, opisywane i analizowane są zazwyczaj z wykorzystaniem statystycznych narzędzi matematycznych. Dlatego też podczas eksperymentów należało zgromadzić dostatecznie dużą ilość danych pomiarowych, niezbędną do tej analizy statystycznej. Pomiary przeprowadzono w dwóch wybranych lokalizacjach, tj. w okolicach wlotu do kanału i w okolicach wylotu. Obie lokalizacje umiejscowione były na wzdlużnej osi symetrii układu – pierwsza 25mm za wlotem do kanału, a druga 25mm przed wylotem z kanału (rys. 18).



Rys. 18. Schemat kanału pomiarowego z zaznaczonymi (niebieskimi strzałkami) czerwonymi obszarami, które poddane były analizie struktury przepływu techniką μ PIV; pomiarom podlegał obszar o wymiarach 2.15mm x 1.75mm położony w płaszczyźnie x-z, a w kierunku y na środku wysokości kanału.

Należy podkreślić, że analizie μ PIV, z uwagi na fakt, że pomiary wykonywane były pod mikroskopem, poddawane były stosunkowo niewielkie obszary. Rejestracji podlegał prostokątny obszar o wymiarach 2.15mm x 1.75mm, położony w płaszczyźnie prostopadłej do osi obiektywu mikroskopu, tj. w płaszczyźnie x-z na rysunku 18. Pamiętać należy, że wielkość rejestrowanego fragmentu przepływu porównywalna była z charakterystycznym okresem pofalowania dolnej ścianki (rys. 19). Stąd też, na wyznaczonych eksperymentalnie techniką μ PIV polach prędkości, mogą nie być widoczne charakterystyczne wiry, które wyznaczone były numerycznie, a których rozmiar jest kilka razy większy od obszaru podlegającego analizie eksperymentalnej.

W kierunku y , wzdłuż osi obiektywu, rejestracji podlegał obszar o „głębokości” około $140\mu\text{m}$. Wymiar ten jest tzw. głęboką korelacji, wynikającą bezpośrednio z własności optycznych elementów wykorzystanych w stanowisku pomiarowym (zobacz wzór 15 w załączniku nr 2 poświęconym technice PIV).



Rys. 19. Schemat kanału pomiarowego (G_0) z zaznaczonym zieloną linią obszarem o szerokości 2.15mm, który podlegał analizie eksperymentalnej techniką μPIV .

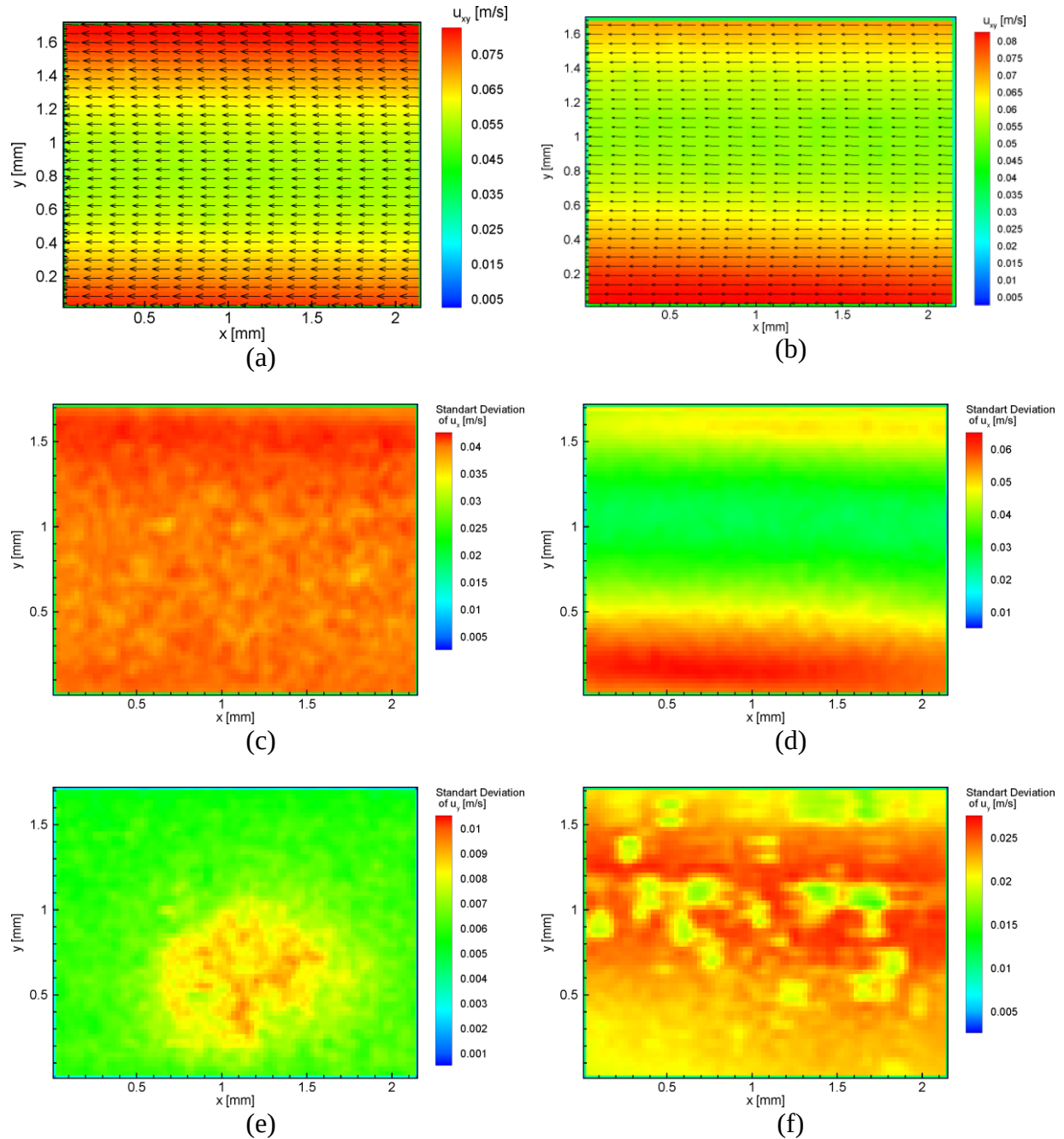
Pomiarom techniką μPIV poddano obszary zlokalizowane w okolicy wlotu i wylotu kanału, gdyż przypuszczano, że rejestrowane pola prędkości będą w każdym przypadku zaburzone w pewnym stopniu przez bliskie usytuowanie doprowadzenia wlotu wody, która zasilala kanał pomiarowy. Pomiar struktury prędkości na wlocie do kanału oraz na wylocie pozwoli porównać wielkość fluktuacji poprzecznych prędkości, będących miarą stopnia zaburzenia przepływu. Analizując wielkość tych fluktuacji możliwe będzie stwierdzenie czy są one większe na wlocie czy na wylocie, a przez to czy ukształtowanie kanału spowodowało wzmocnienie czy wygaszenie tych fluktuacji.

Dla każdego rozpatrywanego przypadku (wlot-wylot, rodzaj modyfikacji geometrii, liczba Reynoldsa, wartość przesunięcia cząstek znacznikowych na rejestrowanych obrazach) rejestrowano po 250 par obrazów przepływu, co pozwalało na wyznaczenie 250 chwilowych pól prędkości. W trakcie wszystkich pomiarów zarejestrowano około 35 tysięcy par obrazów, które zapełniły ok. 150GB pamięci masowej komputera.

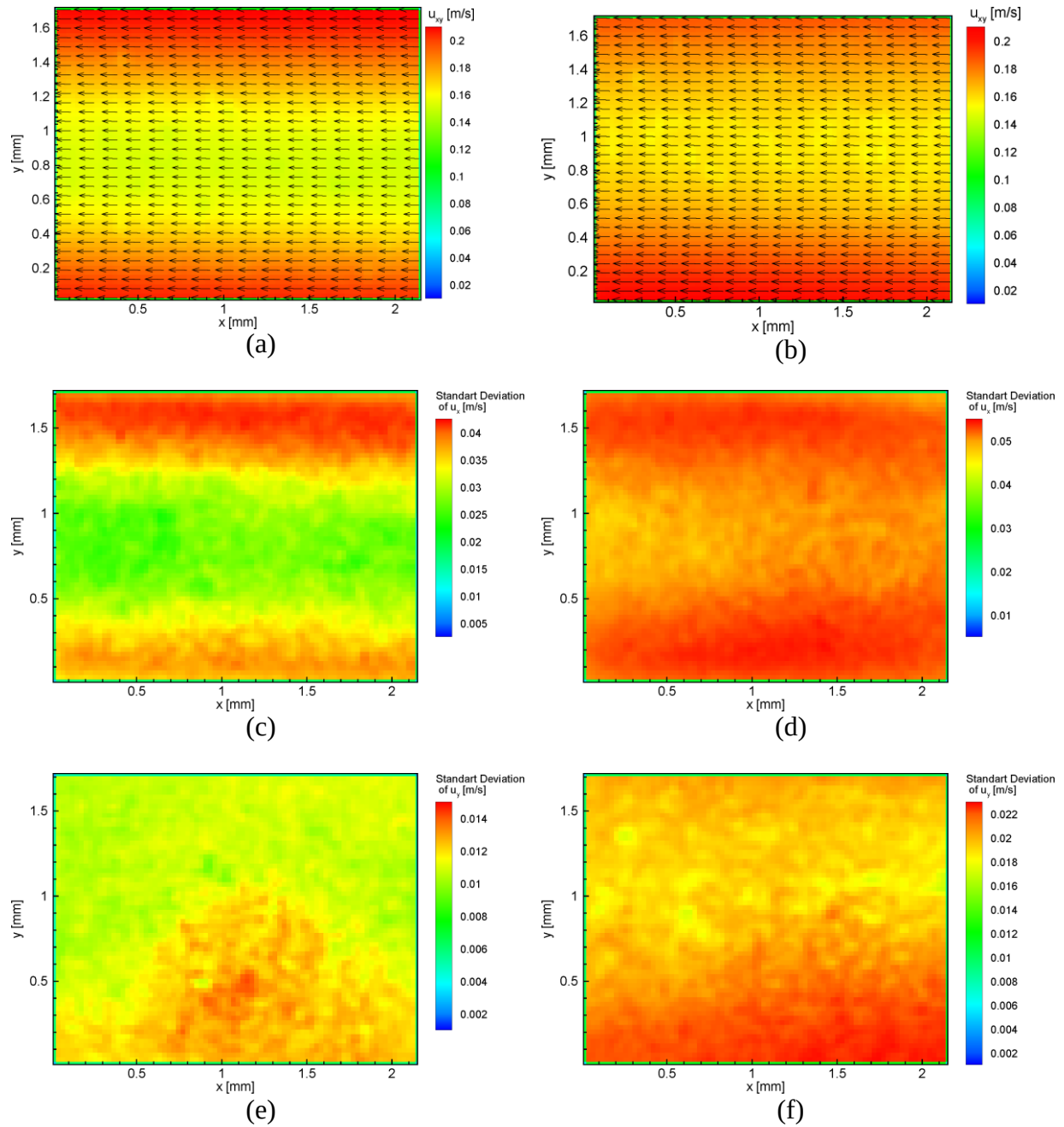
Na szeregu kolejnych rysunków (20 – 37) zostały pokazane wyniki pomiarów μPIV dla przepływów z wybranymi wartościami liczby Reynoldsa ($\text{Re} = 109, 255$ oraz 547) przez kanały o wszystkich wariantach modyfikacji geometrii ($G_0 - G_4$) oraz przez kanał bazowy G_p . Na każdym rysunku pokazano średnie pole prędkości na wlocie do kanału – rysunki (a) – oraz na wylocie – rysunki (b). Uśredniania dokonywano po wszystkich 250 chwilowych polach prędkości, zarejestrowanych dla każdego z analizowanych przypadków. Jako miarę fluktuacji prędkości wyznaczono odchylenie standardowe pól prędkości. Wyznaczono je osobno w kierunku x (wzdłuż przepływu głównego) oraz w kierunku y (w poprzek przepływu głównego) oraz na wlocie i na wylocie kanału (rysunki c, d, e oraz f).

Jak można zauważyć na rysunku 20, pokazującym wyniki pomiarów w geometrii optymalnej G_0 przy liczbie Reynoldsa $\text{Re}=109$, prędkość średnia w okolicy wlotu do kanału (rys. 20a)

osiąga wartości maksymalne około 75mm/s, a w okolicy wylotu – 80mm/s. Wzrostowi prędkości towarzyszy również niewielki wzrost fluktuacji prędkości. W kierunku zgodnym z przepływem dominującym maksymalne odchylenie standardowe wzrosło od 40mm/s do 60mm/s, a w kierunku poprzecznym do przepływu głównego – od 10mm/s do 25mm/s.



Rys. 20. Geometria G_0 , $Re=109$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

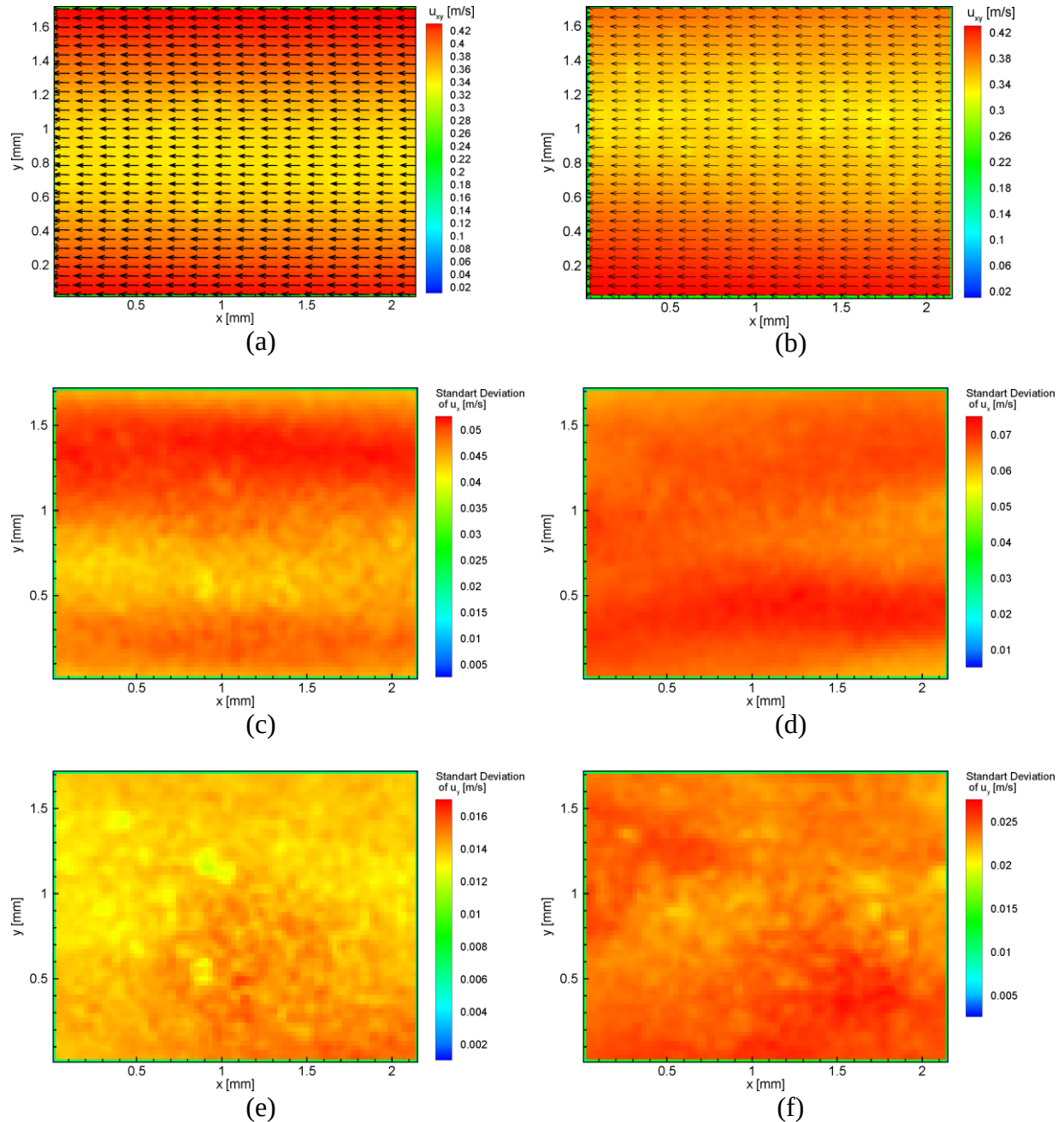


Rys. 21. Geometria G_0 , $Re=255$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

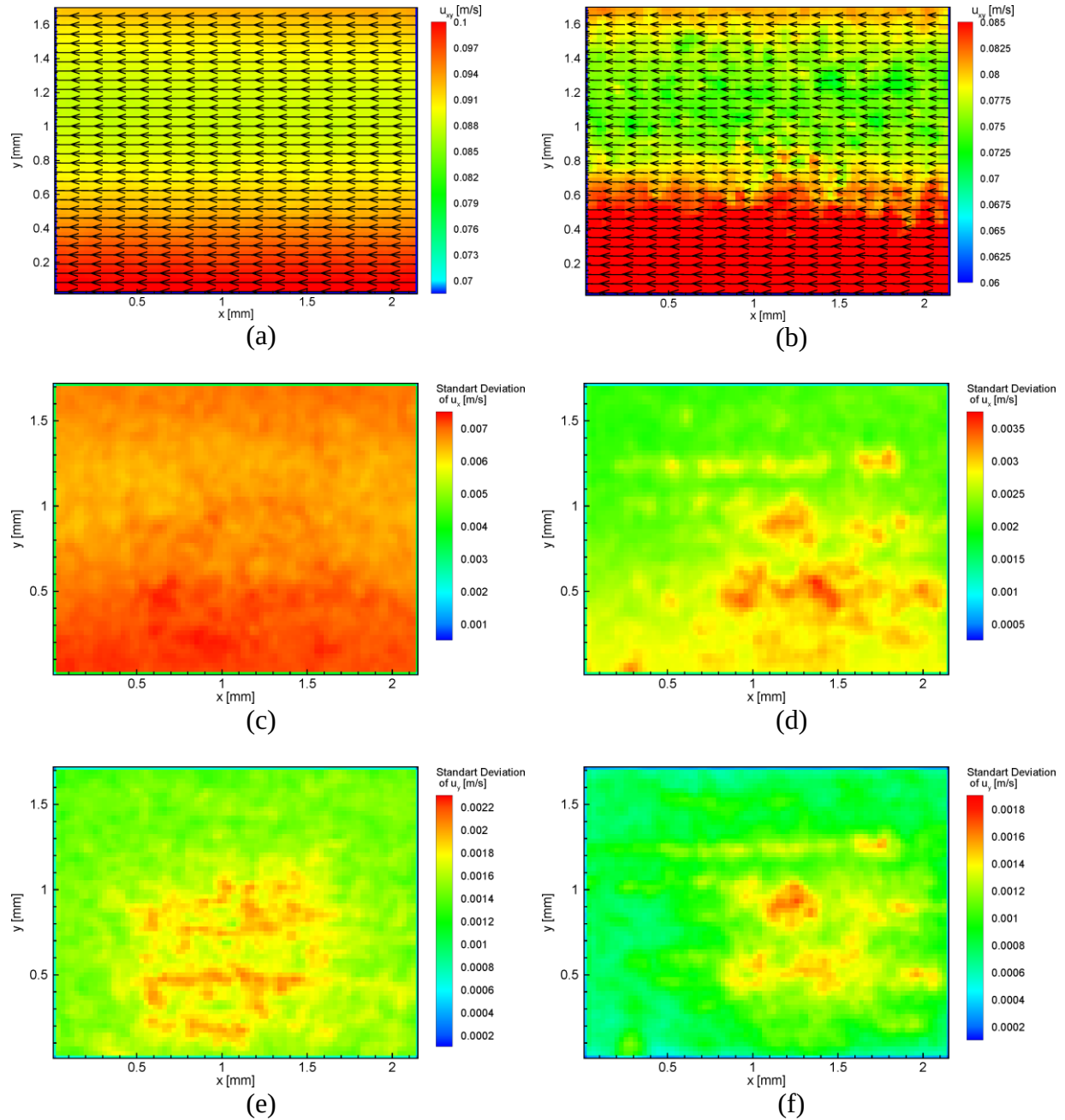
Na rysunkach 21 oraz 22 przedstawiono wyniki analogicznej analizy przeprowadzonej w geometrii G_0 dla przepływów o liczbie Reynoldsa równej odpowiednio $Re=255$ oraz $Re=547$. Jak widzimy, maksymalne prędkości średnie dla liczby Reynoldsa równej 255 wynoszą na wlocie i wylocie po około 200 mm/s, fluktuacje w kierunku „x” rosną od 40 mm/s do 50 mm/s, a w kierunku „y” – od 14 mm/s do 22 mm/s. Dla przepływu z liczbą Reynoldsa równą 547 –

maksymalna prędkość średnia wynosi około 0.42m/s, a zmiany fluktuacji wynoszą od 50mm/s do 70mm/s w kierunku „x” oraz od 16mm/s do 25mm/s w kierunku „y”.

Można zatem stwierdzić, że optymalna modyfikacja (G_0) powierzchni dolnej ścianki kanału, polegająca na wprowadzeniu pofalowania składającego się z 8 segmentów o amplitudzie $S=0.8\text{mm}$ (zobacz rys. 2.6 w dokumencie głównym Raportu), spowodowała wzrost podłużnych i poprzecznych fluktuacji prędkości wzdłuż kanału. Wzrost ten jest bardzo mały, ale zauważalny, i ma miejsce już dla liczby Reynoldsa równej $Re=109$.



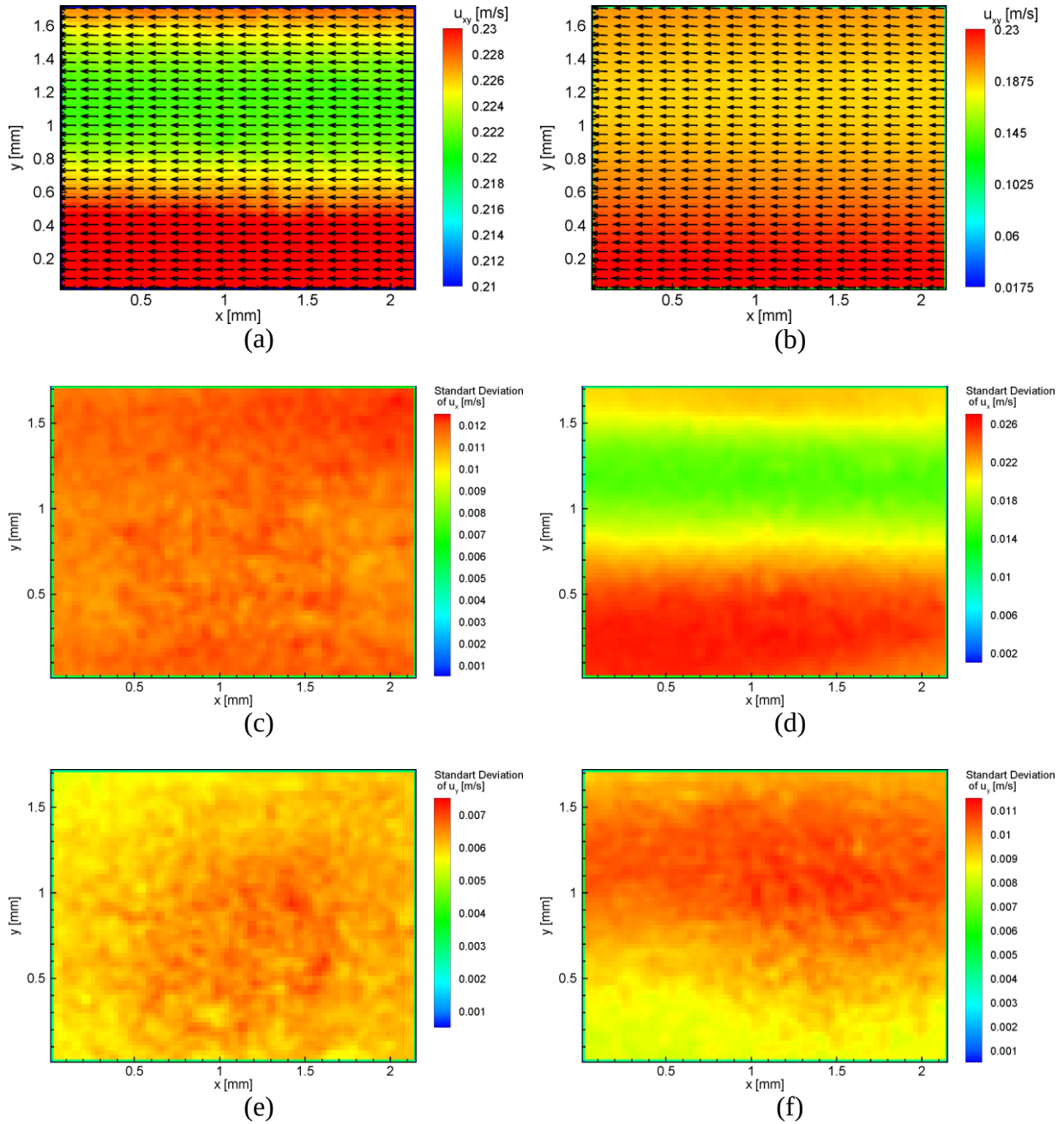
Rys. 22. Geometria G_0 , $Re=547$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .



Rys. 23. Geometria G_1 , $Re=109$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

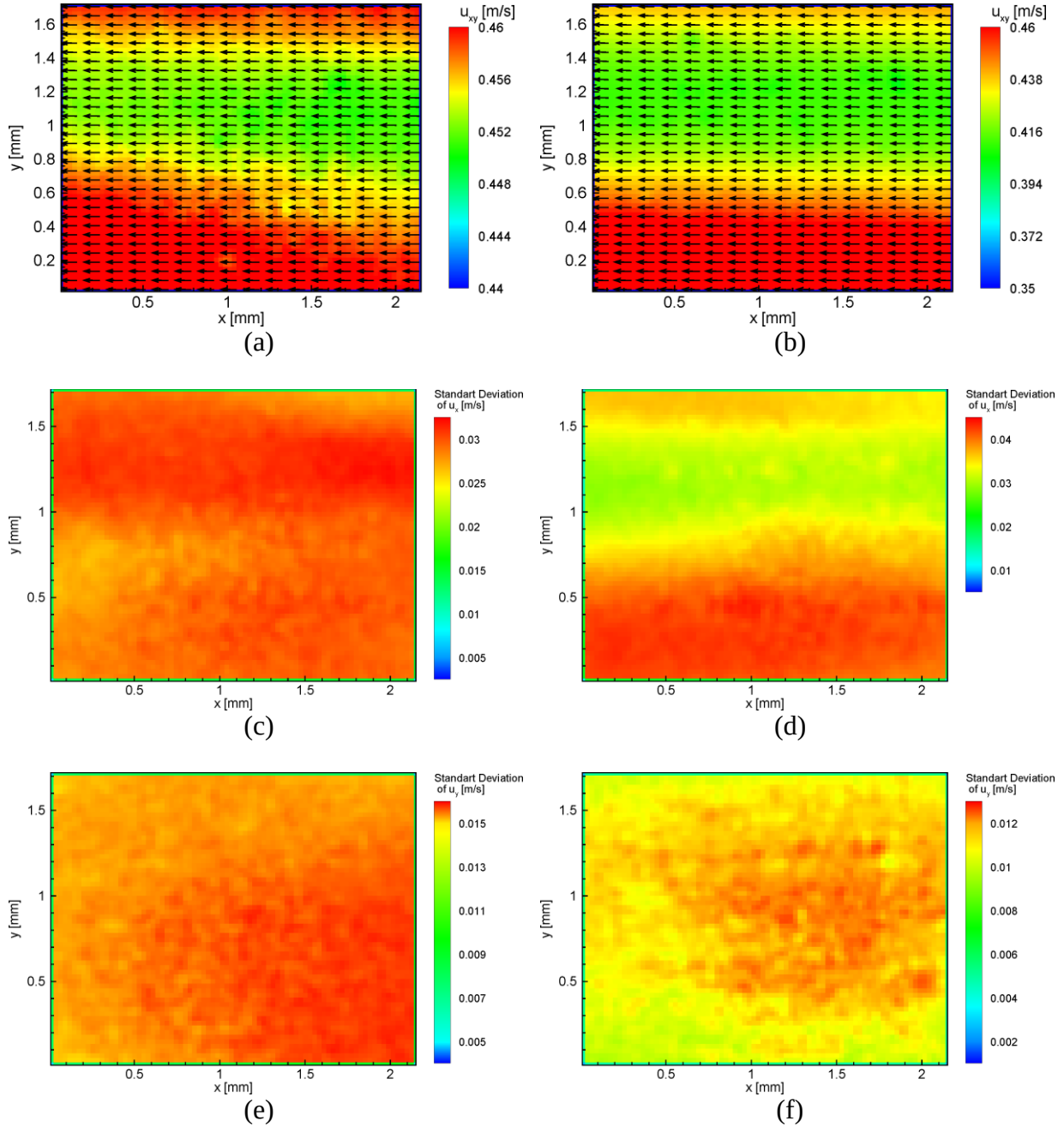
Dla geometrii innych niż optymalna zależność pomiędzy wzmacnianiem poprzecznych fluktuacji prędkości a liczbą Reynoldsa może przebiegać nieco inaczej. Dla geometrii G_1 , która składała się również z 8 segmentów, ale amplituda pofalowania zmniejszona została do 0.6mm, dla liczby Reynoldsa $Re=109$ zaobserwowane zostało nieznaczne wygaszanie fluktuacji, zarówno podłużnych, jak i poprzecznych (rys. 23c, 23d, 23e, 23f). Fluktuacje

podłużne z wartości 0.007m/s na wlocie do kanału uległy zmniejszeniu do 0.0035m/s na wylocie z kanału, a fluktuacje poprzeczne – z 0.0022m/s do 0.0018m/s.



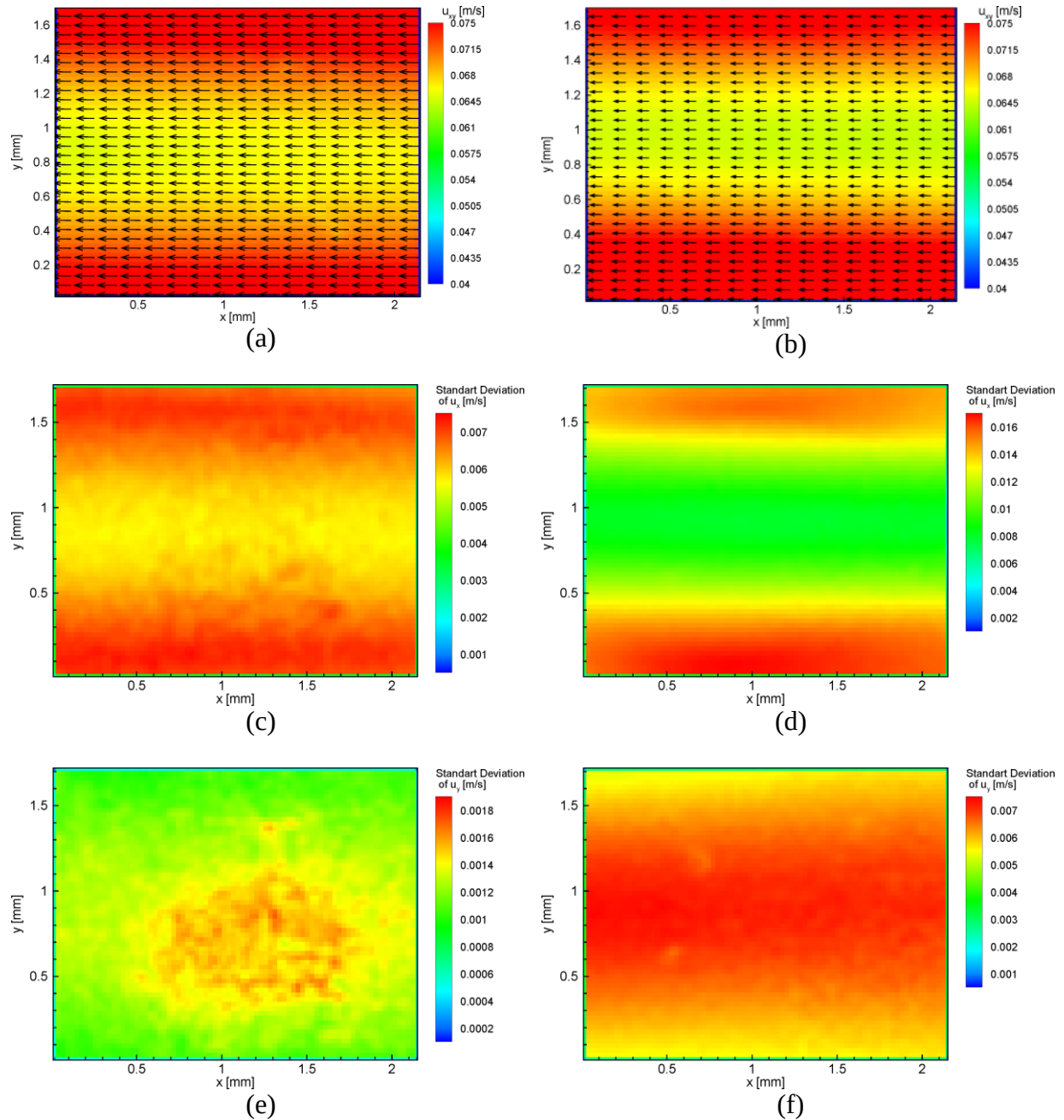
Rys. 24. Geometria G_1 , $Re=255$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

Dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re=255$ przez kanał o geometrii G_1 zaobserwowano już wzmacnianie fluktuacji, zarówno podłużnych, jak i poprzecznych. (porównaj rys. 24c i 24d oraz 24e i 24f).



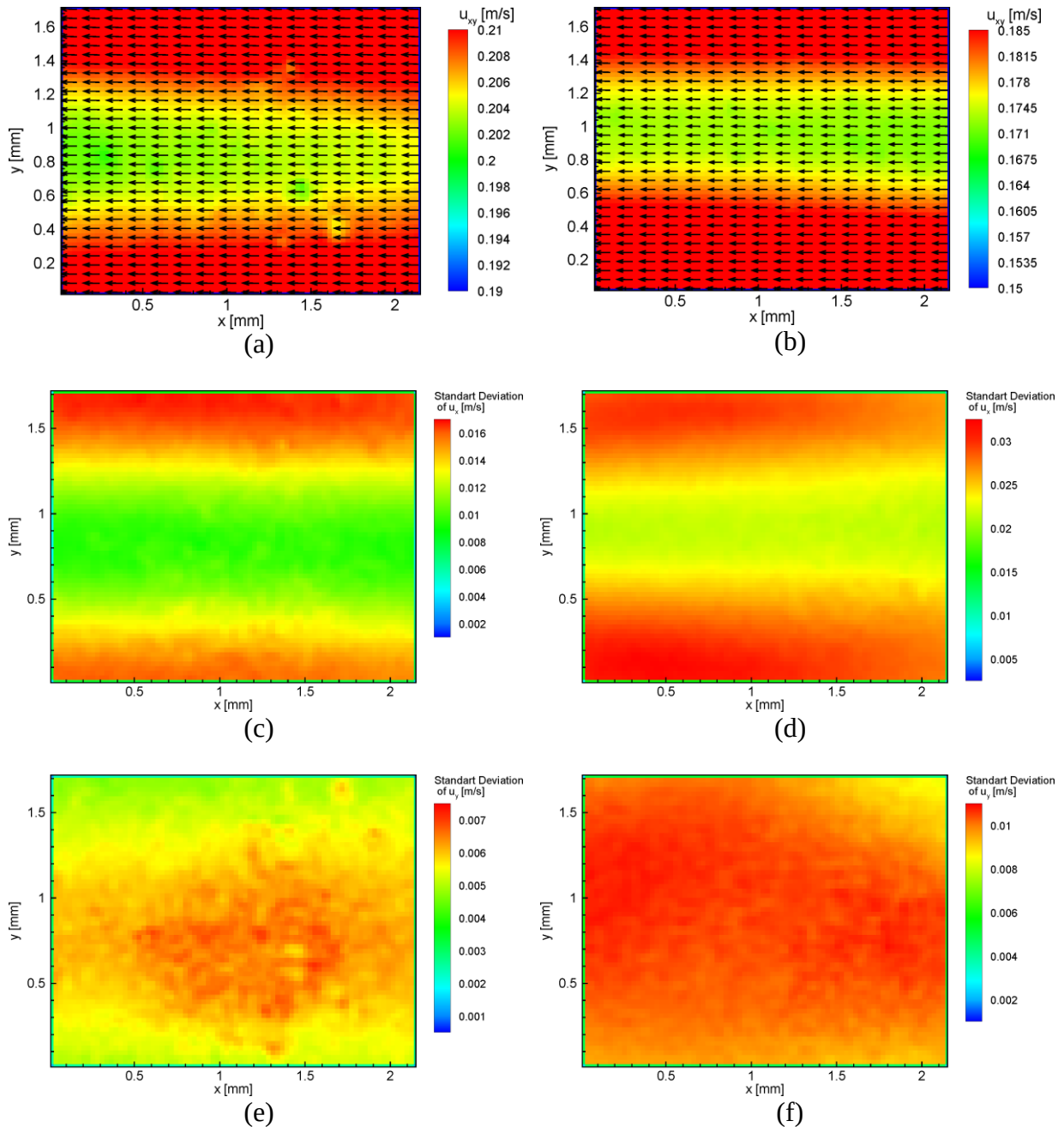
Rys. 25. Geometria G_1 , $Re=547$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

W przepływie przez geometrię G_1 z liczbą Reynoldsa $Re=547$ obserwowane zmiany fluktuacji prędkości pomiędzy wlotem i wylotem kanału nie są jednoznaczne. Stwierdzono tutaj nieznaczny wzrost fluktuacji podłużnych (rys. 25c i 25d) oraz niewielki spadek fluktuacji poprzecznych (rys. 25e i 25f).

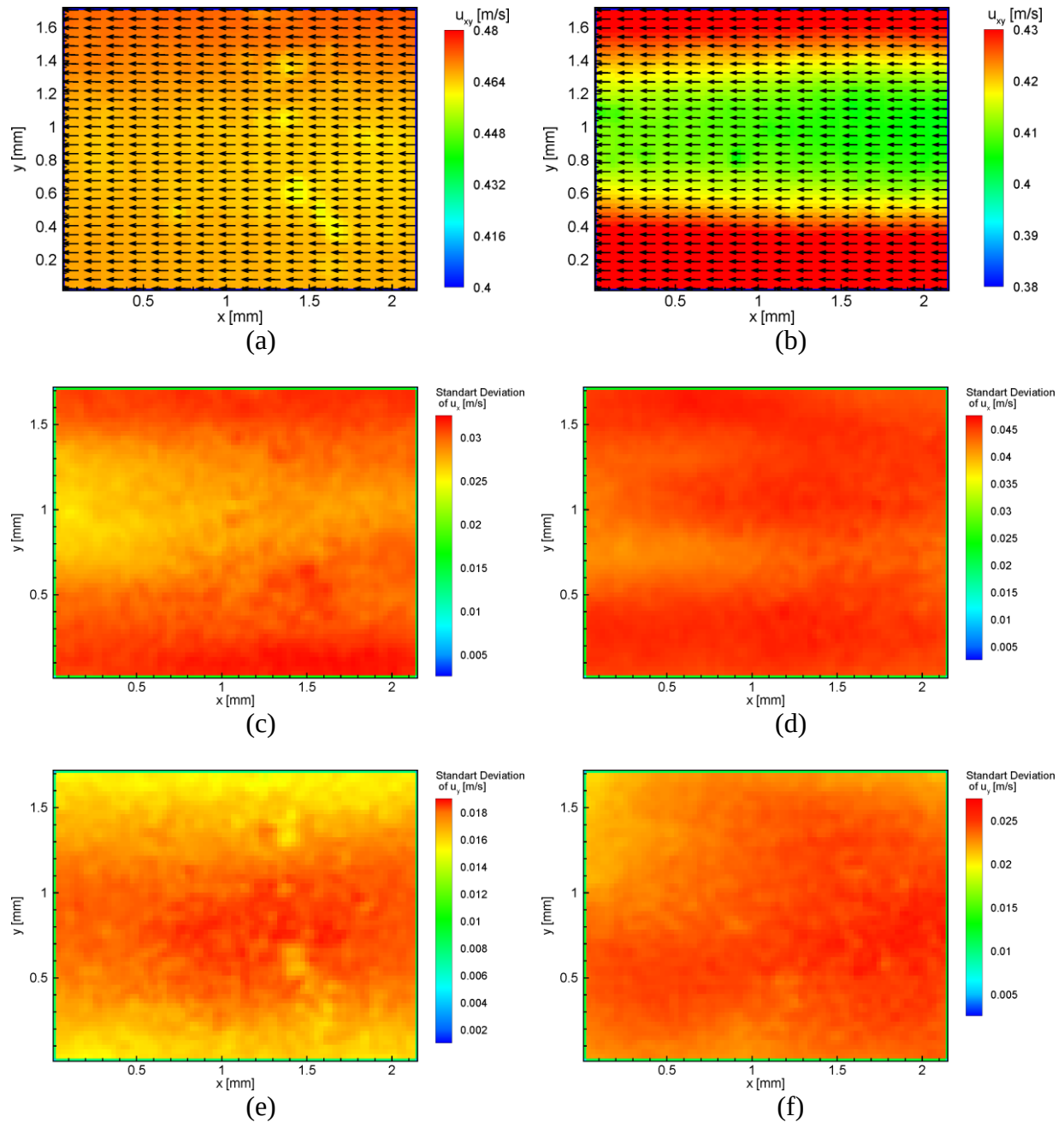


Rys. 26. Geometria G_2 , $Re=109$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

Natomiast dla geometrii G_2 , która podobnie jak geometria optymalna G_0 oraz geometria G_1 składała się z 8 segmentów, ale amplituda pofalowania została zwiększona do 1mm, zaobserwowano wzrost fluktuacji prędkości wzdłużnej i poprzecznej (rys. 26, 27 i 28 – odpowiednio dla liczby Reynoldsa równej 109, 255 oraz 547). Wzrost ten był zauważalny dla każdej analizowanej wartości liczby Reynoldsa.



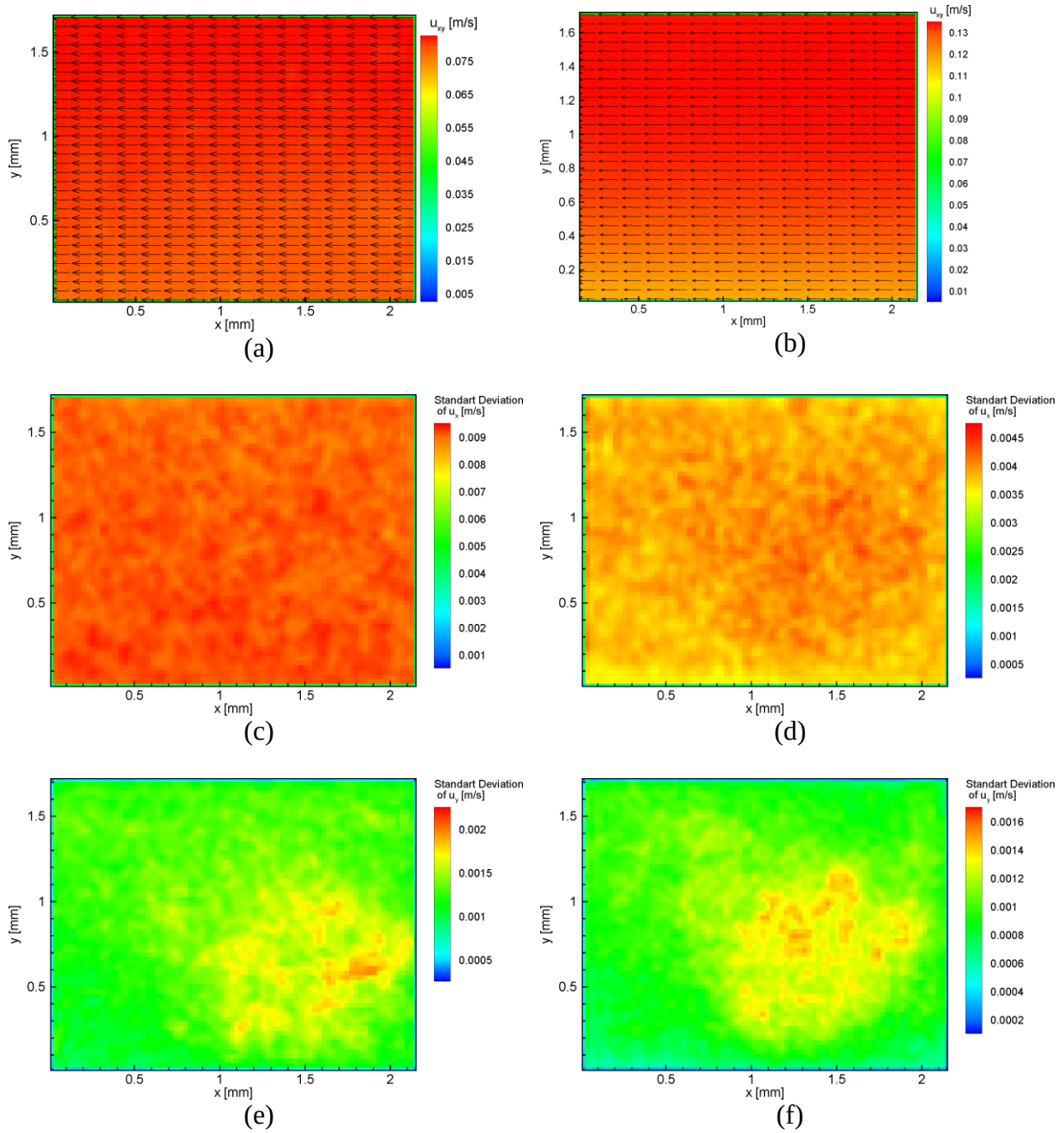
Rys. 27. Geometria G_2 , $Re=255$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .



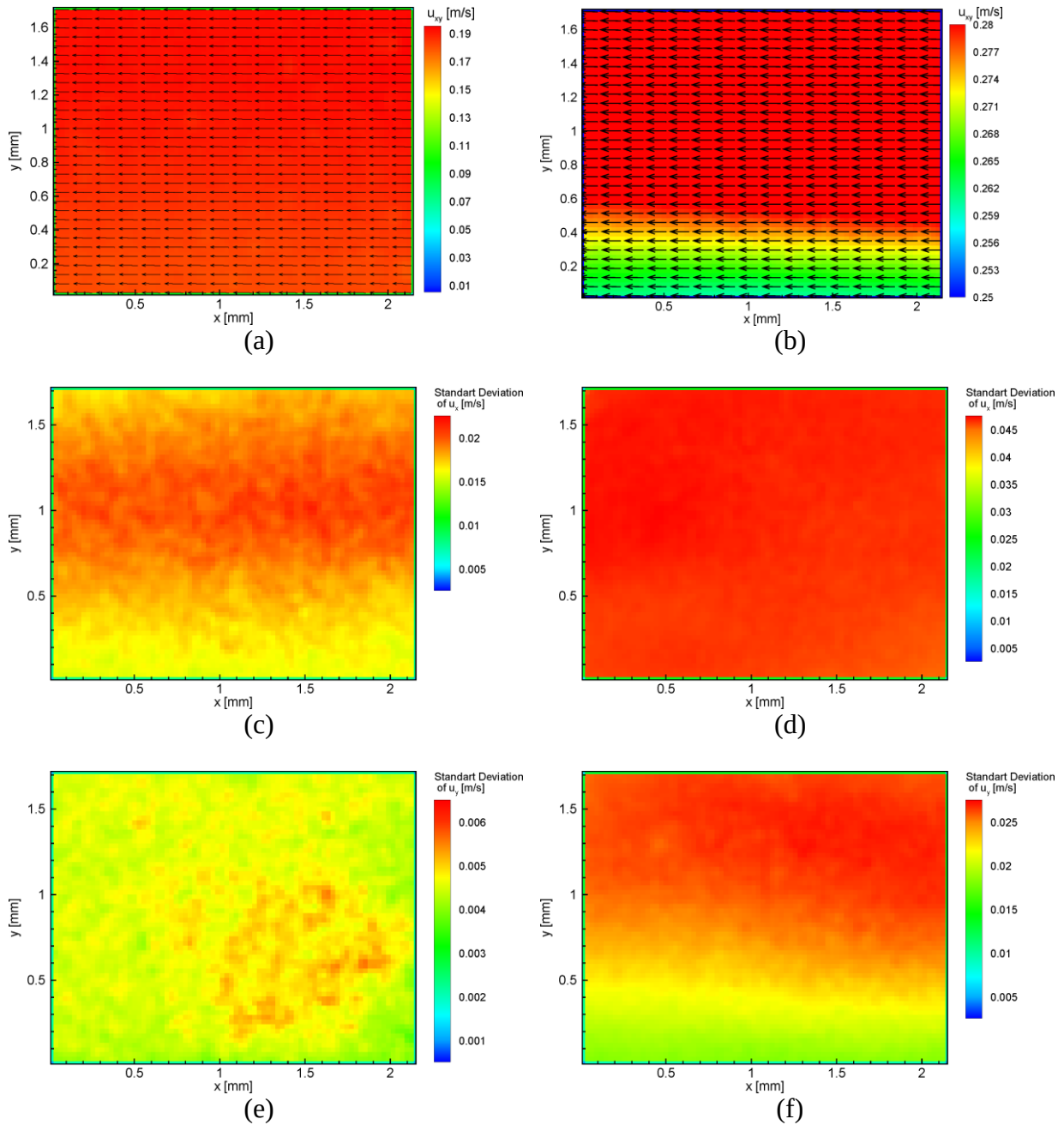
Rys. 28. Geometria G_2 , $Re=547$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

Modyfikacja geometrii polegająca na wprowadzeniu 5 segmentów pofalowania (czyli „fale” są dłuższe w porównaniu z pofalowaniem optymalnym, gdzie było 8 segmentów) o amplitudzie $S=0.8$ (amplituda jak dla wariantu optymalnego) w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=109$ nie zapewniała wzmacniania fluktuacji prędkości (rys. 29). Zarówno podłużne, jak i poprzeczne składowe zaburzenia przepływu uległy tutaj zauważalnemu wygaszeniu. Wzrost liczby Reynoldsa do $Re=255$ spowodował jednak, że fluktuacje

prędkości, zarówno podłużne, jak i poprzeczne, zaczęły być wzmacniane (rys. 30c i 30d oraz 30e i 30f).



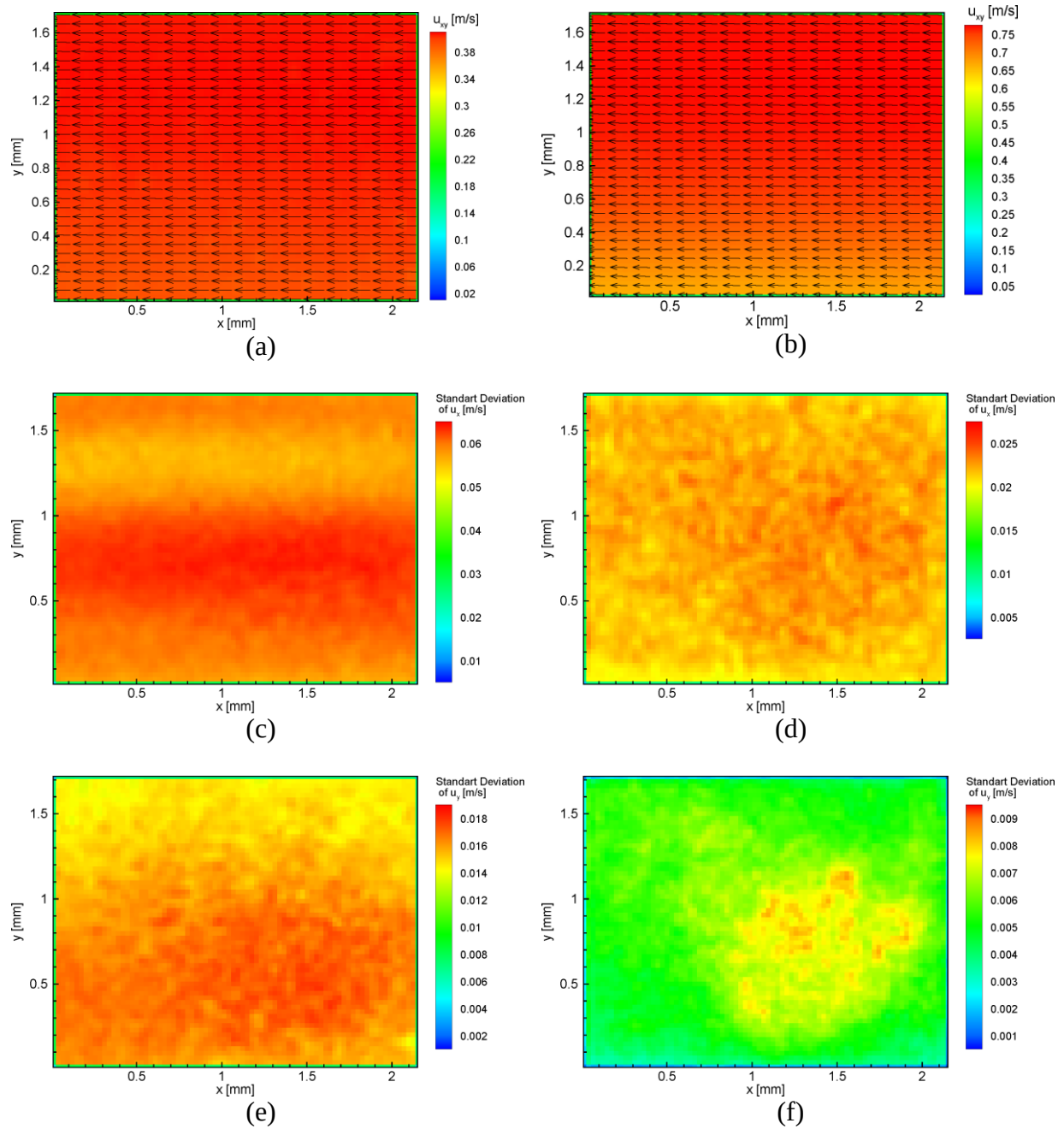
Rys. 29. Geometria G_3 , $Re=109$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .



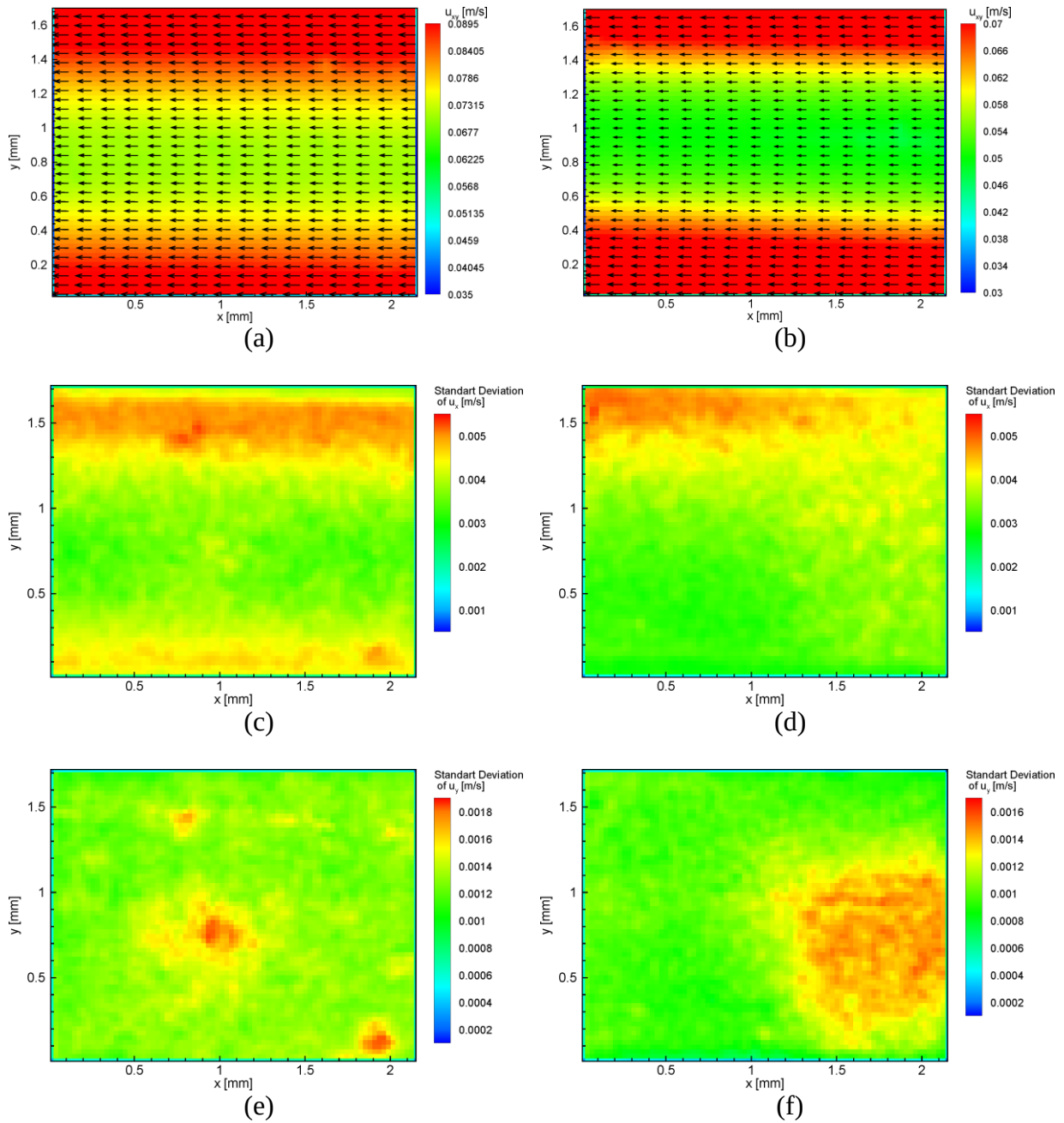
Rys. 30. Geometria G_3 , $Re=255$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

Zwiększając dalej liczbę Reynoldsa do 547 (rys. 31) spodziewać się można było, że fluktuacje prędkości ulegać będą jeszcze intensywniejszemu wzmacnianiu, w porównaniu z przepływem z liczbą Reynoldsa $Re=255$. Jednak, jak można zauważyć na rysunku 31, zarówno podłużne, jak i poprzeczne oscylacje prędkości, uległy ponownie wygaszeniu. Wynik ten jest nieco zaskakujący i może być skutkiem błędnego wykonania pomiaru, np. nieprecyzyjnym

ustawieniem mikroskopu podczas rejestracji obrazów, przez co rejestrowano prędkość bliżej ścinaki, i co mogło spowodować ponowne wygaszenie zaburzeń przepływu.

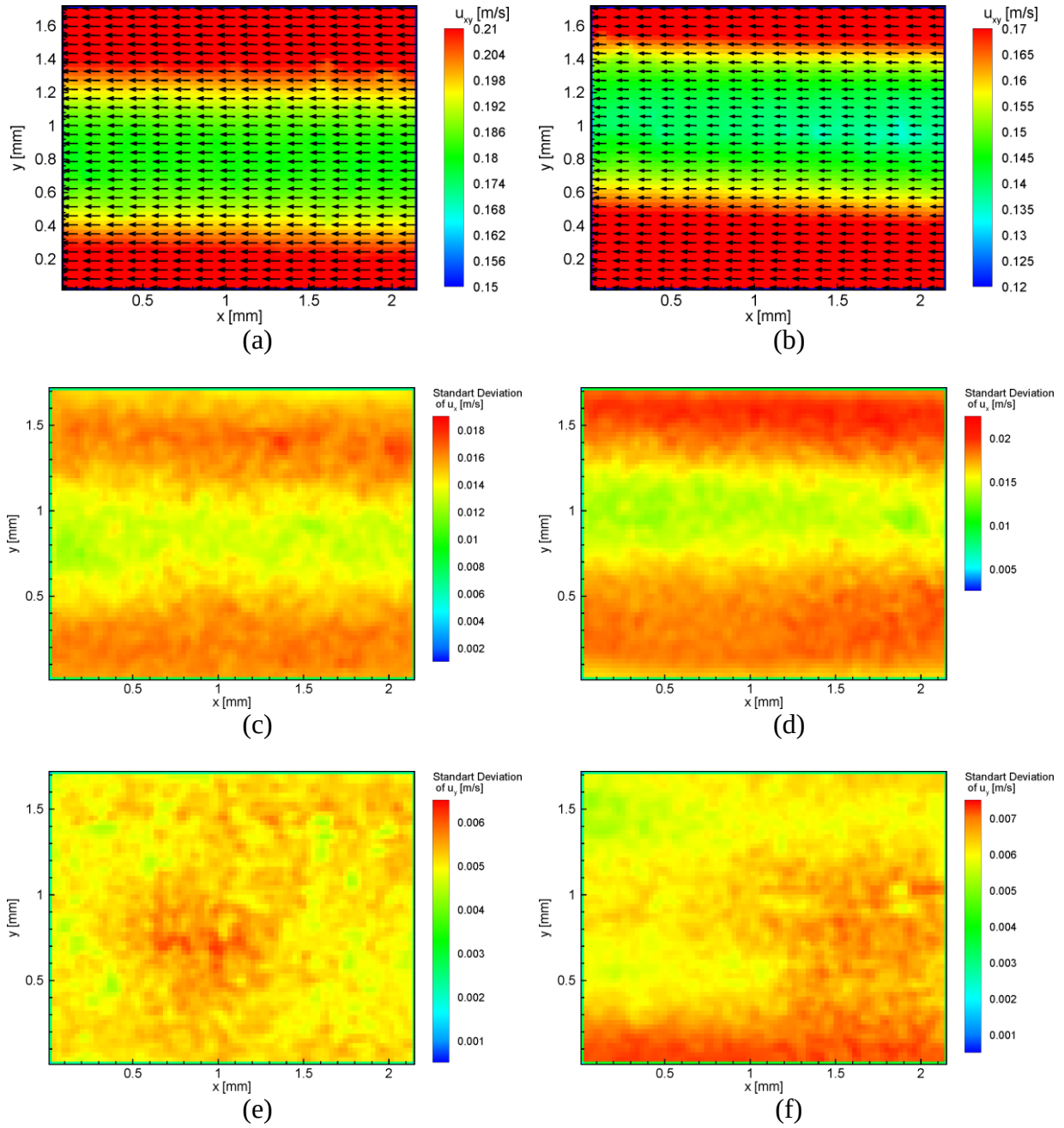


Rys. 31. Geometria G_3 , $Re=547$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

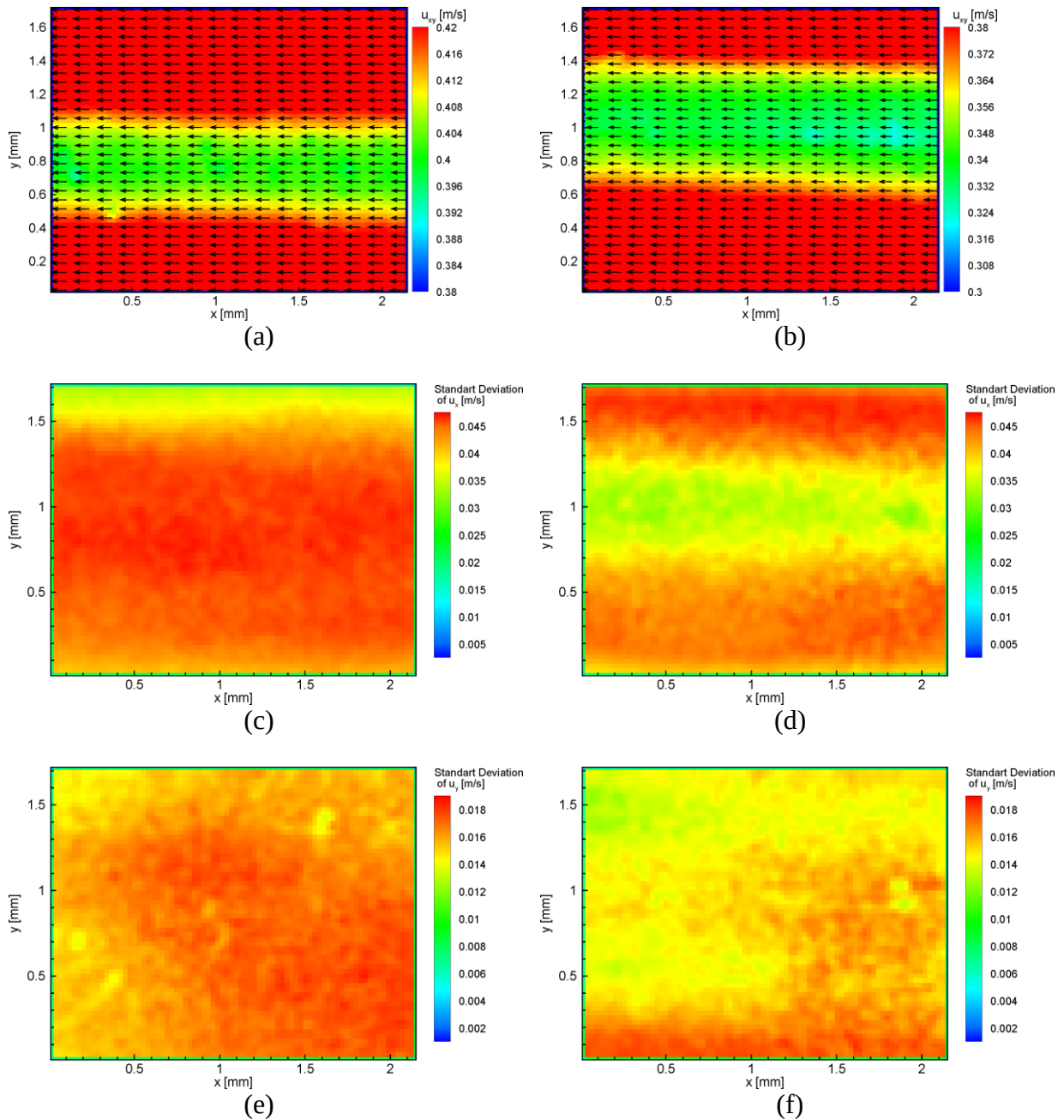


Rys. 32. Geometria G_4 , $Re=109$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

Analizując wyniki pomiarów struktury prędkości w geometrii G_4 (10 segmentów pofalowania o amplitudzie 0.8mm), nie zaobserwowano, bez względu na liczbę Reynoldsa ($Re=109$, $Re=255$ oraz $Re=547$), istotnej zmiany wielkości fluktuacji pomiędzy wlotem i wylotem z kanału (rys. 32, 33 i 34).



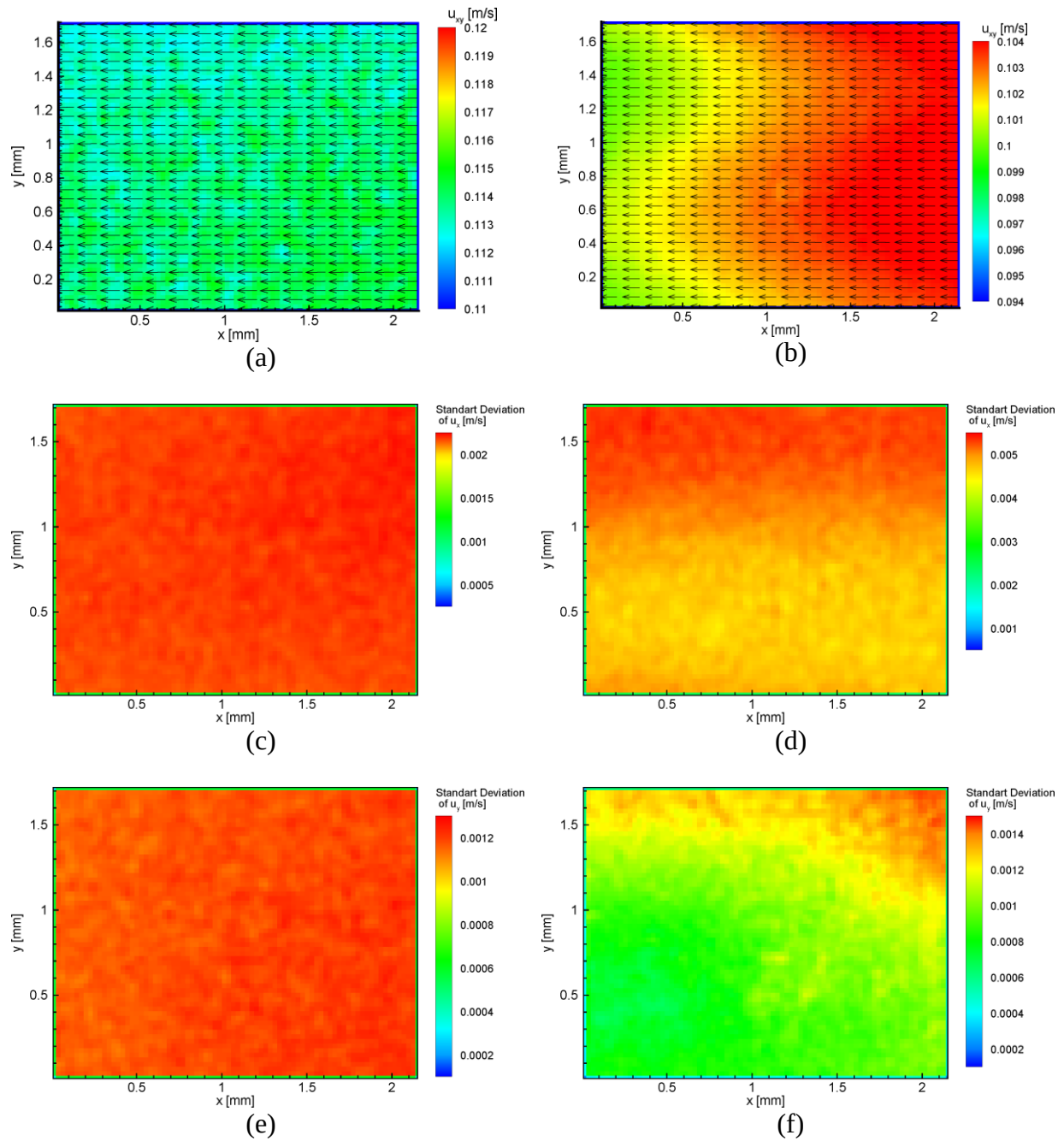
Rys. 33. Geometria G_4 , $Re=255$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .



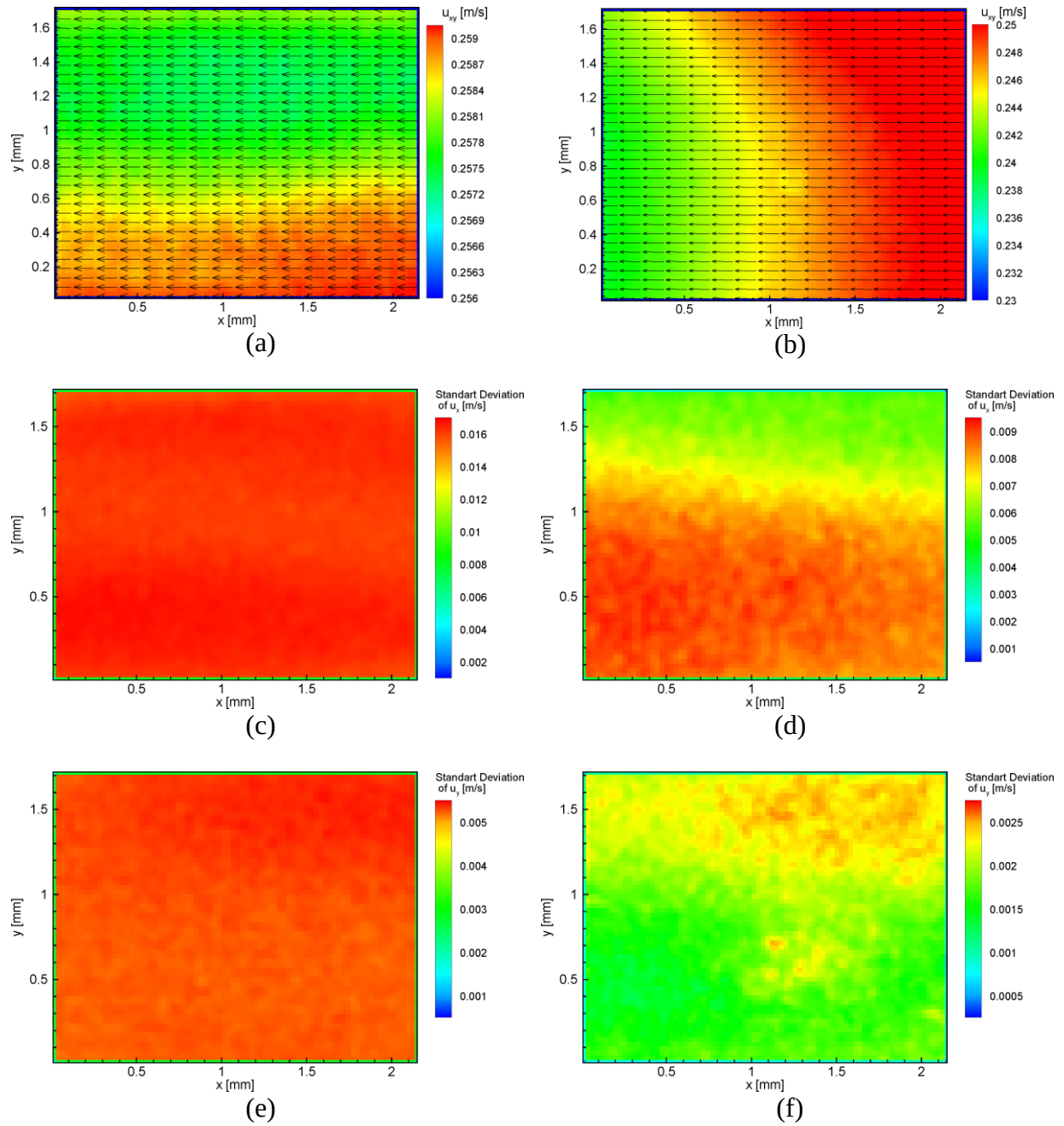
Rys. 34. Geometria G_4 , $Re=547$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

Na koniec pomiarów wykonano eksperymentalną analizę struktury prędkości w kanale bazowym G_p , tzn. w kanale o płaskich wszystkich ściankach, bez wprowadzanych modyfikacji kształtu. Wyniki analizy analogicznej do wykonanej dla wariantów z pofalowaniem ścianek, pokazane zostały na rysunkach 35, 36 i 37. Jak można zauważyć, fluktuacje pomiędzy wlotem i wylotem kanału, dla wszystkich trzech liczb Reynoldsa, pozostają na bardzo podobnym poziomie. Zaobserwowane zmiany wahania prędkości

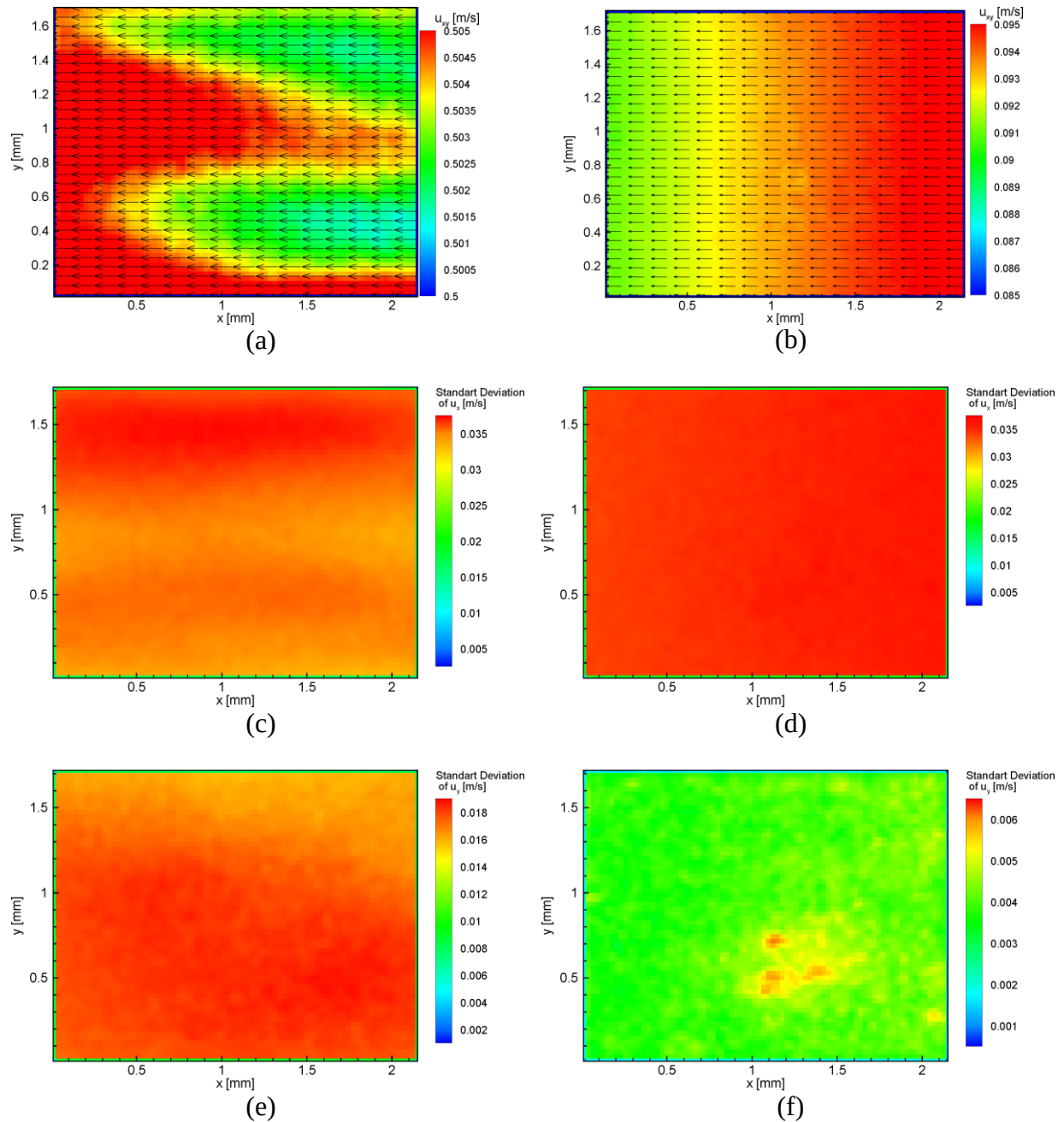
zarówno w kierunku wzdłuż kanału, jak i w poprzek, są na poziomie tysięcznych części metra na sekundę, co jest wartością bardzo niską, bliską granicy dokładności użytej techniki PIV.



Rys. 35. Geometria G_p , $Re=109$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .



Rys. 36. Geometria G_p , $Re=255$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .



Rys. 37. Geometria G_p , $Re=547$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

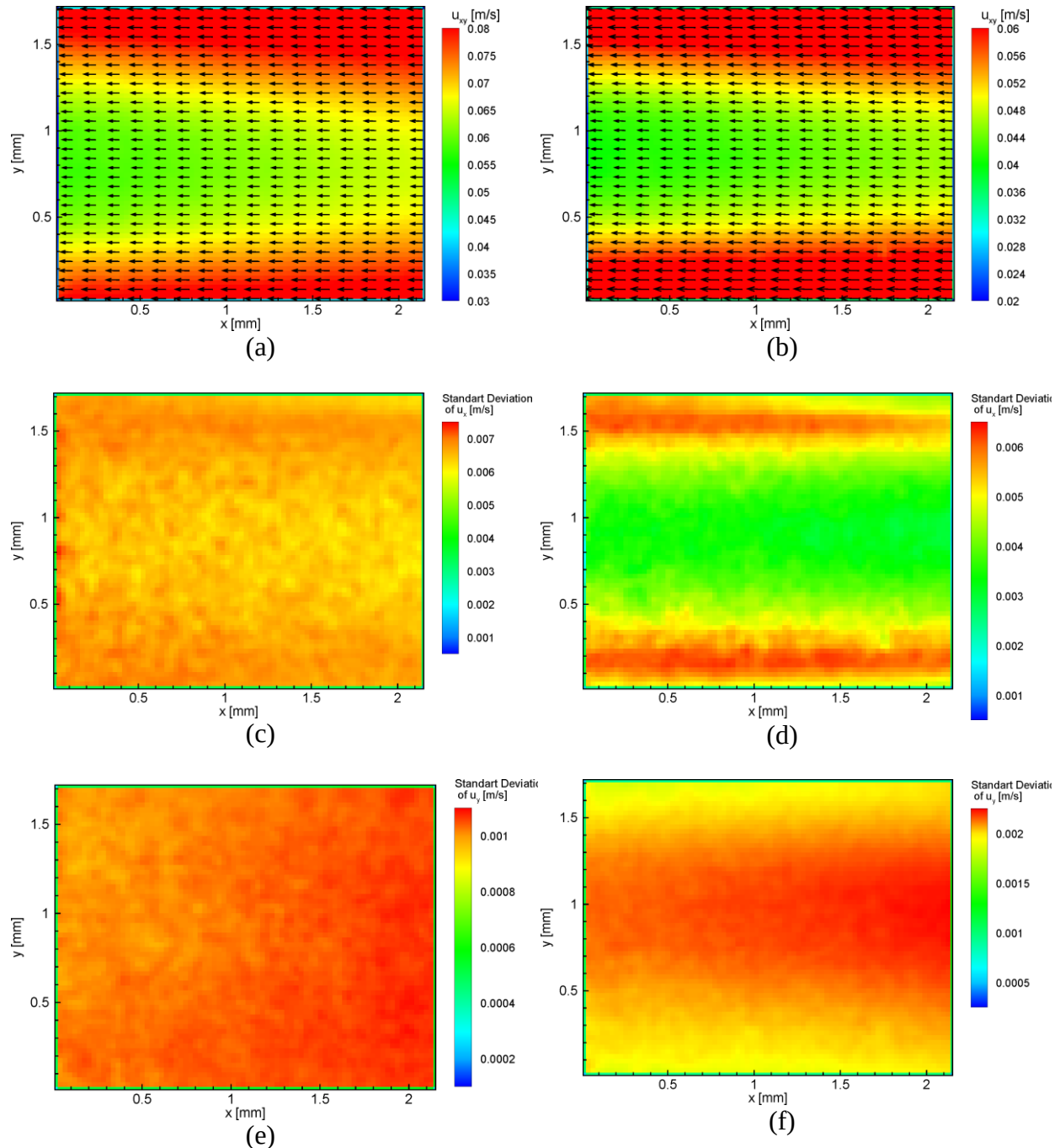
W celu podsumowania zamieszczonych powyżej ilustracji i łatwiejszej „zbiorczej” analizy uzyskanych wyników, w tabeli 1 zamieszczono maksymalne wartości prędkości średniej dla każdej z rozpatrywanych geometrii kanału oraz dla każdej z liczb Reynoldsa. Zamieszczono również maksymalne wartości zarejestrowanych odchyłeń standardowych od prędkości średniej zarówno wzdłużnej, jak i poprzecznej, dla wlotu i wylotu z kanału.

Tabela 1. Zestawienie wyznaczonych eksperymentalnie wskaźników przepływu dla wybranych geometrii i liczb Reynoldsa.

Geometria i liczba Reynoldsa		max. prędkość średnia u_{xy} [m/s]		max. odchylenie standardowe u_x [m/s]		max. odchylenie standardowe u_y [m/s]	
		wlot	wylot	wlot	wylot	wlot	wylot
G_p	Re=109	0.12	0.104	0.002	0.005	0.0012	0.0014
	Re=255	0.259	0.25	0.016	0.009	0.005	0.0025
	Re=547	0.505	0.095	0.035	0.035	0.018	0.006
G_0	Re=109	0.075	0.08	0.04	0.06	0.01	0.025
	Re=255	0.2	0.2	0.04	0.05	0.014	0.022
	Re=547	0.42	0.42	0.05	0.07	0.016	0.025
G_1	Re=109	0.097	0.085	0.007	0.0035	0.0022	0.0018
	Re=255	0.23	0.23	0.012	0.026	0.007	0.011
	Re=547	0.46	0.46	0.03	0.04	0.015	0.012
G_2	Re=109	0.0715	0.0715	0.007	0.016	0.0018	0.007
	Re=255	0.208	0.185	0.016	0.03	0.007	0.01
	Re=547	0.48	0.43	0.03	0.045	0.018	0.025
G_3	Re=109	0.075	0.13	0.009	0.0045	0.002	0.0016
	Re=255	0.19	0.28	0.02	0.045	0.006	0.025
	Re=547	0.38	0.75	0.06	0.025	0.018	0.009
G_4	Re=109	0.084	0.07	0.005	0.005	0.0018	0.0016
	Re=255	0.21	0.17	0.018	0.02	0.008	0.007
	Re=547	0.42	0.38	0.045	0.045	0.018	0.018

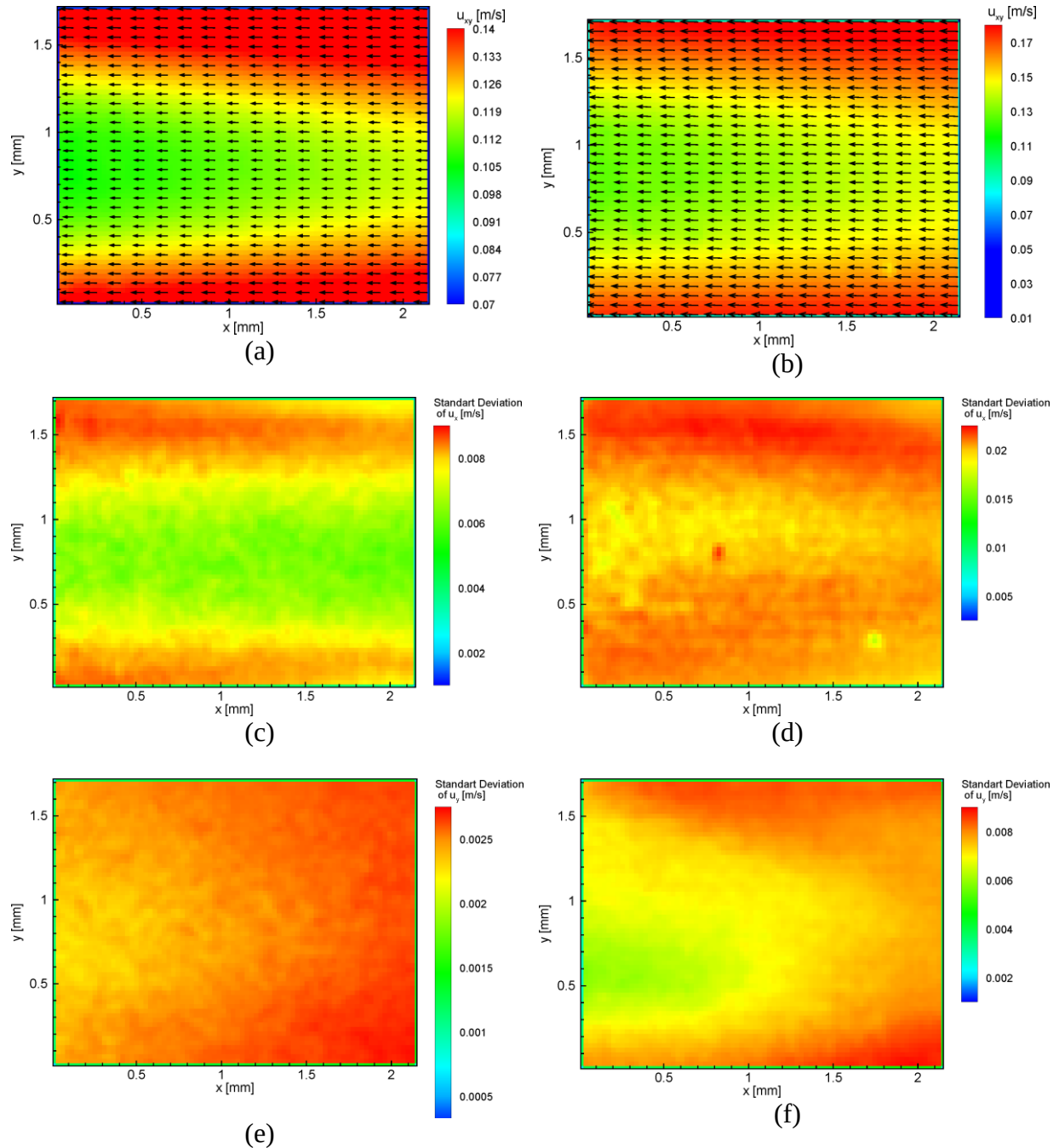
Analizując powyższe wyniki można zauważyć, że wartości fluktuacji prędkości nie zmieniają się z liczbą Reynoldsa w sposób jednoznaczny, a wielkość obserwowanych zmian jest często na granicy dokładności użytej techniki pomiarowej μ PIV. Przyjmuje się, że dokładność tej techniki jest na poziomie 5-6%. W analizowanych eksperymentach czas pomiędzy rejestracjami obrazów służących do wyznaczenia chwilowego pola prędkości był dobierany tak, aby przemieszczenie cząstek znacznikowych wynosiło około 10-15 pikseli, co jest standardową procedurą w pomiarach PIV. Jednakże analizowany przepływ jest silnie zdominowany przez jedną składową prędkości – wzdłuż kierunku głównego przepływu. Symulacje numeryczne pokazały, że prędkości poprzeczne wynoszą tutaj maksymalnie 10-15% prędkości dominującej. Podczas pomiarów czas pomiędzy rejestracją obrazów dobrany względem przepływu dominującego mógł okazać się zatem niewystarczająco długi, aby „uchwycić” prędkości poprzeczne, a tym bardziej ich fluktuacje. Przyjęcie odstępu czasowego pomiędzy rejestracją obrazów, zapewniającego przemieszczenie cząstek znacznikowych o 10 pikseli w kierunku przepływu głównego skutkowało tym, że przemieszczenie cząstek znacznikowych w kierunku poprzecznym było na poziomie 1 piksela, a więc na granicy detekcji przez algorytmy PIV. Wskutek tego w trakcie pomiarów zdecydowano się wykonać pomiary z wydłużonym czasem pomiędzy rejestracjami obrazów. Wykonano 3 dodatkowe serie dla optymalnej geometrii kanału G_0 dla wszystkich analizowanych liczb Reynoldsa. Odstęp czasowy pomiędzy rejestracją zdjęć dobrano tak, aby cząstki znacznikowe przemieszczały się o 20, 30 oraz 50 pikseli. Pomiary wykonano, podobnie jak poprzednio, w okolicy wlotu i wylotu z kanału. Przykładowe wyniki tych pomiarów pokazano na rysunkach 38 – 40. Pokazano jedynie rezultaty pomiarów, w których średnie przesunięcie cząstek znacznikowych wynosiło około 30 pikseli. Dla pozostałych analizowanych przesunięć (20pix i 50pix) wyniki były podobne, zdecydowano się zatem

ograniczyć do zaprezentowania przykładowych rezultatów jednej, wybranej serii pomiarowej. Zamieszczono tutaj, analogicznie jak poprzednio, rozkład prędkości średniej w okolicach wlotu i wylotu oraz odchylenie standardowe pola prędkości w kierunku wzdłuż przepływu dominującego („x”) oraz w poprzek przepływu dominującego („y”), zarówno dla wlotu, jak i wylotu z kanału.



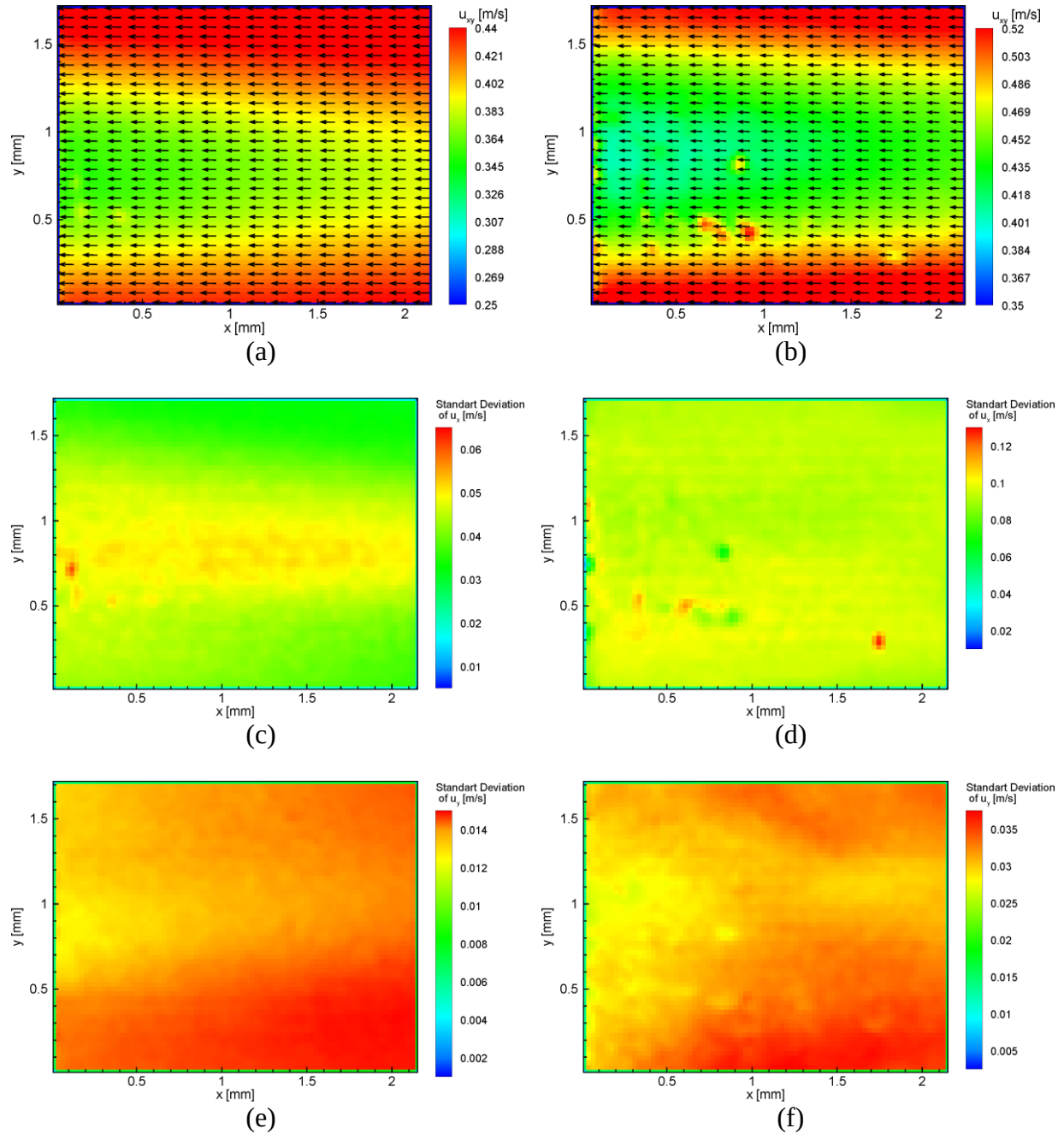
Rys. 38. Pomiar μ PIV ze średnim przesunięciem cząstek znacznikowych $\Delta x=30\text{pix}$; geometria G_0 , $Re=109$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

Na rysunku 38 pokazano wyniki analizy dla przepływu przez kanał o geometrii G_0 z liczbą Reynoldsa $Re=109$. Jak możemy zauważyć, prędkość średnia pomiędzy wlotem i wylotem kanału uległa bardzo nieznacznemu zmniejszeniu (rys. 38a i 38b). Podobnie, niewielkiemu wytłumieniu uległy podłużne fluktuacje prędkości. Poprzeczne oscylacje uległy natomiast wzmocnieniu.



Rys. 39. Pomiar μPIV ze średnim przesunięciem cząstek znacznikowych $\Delta x=30\text{pix}$; geometria G_0 , $Re=255$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

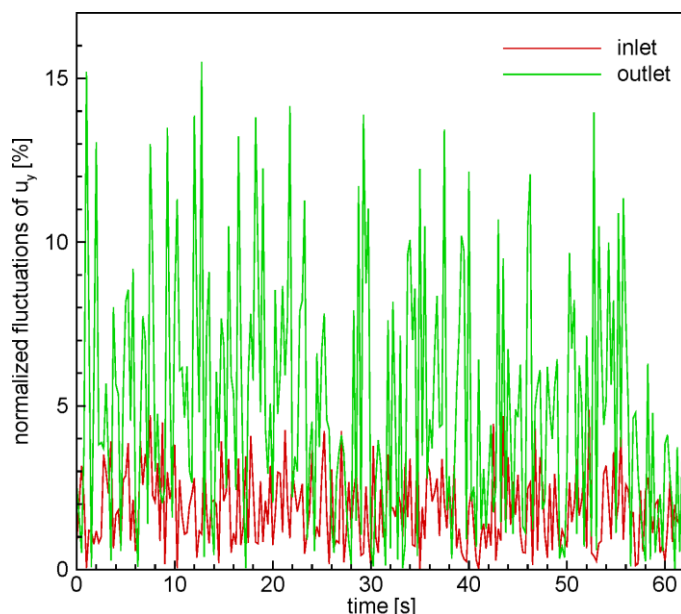
Zaobserwowane zmiany są jednak na bardzo niskim poziomie, bliskim granicy dokładności użytej techniki pomiarowej.



Rys. 40. Pomiar μ PIV ze średnim przesunięciem cząstek znacznikowych $\Delta x=30$ pix; geometria G_0 , $Re=547$: a) pole prędkości u_{xy} na wlocie do kanału, b) pole prędkości u_{xy} na wylocie z kanału, c) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_x , d) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_x , e) odchylenie standardowe na wlocie do kanału ze składowej u_y , f) odchylenie standardowe na wylocie z kanału ze składowej u_y .

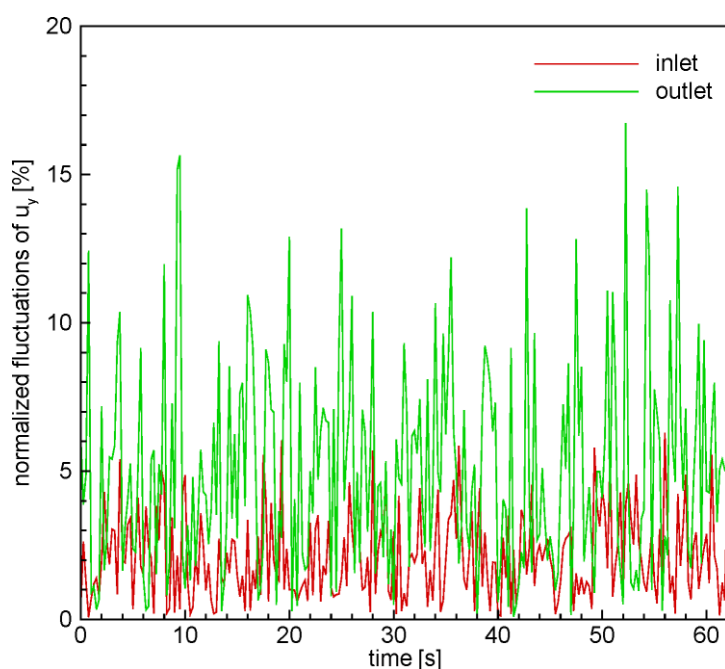
Dzięki zwiększeniu liczby Reynoldsa do $Re=255$ osiągnięto natomiast wzmacnianie zarówno poprzecznych, jak i podłużnych fluktuacji prędkości. Na rysunku 39 możemy zauważyć, że odchylenie standardowe wyznaczone dla wzdłużnej składowej prędkości pomiędzy wlotem i wylotem kanału zmienia się od 0.008m/s do 0.02m/s, a dla składowej poprzecznej – od 0.0025m/s do 0.008m/s. Dalsze zwiększanie prędkości przepływu, zgodnie z przypuszczeniem, spowodowało dalsze wzmacnianie początkowych zaburzeń przepływu. W przepływie z liczbą Reynoldsa równą $Re=547$ (rys. 40) stwierdzono, że oscylacje podłużne prędkości wzrastają od 0.06m/s na wlocie do kanału, do 0.12m/s na wylocie z kanału, a oscylacje poprzeczne od 0.014m/s do 0.035m/s.

Miara opisująca fluktuacje prędkości, przyjęta w powyższych rozważaniach, będąca odchyleniem standardowym prędkości średniej, być może nie jest najbardziej właściwym opisem analizowanych parametrów przepływów, gdyż mogła uśrednić niektóre zaburzenia przepływu oraz „rozmyć” subtelne różnice występujące pomiędzy poszczególnymi, analizowanymi wariantami konfiguracji. Aby w sposób obrazowy, nieobarczony wpływem metody analizy, pokazać zachowanie się fluktuacji prędkości dla poszczególnych liczb Reynoldsa, a rysunkach 41, 42 i 43 pokazano „przebiegi czasowe” znormalizowanej składowej poprzecznej prędkości w dwóch punktach przestrzennych kanału: 25mm za wlotem do kanału, na osi podłużnej kanału (linie czerwone „inlet”) oraz 25 przed wylotem z kanału (również na podłużnej osi symetrii kanału; linie zielone „outlet”). Pokazane wartości prędkości zostały wyekstrahowane z pól prędkości zmierzonych techniką μPIV . Wyrysowano tutaj w funkcji czasu chwilowe wartości składowej prędkości w poprzek kanału, podzielone przez całkowitą prędkość średnią (sumę składowych wzdłuż i w poprzek kanału) w danym punkcie (średnia po czasie). Wynik został wyrażony w procentach.



Rys. 41. Punktowe fluktuacje składowej prędkości u_y wyekstrahowane z pomiarów μPIV , unormowane przez prędkość średnią przepływu głównego, wyznaczone dla punktów na podłużnej osi symetrii kanału 25mm za wlotem do kanału (linia czerwona „inlet”) oraz 25mm przed wylotem z kanału (linia zielona „outlet”); geometria G_0 , liczba Reynoldsa $Re = 109$.

Jak można zauważyć, przy liczbie Reynoldsa $Re=109$ na wlocie do kanału prędkość w poprzek kanału stanowi maksymalnie około 5% prędkości średniej przepływu w tym punkcie (rys. 41). Na wylocie natomiast składowa poprzeczna osiąga nawet 15% prędkości średniej. Średnia wartość fluktuacji na wlocie wynosi tutaj 1.83%, a na wylocie 5.0%. Można zatem wnioskować, że wzdłuż kanału nastąpiło znaczne wzmocnienie poprzecznych fluktuacji prędkości. Wzrost liczby Reynoldsa do $Re=255$ spowodował niewielkie zmiany w obserwowanej intensywności wzmacniania zaburzeń wzdłuż kanału (rys. 42). Na wlocie poprzeczne maksymalne oscylacje prędkości nieznacznie przekraczają 5% prędkości średniej (średnia wartość fluktuacji wynosi tutaj 2.12% - nastąpił zatem nieznaczny wzrost, w porównaniu z przepływem z liczbą Reynoldsa $Re=109$), a na wylocie 15-17% (średnia wartość to 5.01% - a zatem niemal identycznie, jak w przepływie z $Re=109$).

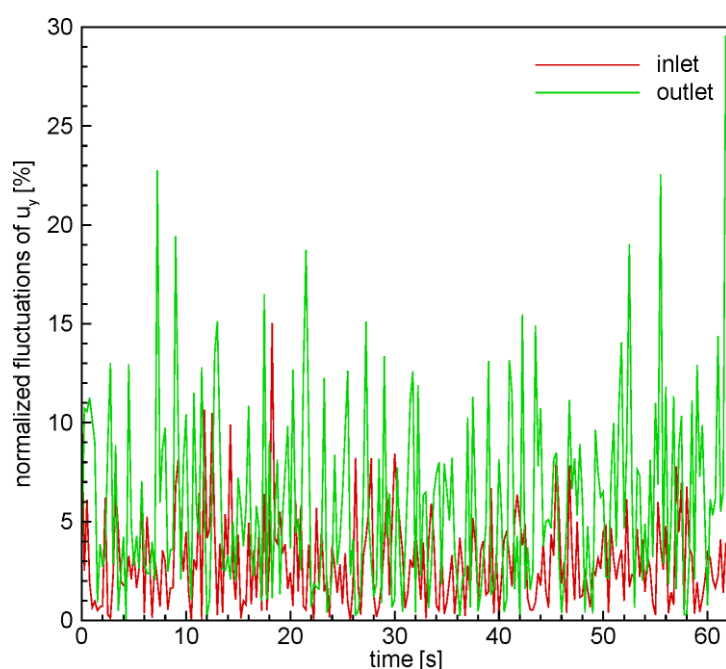


Rys. 42. Punktowe fluktuacje składowej prędkości u_y wyekstrahowane z pomiarów μ PIV, unormowane przez prędkość średnią przepływu głównego wyznaczone dla punktów na podłużnej osi symetrii kanału 25mm za wlotem do kanału (linia czerwona „inlet”) oraz 25mm przed wylotem z kanału (linia zielona „outlet”); geometria G_0 , liczba Reynoldsa $Re = 255$.

Z dalszym wzrostem liczby Reynoldsa do wartości $Re=547$ (rys. 43) poprzeczne zaburzenia przepływu na wlocie potrafią osiągnąć nawet 10-15% prędkości średniej, jednak są to tylko chwilowe, jednorazowe „wyskoki”, gdyż średnia wartość fluktuacji wzrosła tutaj do 2.99%. Na wylocie z kanału zaś chwilowe oscylacje osiągają nawet 25-30% prędkości średniej, powodując, że średnia wartość poprzecznych fluktuacji prędkości wzrosła tutaj do 5.97%.

Bazując na przebiegach poprzecznych fluktuacji prędkości, zamieszczonych na rysunkach 41, 42 i 43, można jednoznacznie stwierdzić istotny wpływ pofalowania ścianki kanału na wzmacnianie początkowych zaburzeń przepływu. Nawet w przepływie z najniższą liczbą

Reynoldsa równą $Re=109$ wpływ ten jest istotny, wzmacniając poprzeczne fluktuacje prędkości ponad dwukrotnie.



Rys. 43. Punktowe fluktuacje składowej prędkości u_y wyekstrahowane z pomiarów μ PIV, unormowane przez prędkość średnią przepływu głównego wyznaczone dla punktów na podłużnej osi symetrii kanału 25mm za wlotem do kanału (linia czerwona „inlet”) oraz 25mm przed wylotem z kanału (linia zielona „outlet”); geometria G_0 , liczba Reynoldsa $Re = 547$.

6. Analiza efektywności mieszania na podstawie pomiaru pola temperatury powierzchni kanałów

Jednym z mikroskalowych wskaźników zmiany reżimu przepływu z laminarnego na przepływ turbulentny jest intensyfikacja wymiany ciepła. Podobnie możemy się spodziewać, że pojawienie się przewidywanych modelem teoretycznych zaburzeń struktury przepływu w postaci fal poprzecznych powinno być widoczne w pomiarach charakterystyk termicznych badanego kanału potraktowanego jako wymiennik ciepła. Dla przeprowadzenia takich badań analizowaną pofalowaną ściankę kanału utrzymywano w zadanej temperaturze. Do tego celu wykorzystano odpowiednio przygotowany blok aluminiowy będący w dobrym kontakcie termicznym ze ścianką. Blok został wyposażony w kanały przez które przepływała woda utrzymywana w stałej temperaturze przez wysokowydajny termostat. Drugi termostat zapewniał stałą temperaturę wody wpływającej do kanału. Szczegółowy opis stanowiska pomiarowego zamieszczony został w rozdziale 2 niniejszego załącznika.

Każda z badanych pofalowanych ścianek została pokryta specjalnie spreparowaną cienką (ok. 10-20 μ m) termo czułą warstwą ciekłokrystaliczną. Górna ścianka wykonana ze szkła pozwalała na obserwację wnętrza kanału, dolnej ścianki pokrytej termo czułą warstwą i jednocześnie zapewniała dobrą izolację termiczną. Układ pomiarowy i zdjęcia pokrytej warstwą termo czułą wymiennej płytki pofalowanej ścianki przedstawione zostały na rys. 3 i 6 niniejszego załącznika. Celem pomiarów było przeprowadzenie analizy zmian współczynnika wymiany ciepła pofalowanej ścianki w funkcji liczby Reynoldsa oraz stwierdzenie czy i dla jakiej wartości liczby Reynoldsa ma miejsce zmiana standardowej charakterystyki wynikającej z nieliniowej zależności liczby Nusselta od liczby Reynoldsa. Badania przeprowadzono analizując barwy pokrycia ciekłokrystalicznego. Warstwa termo czułych ciekłych kryształów (tzw. TLC – Termohromic Liquid Crystals), których barwa silnie zależy od lokalnej temperatury powierzchni nimi pokrytej, stanowi bardzo czuły wskaźnik temperatury. Odpowiednie dobranie warunków chłodzenia/grzania ścianek kanału oraz temperatury przepływającej kanałem cieczy chłodzącej, po uprzednim wykalibrowaniu wskazań farby ciekłokrystalicznej, pozwoliło na wyznaczenie intensywności wymiany ciepła w funkcji liczby Reynoldsa i rodzaju modyfikacji ścianek kanału. Zastosowana technika pozwoliła na stwierdzenie jak zaproponowane modyfikacje geometryczne kanału wpływają na intensywność wymiany ciepła pomiędzy ściankami kanału a cieczą nim płynącą.

Wymiana ciepła a struktura przepływu

Pole temperatury ścianki kanału jest funkcją położenia i czasu, i zależy od wielkości strumienia ciepła płynącego pomiędzy pofalowaną ścianką kanału utrzymywaną w stałej wysokiej (35°C) temperaturze przez termostatowany blok aluminiowy, a chłodniejszym płynem obmywającym tę ściankę. W uproszczeniu możemy przyjąć, że rozpatrywany problem dotyczy jednowymiarowego transportu ciepła opisywanego uproszczoną wersją prawa Fouriera:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_w - T_o),$$

gdzie jest q jest strumieniem ciepła, λ – współczynnikiem przewodzenia ciepła materiału ścianki, δ – grubością ścianki, T_o i T_w temperaturami zewnętrzną i wewnętrzną ścianki.

Zewnętrzna temperatura ścianki jest utrzymywana na stałym poziomie przez blok aluminiowy. Temperatura wewnętrzna jest zależna od transportu ciepła do kontaktującego się ze ścianką płynu opisanego równaniem Newtona:

$$q = A(T_w - T_f)$$

gdzie T_f jest temperaturą płynu, A jest współczynnikiem wnikania (przejmowania) ciepła i zależy od prędkości płynu u i własności termofizycznych płynu. W stanie stacjonarnym strumienie ciepła są identyczne i powyższe zależności pozwalają zapisać temperaturę powierzchni wewnętrznej ścianki w funkcji stałych wartości jakimi są temperatura zewnętrzna T_o , temperatura płynu T_f , parametry termofizyczne płynu i ścianki, parametry geometryczne oraz zmienianej w eksperymencie prędkości przepływu u .

$$T_f = Nu(u)Cf(T_o, T_f, \lambda, \delta)$$

Funkcja $Nu(u)$ jest zmodyfikowaną liczbą Nusselta i dla naszego przypadku przedstawia zależność współczynnika przenikania ciepła w funkcji liczby Reynoldsa, a efektywnie w funkcji prędkości przepływu u .

Zależność liczby Nusselta dla przepływu wymuszonego cieczy w kanale opisuje empiryczna zależność od liczby Reynoldsa Re i liczby Prandtla Pr , którą dla naszych potrzeb możemy sprowadzić do uproszczonej zależności od jednego zmienianego parametru jakim jest prędkość przepływu u :

$$Nu = C Re^m Pr^n = Ku^m$$

Dla dalszej analizy interesujący jest dla nas głównie eksponent m charakteryzujący charakter przepływu. Dla przepływu laminarnego wartość tego współczynnika wynosi $m=0,33$ i wzrasta dla przepływu burzliwego cieczy w kanale do wartości $m=0,8$. Taka zmiana charakterystyki cieplnej jest analogiem do badanej w poprzednim rozdziale charakterystyki zmian współczynnika oporów przepływu (spadku ciśnienia) w funkcji liczby Reynoldsa.

Ta uproszczona analiza odpowiedzi termicznej badanej ścianki pozwala stwierdzić, że temperatura opływanej płynem płytki zmienia się nieliniowo z prędkością przepływu. Badając tę zależność w skali logarytmicznej powinno być możliwe zauważenie wpływu zmiany charakteru przepływu (przejście laminarno-turbulentne) jako zmiany nachylenia danej charakterystyki. Podobnie możemy oczekiwać, że powstanie poprzecznych modów przepływu odpowiedzialnych za intensyfikację wymiany ciepła powinno być widoczne w badanej charakterystyce jako skokowa zmiana jej nachylenia. Wielkość tej zmiany i zakres liczb Reynoldsa, dla której występuje, powinna zależeć od geometrii pofalowanej płytki.

Badania przeprowadzone dla różnych pofalowań powinny wskazać na optymalną dla tego procesu geometrię pofalowań. Taki jest cel przeprowadzonych w tym rozdziale eksperymentów.

Termoczule pokrycia ciekłokrystaliczne

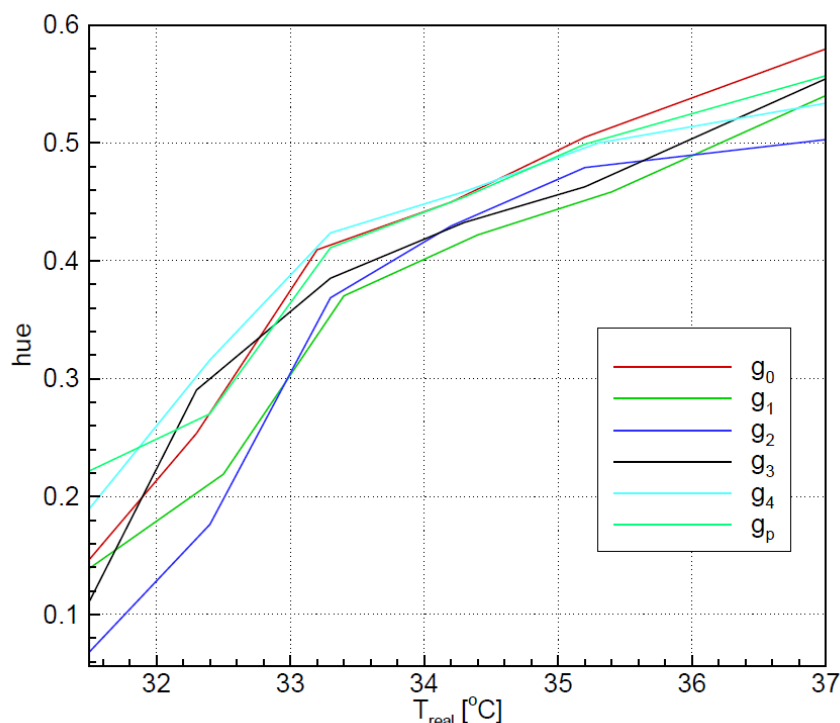
Pomiar rozkładu temperatury na powierzchni wewnętrznej ścianki opływanej wodą jest zasadniczo możliwy jedynie przy wykorzystaniu termo czułych pokryć ciekłokrystalicznych. Typowa dla badań temperatury powierzchni termografia oparta na promieniowaniu w podczerwieni nie znajduje zastosowania z uwagi na silne pochłanianie tego promieniowania przez wodę.

Termografia ciekłokrystaliczna bazuje na zmianie barwy światła rozproszonego na ciekłych kryształach w funkcji lokalnej temperatury, w analizowanym przypadku temperatury cieczy opływającej ściankę kanału. Kolor rozpraszanego światła zmienia się ze wzrostem temperatury od niskoenergetycznych barw długofalowych (czerwonej) do barw górnego zakresu widma światła widzialnego (kolor niebieski). Poza zakresem aktywnym (poniżej i powyżej temperatury granicznej) materiał ciekłokrystaliczny jest optycznie niemal przezroczysty. Zakres zmian koloru (tzw. *colour play range*) zależy od stosowanego materiału ciekło-kryształicznego i musi być dopasowany do warunków eksperymentu. Rejestrowany obraz kolorowy jest reprezentowany przez trzy barwy podstawowe: *czerwoną, zieloną i niebieską (RGB)* i zapisywany w trakcie eksperymentu w postaci plików odpowiadających wyciągom z każdego kanału barwnego kamery. Celem przeanalizowania koloru jako wartości fizycznej, należy przekształcić zawartą w obrazie informację barwną *RGB* na jej składowe *HSI*: *kolor dominujący (Hue)*, *nasycenie (Saturation)* i *jasność (Intensity)*. Hue jest funkcją monotoniczną temperatury, niestety nieliniową i silnie zależną od kąta pomiędzy osią kamery i płaszczyzną świetlną, a także od właściwości badanej cieczy, przede wszystkim od współczynnika załamania światła [4-6].

W ostatnich latach w wielu ośrodkach badawczych są prowadzone prace eksperymentalne mające na celu zwiększanie dokładności procesu kalibracji [7,8], w tym wykorzystanie sieci neuronowych do wyznaczania zależności temperatura – Hue [9]. W tej pracy procedura kalibracyjna oraz analiza jej dokładności została wykonana w oparciu o autorskie procedury przygotowane w środowisku Matlab.

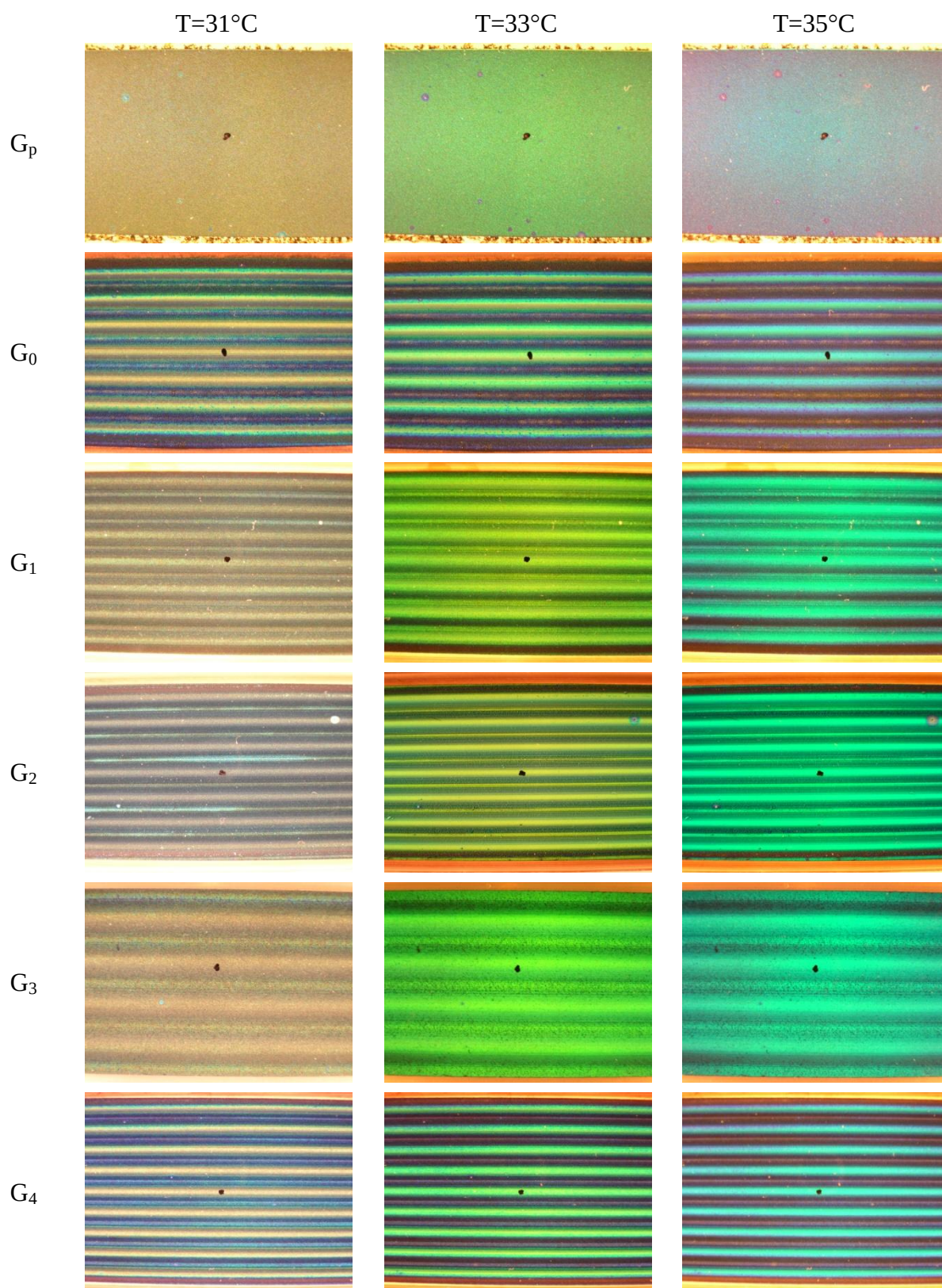
W opisanych doświadczeniach użyto ciekłych kryształów amerykańskiej firmy Hallcrest, których temperaturowy zakres pracy od barwy czerwonej do niebieskiej tzw. *color play range* wyznaczony przez producenta zawierał się w granicach od 30 do 35°C, ale ponieważ zmienił się kąt ich oświetlenia i czynnik, w których je umieszczono, „color play” mógł ulec niewielkiemu przesunięciu do innego zakresu temperatur, co wymusiło konieczność przeprowadzenia dodatkowej kalibracji. Podczas kalibracji badano barwę powierzchni płytek stanowiących w eksperymencie przepływowym wewnętrzne ścianki. Zmieniając temperaturę płytki kanału pokrytej warstwą ciekłokrystaliczną analizowano poprzez przekształcenie

przestrzeni RGB do HSI odpowiedź w kanale *Hue*. Typowe charakterystyki kalibracyjne zmian Hue w funkcji temperatury przedstawia wykres zamieszczony na rysunku 44.



Rys. 44. Kalibracja pokrycia ciekłokrystalicznego (TLC) dla pomiarowego zakresu temperatury i poszczególnych płytek zapewniających żadaną modyfikację geometrii kanału.

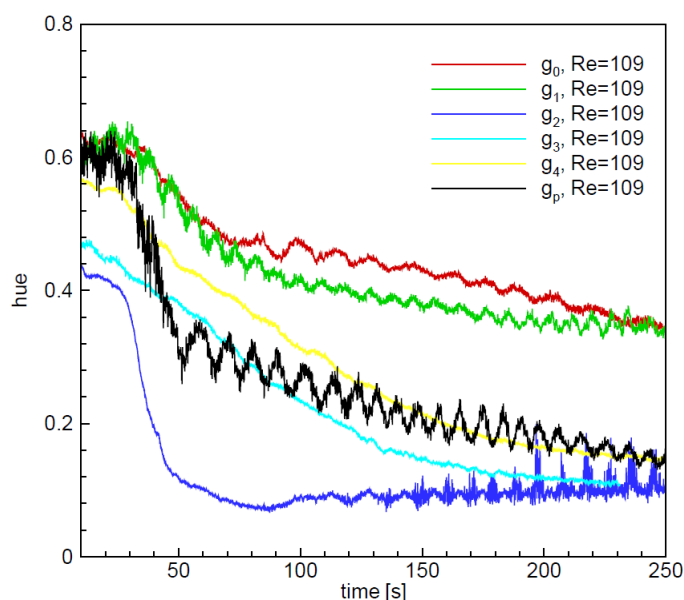
Wykonany on został w oparciu o szereg pomiarów kalibracyjnych, dla poszczególnych płytek zapewniających odpowiednią modyfikację geometrii ścianki kanału. Przykładowe obrazy kalibracyjne zarejestrowane dla poszczególnych płytek w temperaturach 31°C, 33°C i 35°C pokazane zostały na rysunku 45. Jak można zauważyć, barwy zmieniają się wraz z temperaturą, od barw bliskich czerwieni dla temperatury zbliżonej do dolnego zakresu pomiarowego użytych ciekłych kryształów, do barw bliskich niebieskiemu, dla górnego zakresu pomiarowego. Zauważyć też można bardzo silny wpływ kąta obserwacji na rejestrowaną barwę. Pokrycie ciekłokrystaliczne poszczególnych płytek utrzymywanych w tej samej temperaturze wykazuje często inne barwy. Dodatkowym czynnikiem wpływającym na widziane barwy, oprócz kąta obserwacji, jest grubość naniesionego pokrycia ciekłokrystalicznego. Jak wspomniano w rozdziale 2, pokrycie to było nanoszone ręcznie przy użyciu precyzyjnego aerografu i możliwe były tutaj niejednorodności grubości naniesionej powłoki utworzonej z ciekłych kryształów.



Rys. 45. Przykładowe obrazy kalibracyjne dla poszczególnych geometrii, dla temperatury 31°C , 33°C i 35°C . Zmiany barwy widoczne między „dolinami” i „wybrzuszeniami” powierzchni wynikają ze zmiany kąta oświetlenia.

Właściwe pomiary wpływu poszczególnych modyfikacji geometrii kanału (geometrie $G_0 - G_4$ oraz geometria bazowa G_p) na intensywność wymiany ciepła pomiędzy pofalowaną ścianką kanału a wodą płynącą kanałem, wykonano dla 4 różnych, narastających liczb Reynoldsa, tj. dla $Re=109, 255, 547$ oraz 1314 . Tak jak wspomniano wcześniej, pomiar polegał na analizie szybkości zmian temperatury dolnej ścianki kanału w zależności od konfiguracji geometrycznej kanału i liczby Reynoldsa. Każdy pomiar rozpoczynał się od takich samych warunków początkowych, tzn. każda seria eksperymentalna rozpoczynana była doprowadzeniem układu do stałej, jednorodnej temperatury (ścianki kanału oraz woda nim płynąca) do 35°C . Z uwagi na dość dużą masę całego układu i przez to znaczną bezwładność termiczną, stan ustalony osiągnano zazwyczaj po około 30 minutach od zadania żądanych wartości temperatury na termostatach. Aktualna temperatura kanału kontrolowana była za pomocą termopary. Gdy stwierdzono brak zmian mierzonej temperatury, możliwe było rozpoczęcie właściwego pomiaru intensywności chłodzenia ścianek kanału.

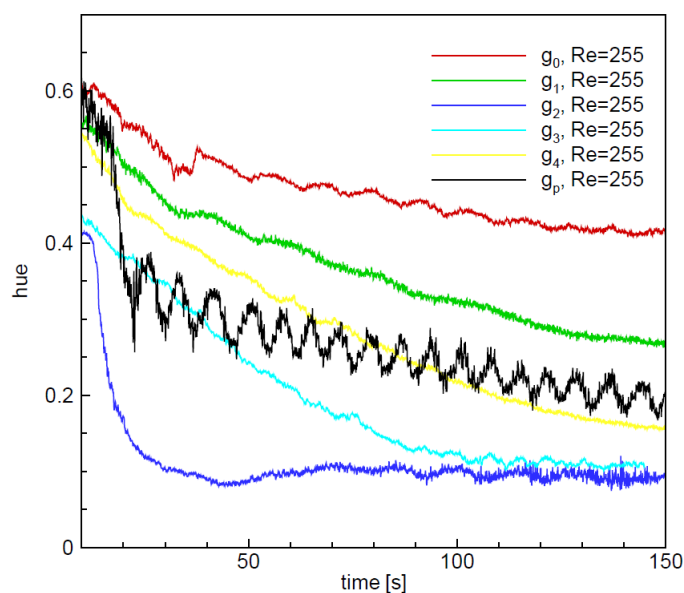
Po osiągnięciu stanu ustalonego w całym układzie, włączano kamerę, która filmowała powierzchnię dolnej ścianki kanału pokrytej termoczułą warstwą ciekłokrystaliczną. Wtedy też następowało uruchomienie przepływu zimnej wody przez wnętrze kanału. Temperatura przepływającej wody chłodzącej była dobierana indywidualnie do każdej serii pomiarowej tak, aby po osiągnięciu nowego stanu ustalonego, temperatura ścianki pokrytej ciekłymi kryształami osiągała wartość zbliżoną do dolnego krańca zakresu pomiarowego użytych ciekłych kryształów, tj. temperaturę równą około 30°C . w zależności od liczby Reynoldsa temperatura wody chłodzącej zadawana była od 15°C (dla $Re=109$), do 25°C (dla $Re=1314$).



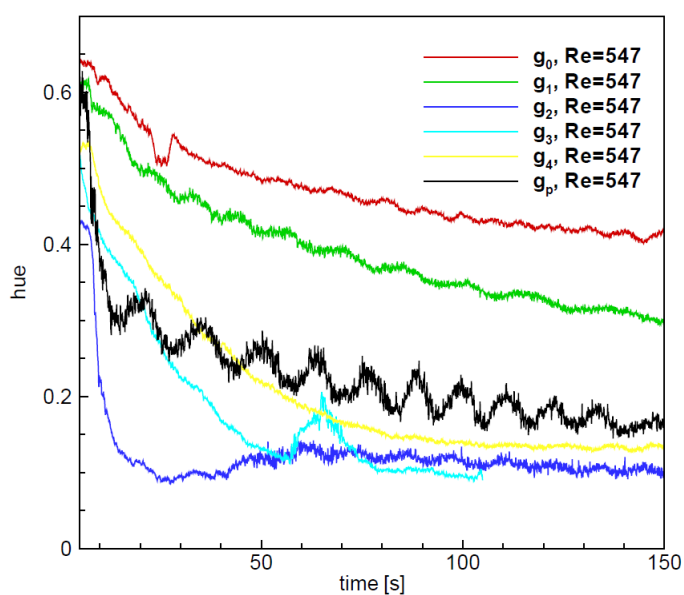
Rys. 46. Intensywność chłodzenia dolnej powierzchni kanału w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=109$ dla poszczególnych geometrii.

Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci czasowego przebiegu średniej temperatury ścianki kanału wyznaczonej dla poszczególnych konfiguracji geometrycznych. Na rysunku 46

pokazano wynik takiej analizy dla przepływu z najniższą analizowaną tutaj liczbą Reynoldsa równą $Re=109$. Jak można zauważyć, najbardziej intensywne chłodzenie zaobserwowano tutaj dla geometrii G_2 (linia niebieska na rysunku 46). Natomiast geometria uważana optymalną (G_0) w niniejszych pomiarach charakteryzowała się stosunkowo niską intensywnością wymiany ciepła. Jedną z przyczyn tej niejednoznaczności pomiarów może być silna nieliniowość zmian mierzonej barwy (Hue) z temperaturą. Niestety w eksperymencie jest niemożliwe zapewnienie aby zmiany barwy odbywały się w tym samym zakresie. Próby kalibracji mierzonej wartości Hue tak by porównywać wartości zmian temperatury z podobnych powodów charakteryzowały się zbyt dużymi błędami i nie są tutaj pokazane.

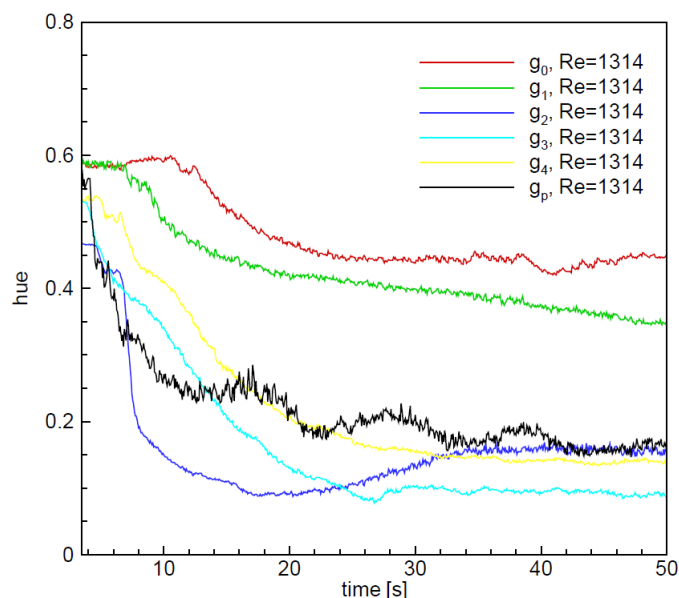


Rys. 47. Intensywność chłodzenia dolnej powierzchni kanału w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=255$ dla poszczególnych geometrii.



Rys. 48. Intensywność chłodzenia dolnej powierzchni kanału w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=547$ dla poszczególnych geometrii.

Podobne wyniki zarejestrowano przy wyższych liczbach Reynoldsa (rys. 47, 48 i 49). Geometria G_2 ciągle charakteryzowała się najwyższą intensywnością chłodzenia ścianki, a geometria G_0 – najniższą.



Rys. 49. Intensywność chłodzenia dolnej powierzchni kanału w przepływie z liczbą Reynoldsa $Re=1314$ dla poszczególnych geometrii.

Interpretacja otrzymanych wyników pomiarów wymiany ciepła jest utrudniona przez wspomniany wyżej silnie nieliniowy charakter zmian barwy pokrycia ciekłokrystalicznego (Hue) w funkcji temperatury. Tym niemniej zastanawiająca jest prawidłowość, że niezależnie od liczby Reynoldsa najlepsze charakterystyki (najszybszy spadek temperatury) ma miejsce dla geometrii pofalowanej scharakteryzowanej jako G_2 . Jedną z oczywistych przyczyn jednym z czynników może być wzrost powierzchni wymiany ciepła w stosunku do innych pofalowań. Wydzielenie tego czynnika na podstawie pomiarów strumieni ciepła nie było jednak, na podstawie otrzymanych obrazów ciekłokrystalicznych, możliwe.

Literatura

- [1] Duke Scientific Corporation, strona internetowa: <http://www.dukescientific.com>.
- [2] K. Jeżowiecka-Kabsch, H. Szewczyk, Mechanika płynów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001
- [3] T.A. Kowalewski, S. Blonski, P. Korczyk, Eksperymentalna analiza przepływów w skali mikro i nano, in Wybrane zagadnienia przepływów i wymiany ciepła, W. Suchecki (Eds.), chap. 6, pp.127-149, Oficyna Wyd. Polit. Warsz. 2008.

- [4] S. Blonski, T. Kowalewski, D. Mikielwicz, A. Stasiek, J. Stasiek, Heat transfer enhancement through the use of transverse vortex generators, Proceedings of XXVI Congresso Nazionale UIT sulla Trasmissione del Calore, Palermo, 23-25 Giugno 2008
- [5] Hiller W., Kowalewski T.A.: Simultaneous measurement of temperature and velocity fields in thermal convective flows, [w:] Claude Veret (red.): Flow Visualisation IV, Paris 1986, Hemisphere, Washington, pp. 617-622, 1987.
- [6] T.A. Kowalewski, Thermochromic Liquid Crystals, chap. B 7.1 in [Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics](#), C. Tropea, A.L. Yarin, J.F. Foss (Eds.), 487-499, Springer 2007
- [7] Gunther A., Rudolf von Rohr Ph.: Influence of the optical configuration on temperature measurements with fluid-dispersed TLCs, Experiments in Fluids 32, pp. 533–541, 2002
- [8] Hay J., D. Hollingsworth: A comparison of trichromic systems for use in the calibration of polymer-dispersed thermochromic liquid crystals, Experimental Thermal and Fluid Science, vol. 12, pp. 1-12, 1996.
- [9] Kimura I., Kuroe Y., Ozawa M.: Application of neural networks to quantitative flow visualization, J. Flow Visualization and Image Processing, vol. 1, pp. 261-269, 1993.

Załącznik 10: Spis publikacji powstałych w ramach projektu

1. T.A. Kowalewski, S. Błoński, P. Korczyk, *Eksperymentalna analiza przepływów w skali mikro i nano*, rozdział w monografii: *Wybrane zagadnienia przepływu płynów i wymiany ciepła*, W. Suchecki (Red.), rozdz. 6, pp.127-149, Oficyna Wyd. Polit. Warsz. 2008.
2. T.A. Kowalewski, J. Szumbarski, S. Błoński, *Low-Reynolds-Number Instability of the Laminar Flow Between Wavy Walls*, ASME, Proceedings of 6th International Conference on Nanochannels, Microchannels and Minichannels, CD-ROM ISBN 0-7918-3826-9, 2008, pp. 62070-8
3. S. Jebauer, J. Czerwinska, *Slip Flow Structures in Confined Geometries*, ASME, Proceedings of 6th International Conference on Nanochannels, Microchannels and Minichannels, CD-ROM ISBN 0-7918-3826-9, 2008, pp. 62125-10.
4. T.A. Kowalewski, J. Szumbarski, S. Błoński, *Flow destabilization and chaotic mixing in the channel with transversely corrugated walls*, Proceedings of XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Adelaide, Australia, CD-ROM ISBN 978-0-9805142-1-6, pp. 11606-2
5. T.A. Kowalewski, S. Blonski, *Turbulence in micro-channels*, Proceedings of 7th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, 28 June - 03 July 2009, Krakow, Poland, J. S. Szmyd, J. Spalek, T. A. Kowalewski (Eds.), CD-ROM, ISBN 978-837464-235-4, AGH 2009, pp. 361-368.
6. S. Błoński, *Analiza przejścia laminarno-turbulentnego w mikrokanalach*, IFTR Reports 2/2009, ISBN 978-83-89687-50-0, 153 strony
7. S. Błoński, *Flow focusing in microfluidic devices*, 19th National Polish Fluid Dynamics Conference, CD-ROM Proceedings, Poznan, Poland, September 5 – 9, 2010
8. S. Blonski, P. Domagalski, M. Dziubinski, T.A. Kowalewski, *Hydrodynamically modified seeding for micro-PIV*, Archives of Mechanics (praca przyjęta do druku w 2010 roku)
9. J. Szumbarski, S. Błoński, *Destabilization of a laminar flow in a rectangular channel by transversely-oriented wall corrugation*, Archives of Mechanics (praca zgłoszona do druku w 2010 roku, w niniejszym raporcie zamieszczona jako załącznik nr 5)
10. J. Szumbarski, S. Błoński, T.A. Kowalewski, *On the impact of transversely-oriented wall.: corrugation on hydraulic resistance of a laminar channel flow*, Archives of Mechanical Engineering (praca zgłoszona do druku w 2010 roku, w niniejszym raporcie zamieszczona jako załącznik nr 4)
11. J.J. Szumbarski, S. Błoński, T. A. Kowalewski, *Symulacje numeryczne destabilizacji przepływu wywołanej pofalowaniem ścianek*, 9 stron, CD-ROM, I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa 2007.

12. Jacek Szumbariski, Sławomir Błoński, *Instability of flow of a viscous liquid in the transversely wavy channel*, XVIII Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, Jastrzębia Góra, 2008.
13. J. Szumbariski, S. Błoński, T.A. Kowalewski, *Low-Reynolds-Number Instability of Laminar Flow in The Wavy Channel*, LES in Science and Technology Workshop, Poznan, Poland, April 21-22, 2008
14. T.A. Kowalewski, J. Szumbariski, S. Błoński, *Low Reynolds number instabilities induced in a channel with wavy walls*, 7th Euromech Fluid Mechanics Conference, Manchester, UK, 14-18 September 2008.
15. P. Domagalski, M. Dziubinski, S. Błoński, T.A. Kowalewski, *Zastosowanie ogniskowania hydrodynamicznego jako modyfikacji techniki micro-PIV*, I Krajowa Konferencja Nano- i Mikromechaniki, Krasieczyn, 8–10 lipiec 2008, str. 75-76, Wyd. Polit. Rzeszowska 2008
16. M. Kedzierski, P. Knapkiewicz, *Interdigital Micromixer: Numerical and Experimental Investigation*, I Krajowa Konferencja Nano- i Mikromechaniki, Krasieczyn, 8–10 lipiec 2008, str. 93-93, Wyd. Polit. Rzeszowska 2008
17. J. Szumbariski, *Stability analysis of a laminar viscous flow in the finite-span wavy channel*, 8th Euromech Fluid Mechanics Conference, Bad Reichenhagen, Germany, 14-18 Sept. 2010.