

Symulacje numeryczne destabilizacji przepływu wywołanej pofalowaniem ścianek

Jacek J. Szumbariski

Politechnika Warszawska, Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej

Sławomir Błoński, Tomasz A. Kowalewski

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Zakład Mechaniki i Fizyki Płynów

1. WSTĘP

Problem intensyfikacji mieszania w przepływie odgrywa naczelną rolę w procesach wymiany ciepła i masy. Zagadnienie nabiera szczególnego znaczenia dla przepływów laminarnych, w szczególności dla mikrosystemów przepływowych. Podstawowym elementem mikrosystemów typu *Lab-On-Chip* [1] jest system mieszania składników konieczny do przeprowadzenia danej reakcji chemicznej czy analizy biologicznej na drodze mieszania o długości często poniżej jednego milimetra. Zapewnienie wydajnego mieszania i efektywnego transportu cieczy stanowi nietrywialny problem dla urządzeń przepływowych w skali mikro z uwagi na brak turbulencji [2]. Opisana w pracy metoda intensyfikacji mieszania opiera się na idei wymuszenia chaotycznej konwekcji w kanale o odpowiednio zmodyfikowanej geometrii ścianki. Liniowa analiza stateczności wskazuje na możliwość destabilizacji przepływu w kanale przez odpowiednie dobranie charakterystyk geometrycznych pofalowania ścianki, czego efektem jest wzmocnienie szczególnej postaci zaburzeń (poprzeczny mod Squire'a), aż do uzyskania nowej, złożonej formy ruchu. Przewidywany efekt destabilizacji badany jest numerycznie metodą objętości skończonych (DNS) dla fizycznej konfiguracji odpowiadającej geometrii planowanego eksperymentu. Celem przeprowadzonych badań numerycznych jest m.in. określenie typu bifurkacji w okolicy punktu krytycznego i zbadanie charakterystyk wzmocnienia zaburzeń dla rosnących liczb Reynoldsa przepływu. Numeryczna weryfikacja poprawności modelu teoretycznego i zbadanie granic jego stosowalności pozwolą na zaprojektowanie i zbudowanie prototypu mikro-miksera i eksperymentalną walidację przewidywań teoretycznych.

2. ANALIZA TEORETYCZNA PRZEPŁYWU PRZEZ KANAŁ Z POFALOWANYMI ŚCIANKAMI

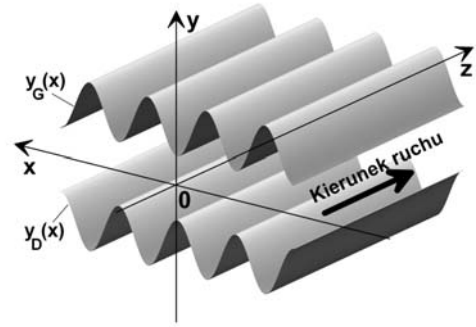
2.1 Przepływ bazowy (niezaburzony)

Rozważmy przepływ Poiseuille'a tj. laminarny ruch cieczy lepkiej w obszarze (kanale) pomiędzy dwiema równoległymi i nieruchomymi płaszczyznami (ścianami), wymuszony przez stały gradient ciśnienia i charakteryzujący się parabolicznym profilem prędkości. Przyjmijmy, że oś Oy układu współrzędnych jest prostopadła do płaszczyzn ograniczających obszar przepływu, a równania tych płaszczyzn mają postać $y = -H$ i $y = H$. Niech ponadto kierunek spadku ciśnienia pokrywa się z kierunkiem osi Oz . Przyjmując wielkość H za skalę wymiarów liniowych, a prędkość maksymalną przepływu W_{\max} za skalę prędkości, otrzymujemy przepływ Poiseuille'a w standardowej bezwymiarowej formie, a mianowicie

$$\mathbf{v}_{\text{Poiseuille}} = [0, 0, 1 - y^2]. \quad (1)$$

Jeśli wprowadzić liczbę Reynoldsa wzorem $Re = W_{max} H / \nu$ oraz skalę ciśnienia ρW_{max}^2 to pole prędkości (1) odpowiada bezwymiarowy gradient ciśnienia w kierunku osi $0z$ równy $D_p = -2/Re$. Opisany ruch nazywać będziemy przepływem referencyjnym.

Rozważmy następnie laminarny przepływ ciecży lepkiej w obszarze przedstawionym na rys. 1, zwanym dalej kanałem (poprzecznie) pofalowanym. Kształt pofalowania ścian tego kanału zadają – w opisie bezwymiarowym – x -okresowe funkcje $y_D(x)$ i $y_G(x)$, przy czym okres pofalowania obu ścian jest $\lambda_x = 2\pi/\alpha$. Ponadto, średnia wartość funkcji $y_D(x)$ to -1 , a średnia wartość funkcji $y_G(x)$ jest równa 1 , czyli średnia wysokość kanału pofalowanego jest taka sama jak wysokość kanału referencyjnego.



Rys. 1. Schematyczny obraz pofalowania poprzecznego ścianek kanału.

Czynnikiem wymuszającym ruch w kanale pofalowanym jest stały gradient ciśnienia w kierunku $0z$ o tej samej wartości D_p co w przepływie referencyjnym. Liczba Reynoldsa zdefiniowana jest „zewnętrznie” jako $Re = 2/|D_p|$. Pole prędkości ma postać

$$\mathbf{v}_B = [0, 0, W(x, y)], \quad (2)$$

przy czym funkcja $W(x, y)$ jest x -okresowa z okresem równym λ_x . Funkcja W spełnia w obszarze $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y_D(x) < y < y_G(x)\}$ równanie Poissona postaci

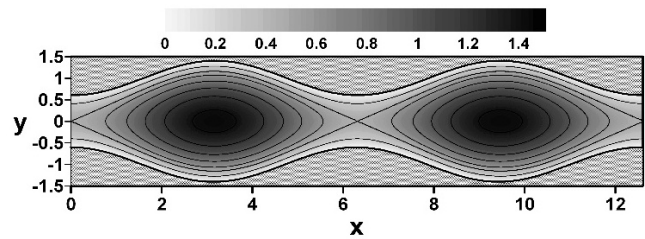
$$\Delta W = Re \cdot D_p \Rightarrow \Delta W = -2 \quad (3)$$

oraz warunki brzegowe

$$W(x, y_D(x)) = 0, \quad W(x, y_G(x)) = 0. \quad (4)$$

Funkcja W może być wyznaczona przy pomocy semi-analitycznej, spektralnie dokładnej metody zanurzonych granic opisanej szczegółowo w pracach [5,6].

Przykładowe rozwiązanie obliczone dla przypadku symetrycznego pofalowania sinusoidalnego o amplitudzie $S = 0.3$ i liczbie falowej $\alpha = 1$ pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Rozwiązanie obliczone dla przypadku symetrycznego pofalowania sinusoidalnego o amplitudzie $S = 0.3$ i liczbie falowej $\alpha = 1$.

2.2 Liniowa analiza stateczności przepływu w pofalowanym kanale

W celu zbadania możliwości destabilizacji przepływu Poiseuille’a drogą poprzecznego pofalowania przeprowadzono w [5] analizę stateczności małych zaburzeń. Przepływ zaburzony jest sumą opisanego wyżej przepływu bazowego oraz pola zaburzeń zależnego od czasu i wszystkich zmiennych przestrzennych

$$\mathbf{v} = [0, 0, W(x, y)] + \mathbf{v}'(t, x, y, z), \quad p = -2z/Re + p'(t, x, y, z). \quad (5)$$

Po podstawieniu formuł (5) do równania Naviera-Stokesa i równania ciągłości, a następnie dokonaniu linearyzacji otrzymamy

$$\begin{aligned} \partial_t u + W \partial_z u &= -\partial_x p' + Re^{-1} \Delta u \\ \partial_t v + W \partial_z v &= -\partial_y p' + Re^{-1} \Delta v \\ \partial_t w + W \partial_z w + u \partial_x W + v \partial_y W &= -\partial_z p' + Re^{-1} \Delta w \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Rozwiązanie szczególne układu równań różniczkowych (6), zwane modami normalnymi, przyjmuje formę wynikającą z teorii Floqueta, a mianowicie

$$[u, v, w](t, x, y, z) = e^{i(\delta x + \beta z - \sigma t)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_u^m, g_v^m, g_w^m] \Upsilon(y) e^{im\alpha x} + C.C. \quad (7)$$

$$p'(t, x, y, z) = e^{i(\delta x + \beta z - \sigma t)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^m(y) e^{im\alpha x} + C.C.,$$

przy czym C.C. oznacza składniki sprzężone, a symbol δ oznacza parametr Floqueta. Przepływ niezaburzony jest niestateczny jeśli istnieje mod normalny, który narasta nieograniczenie w czasie, czyli, gdy odpowiadająca mu częstość zespolona σ ma dodatnią część urojoną.

Opis ewolucji małych zaburzeń w przepływie można istotnie uprościć eliminując z rozważań ciśnienie oraz wprowadzając pole składowej pionowej (tj. składowej w kierunku y) pola zaburzeń wirowości

$$\eta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta^m(y) e^{i(t_m x + \beta z - \sigma t)} + C.C., \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

gdzie $\theta^m = i(\beta g_u^m - t_m g_w^m)$ oraz $t_m = \delta + m\alpha$. Okazuje się bowiem [5], że zachodzą następujące związki wynikające z definicji pola η i równania ciągłości

$$g_u^m = i(t_m \partial_y g_v^m - \beta \theta^m) / k_m^2, \quad g_w^m = i(\beta \partial_y g_v^m + t_m \theta^m) / k_m^2, \quad k_m^2 = t_m^2 + \beta^2. \quad (9)$$

Zakładamy, że $\beta \neq 0$. Przypadek szczególny $\beta = 0$ wymaga osobnej analizy (przedstawionej w pracy [5]) i nie będzie tu omawiany.

Po podstawieniu postaci (7) i (8) do równań (6), wykorzystaniu związków (9) oraz eliminacji ciśnienia otrzymujemy następujące różniczkowe zagadnienie własne:

$$-i\sigma L^m g_v^m + S^m g_v^m + \sum_{n>0} (H_V^{m,n} g_v^{m-n} + \hat{H}_V^{m,n} g_v^{m+n} + H_\theta^{m,n} \theta^{m-n} + \hat{H}_\theta^{m,n} \theta^{m+n}) = 0, \quad (10)$$

$$-i\sigma \theta^m + Q^m \theta^m - it_m DF_W^0 g_v^m + \sum_{n>0} (E_V^{m,n} g_v^{m-n} + \hat{E}_V^{m,n} g_v^{m+n} + E_\theta^{m,n} \theta^{m-n} + \hat{E}_\theta^{m,n} \theta^{m+n}) = 0. \quad (11)$$

Użyte w równaniach (10) i (11) operatory mają postać ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$L^m = \partial_{yy} - k_m^2, \quad S^m = i\beta [F_W^0 L^m - D^2 F_W^0] - \frac{1}{Re} (L^m)^2, \quad Q^m = i\beta F_W^0 - \frac{1}{Re} L^m,$$

$$H_V^{m,n} = i\beta \left[\frac{\beta^2 + t_m t_{m+n}}{k_{m-n}^2} F_W^n \partial_{yy} - (D^2 + k_m^2) F_W^n + \frac{2n\alpha t_{m-n}}{k_{m-n}^2} DF_W^n \partial_y \right]$$

$$\hat{H}_V^{m,n} = i\beta \left[\frac{\beta^2 + t_m t_{m+n}}{k_{m+n}^2} (F_W^n)^* \partial_{yy} - (D^2 + k_m^2) (F_W^n)^* - \frac{2n\alpha t_{m+n}}{k_{m+n}^2} (DF_W^n)^* \partial_y \right]$$

$$H_\theta^{m,n} = -i \frac{2n\alpha\beta^2}{k_{m-n}^2} (F_W^n \partial_y + DF_W^n), \quad \hat{H}_\theta^{m,n} = i \frac{2n\alpha\beta^2}{k_{m+n}^2} [(F_W^n)^* \partial_y + (DF_W^n)^*] \quad (12)$$

$$E_V^{m,n} = i \frac{n\alpha}{k_{m-n}^2} (\beta^2 + t_m t_{m-n}) F_W^n \partial_y - it_m DF_W^n, \quad \hat{E}_V^{m,n} = -i \frac{n\alpha}{k_{m+n}^2} (\beta^2 + t_m t_{m+n}) (F_W^n)^* \partial_y - it_m (DF_W^n)^*$$

$$E_\theta^{m,n} = i\beta \frac{\beta^2 + t_m t_{m-2n}}{k_{m-n}^2} F_W^n, \quad \hat{E}_\theta^{m,n} = i\beta \frac{\beta^2 + t_m t_{m+2n}}{k_{m+n}^2} (F_W^n)^*$$

Pole zaburzeń prędkości znika na pofalowanych ścianach kanału, co – jak wykazano w pracach [5,6] – jest równoważne następującemu układowi warunków ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\lambda_x} [g_u^m, g_v^m, g_w^m] \Upsilon(t, y_D(x)) e^{i(m-k)\alpha x} dx = 0, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\lambda_y} [g_u^m, g_v^m, g_w^m] \Upsilon(t, y_G(x)) e^{i(m-k)\alpha x} dx = 0. \quad (13)$$

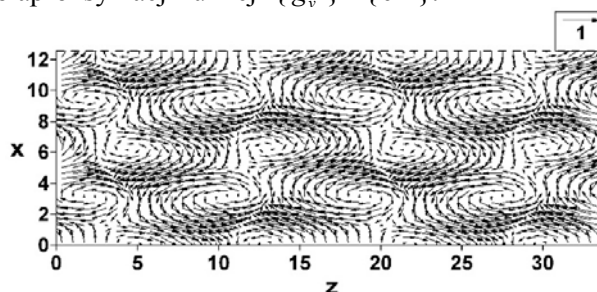
Mody normalne, czyli rozwiązania własne układu (10) - (11) uzupełnionego warunkami (13) należy poddać dyskretyzacji. W wyniku procedury dyskretyzacyjnej (w pracy [5] posłużono się metodą

tau-Galerkina z wielomianami Czebyszewa w roli funkcji bazowych) otrzymywane jest uogólnione algebraiczne zagadnienie własne postaci

$$\mathbf{Pz} = i\sigma\mathbf{Qz}. \quad (14)$$

Rozmiar zagadnienia zależy od liczby modów Fouriera użytych do aproksymacji pola zaburzeń oraz liczby wielomianów Czebyszewa zastosowanych do aproksymacji funkcji $\{g_v^m\}$ i $\{\theta^m\}$.

Wyniki analizy stateczności liniowej przepływu w poprzecznie pofalowanym kanale przedstawiono w pracach [5,6]. Okazuje się, że symetryczne pofalowanie ścian kanału o okresie około 3-krotnie dłuższym od średniej wysokości kanału (tj. $\alpha \approx 1$) powoduje radykalne obniżenie krytycznej liczby Reynoldsa Re_{cr} , nawet do wartości ok. 60 (dla przepływu referencyjnego $Re_{cr} = 5772$). Niestateczny mod normalny pola zaburzeń można interpretować jako zmodyfikowany obecnością pofalowania podstawowy mod poprzeczny Squire'a dla przepływu referencyjnego. Na rys. 3 przedstawiono strukturę pola prędkości tego modu w płaszczyźnie $y = 0$ czyli w płaszczyźnie symetrii kanału. Przedstawione pole zaburzeń jest z-okresowe i ma formę fali biegnącej. Prędkość fazowa tej fali wynosi około 0.9, to znaczy jest zbliżona do średniej prędkości przepływu niezaburzonego na płaszczyźnie symetrii $y = 0$.



Rys. 3. Obliczona struktura pola prędkości zaburzeń niestatecznych w przekroju podłużnym kanału poprzecznie pofalowanego (por. Rys.1); $Re=100$, amplituda pofalowania $S=0.3$. Przedstawione pole zaburzeń ma charakter fali poruszającej się w kierunku przepływu bazowego z prędkością zbliżoną do prędkości średniej.

3. ANALIZA NUMERYCZNA PRZEPLÝWU PRZEZ KANAŁ Z POFALOWANYMI ŚCIANKAMI

Liniowa analiza stateczności przepływu w pofalowanym kanale dostarcza wskazówkę o możliwości powstania zaburzeń o małej amplitudzie destabilizujących przepływ przy liczbach Reynoldsa rzędu 100. Potwierdzenie tej hipotezy wymaga przeprowadzenia badań eksperymentalnych. Jednak z uwagi na koszty i pracochłonność parametrycznych badań doświadczalnych, w pierwszym etapie przeprowadzono symulację numeryczną rozpatrywanego modelu poszukując rozwiązania pełnego, trójwymiarowego układu równań Naviera-Stokesa dla przepływu w kanale o zadanej geometrii ścianek.

3.1 Geometria modelu numerycznego oraz przyjęte założenia i parametry symulacji

Symulacja numeryczna przepływu wykonana została metodą objętości skończonych, wykorzystując komercyjny pakiet do obliczeń przepływowych Fluent (Ansys Inc.). Niestacjonarny przepływ nieściśliwej cieczy lepkiej w kanale modelowano przez bezpośrednie rozwiązywanie w trzech wymiarach pełnych równań Naviera-Stokesa (DNS – Direct Numerical Simulation). Uzyskanie poprawnych rozwiązań dla zaburzonego niestabilnościami ruchu płynu wymagało wykonania obliczeń dla bardzo małych kroków czasowych i gęstej siatki obliczeniowej. Model teoretyczny opiera się na geometrii kanału nieograniczonego w kierunkach $0x$ i $0z$. Warunek ten zapewniono w modelu numerycznym przez przyjęcie w tych kierunkach okresowych warunków brzegowych. Geometria kanału zdefiniowana na potrzeby obliczeń składała się z trzech segmentów pofalowania (rys. 4) i stanowiła obszar o długości 300 mm, szerokości 90 mm i średniej wysokości 10 mm. Na ściankach górnej i dolnej przyjęto standardowe warunki braku poślizgu, a na ściankach bocznych warunki okresowe, przy czym w kierunku $0x$ zadano warunek zerowego gradientu ciśnienia, a w kierunku $0z$ (kierunek przepływu) strumień masy zapewniający żadaną wartość prędkości przepływu.

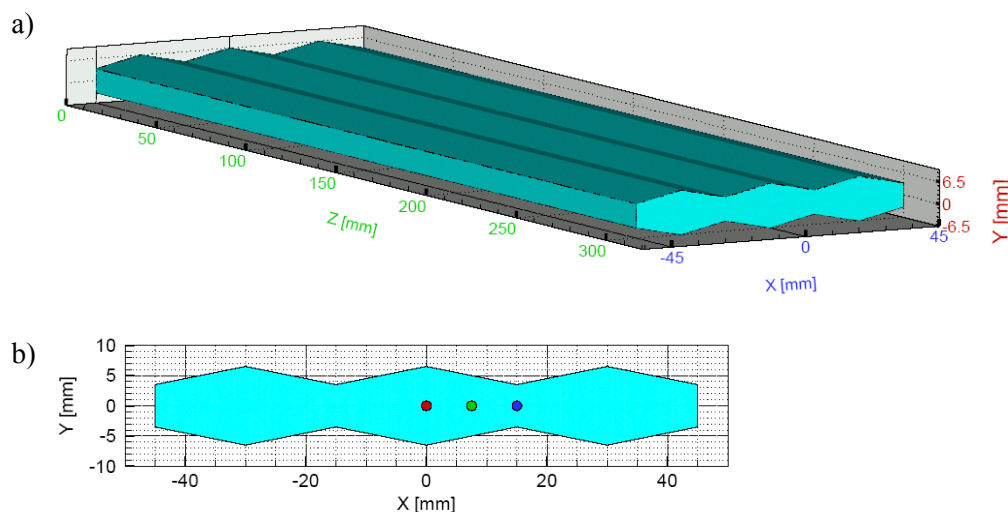
Celem zbadania wrażliwości rozwiązania na gęstość siatki, przeprowadzono wstępne obliczenia dla trzech jednorodnych siatek strukturalnych, składających się odpowiednio z 120000, 405000 i 960000 elementów objętości skończonych. Dla ilościowego porównania uzyskanych wyników zdefiniowano współczynnik zbieżności siatki GCI (Grid Convergence Index) [7]:

$$GCI = F_s \frac{\left| \frac{u_{h_2} - u_{h_1}}{u_{h_1}} \right|}{r^p - 1} \cdot 100\% \quad (15)$$

F_s jest współczynnikiem bezpieczeństwa (przyjęto $F_s = 3$), u_{h_1} i u_{h_2} są wartościami wybranego parametru symulowanego przepływu (przyjętego jako maksymalna prędkość w kierunku Oz) odpowiednio dla rzadszej (h_1 komórek siatki) i gęstszej siatki (h_2 komórek siatki), r jest współczynnikiem zagęszczenia siatki (stosunkiem gęstości siatek, tj. h_2/h_1), a p jest rzędem aproksymacji ($p = 2$). Wartości współczynnika GCI zestawione w tabeli 1 pokazują, że dla siatki składającej się z 405000 komórek błąd rozwiązania jest mniejszy niż 0.35% i uzasadniają słuszność przeprowadzenia dalszych obliczeń przy wykorzystaniu tej siatki.

| Siatka (ilość komórek) | r | V_z^{\max} [m/s] | GCI [%] |
|---------------------------|-----|--------------------|-----------|
| 120000 | | 0.146810 | |
| 405000 | 1.5 | 0.147020 | 0.3433 |
| 960000 | 1.5 | 0.147019 | 0.0016 |

Tabela 1. Wartości współczynnika zagęszczenia siatki, wartości prędkości maksymalnej w kierunku Oz i GCI dla trzech testowanych siatek obliczeniowych



Rys. 4. a) Geometria kanału zdefiniowana na potrzeby symulacji numerycznych; b) przekrój poprzeczny przez kanał. Zaznaczone punkty: czerwony, zielony i niebieski są arbitralnie zdefiniowanymi punktami, nazwanymi odpowiednio jako „wide”, „middle” i „narrow point”, służącymi do wykreślenia charakterystyk przepływu w dalszej części pracy.

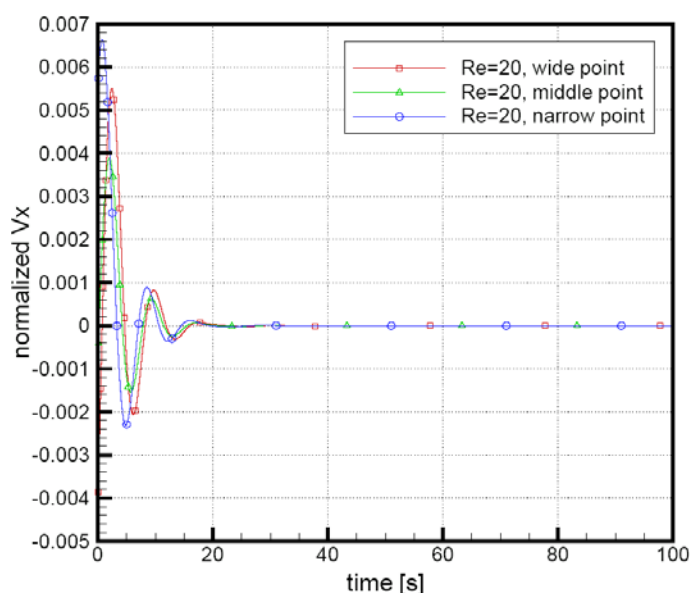
Liczba Reynoldsa charakteryzująca przepływ została zdefiniowana w oparciu o połowę wysokości kanału referencyjnego i maksymalną prędkość przepływu referencyjnego. W celu wyznaczenia granicy stabilności przepływu, poszukiwano krytycznej liczby Reynoldsa, powyżej której zaburzenia przepływu będą ulegały wzmocnieniu. W tym celu jako warunek początkowy dla wszystkich symulacji przyjęto zaburzone pole przepływu otrzymane dla liczby $Re = 50$. Przeprowadzono obliczenia dla 13 różnych wartości liczb Reynoldsa z zakresu od $Re = 1$ do $Re = 3000$ ($Re = 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 100, 200, 500, 1000$ i 3000). Zmian liczby Reynoldsa przepływu dokonywano poprzez zmiany lepkości płynu, przy zachowaniu wszystkich pozostałych parametrów przepływu. W ten sposób zapewniono jednakowe skalowanie rozwiązań dla znacznego zakresu zmian liczby Reynoldsa. Szczegółowe parametry przeprowadzonych obliczeń zestawione zostały w tabeli 2.

Tabela. 2. Parametry symulacji numerycznych DNS

| | |
|---|---|
| Pakiet obliczeniowy | Fluent 6.3.26, podwójna precyzja |
| Model | 3-D, laminarny, niestacjonarny, nieściśliwy |
| Płyn | $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, lepkość zmieniana dla osiągnięcia zadanej liczby Reynoldsa |
| Wydatek masowy | $\dot{m} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Wlot & wylot prawa & lewa powierzchnia | warunki okresowe |
| Schemat | drugiego rzędu, upwind |
| Krok czasowy | 0.01 s |
| Kryterium zbieżności | residua $< 10^{-6}$ |
| Siatka | strukturalna, 405000 elementów |
| Typowy czas obliczeń | 100s czasu fizycznego \approx 1 miesiąc czasu CPU dla P4 3GHz |

3.2 Wyniki symulacji numerycznych

Przeprowadzone symulacje numeryczne potwierdzają wnioski analizy bazującej na liniowej teorii stateczności i pokazują, że dla przepływu laminarnego w kanale o odpowiednio pofalowanych ściankach istnieje stosunkowo niska (~ 80) liczba Reynoldsa, powyżej której zaburzenia przepływu ulegają wzmocnieniu, osiągając stan saturacji.



Rys. 5. Wygaszenie zaburzeń dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 20$ – przebieg czasowy znormalizowanej prędkości V_x w punktach „wide”, „middle” i „narrow”.

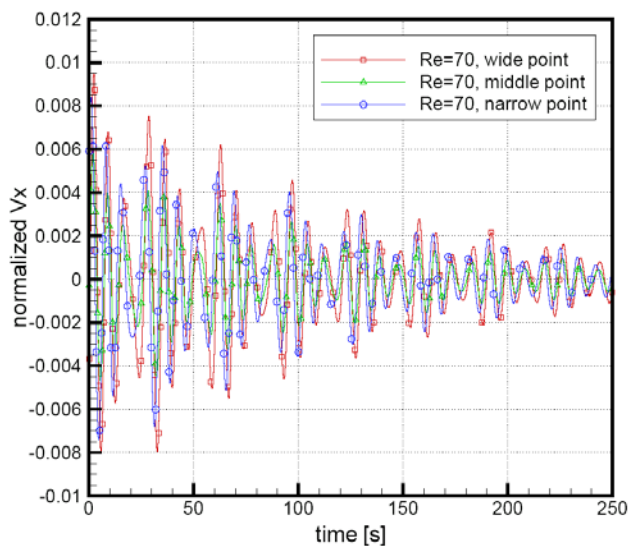
zapewnia wzmocnienia początkowego zaburzenia przepływu.

Przebieg czasowy prędkości v_x wykreślony dla liczby Reynoldsa $Re = 70$ (rys. 6) przedstawia już znacznie mniej intensywne tłumienie początkowego zaburzenia przepływu, niemniej jednak wygaszenie tego zaburzenia jest nadal dobrze widoczne. Powolne zanikanie zaburzenia początkowego dla zadanej konfiguracji geometrii ścianek oznacza, że liczba Reynoldsa $Re = 70$ jest bardzo bliska wartości krytycznej i powyżej tej wartości zaburzenie będą ulegały wzmocnieniu.

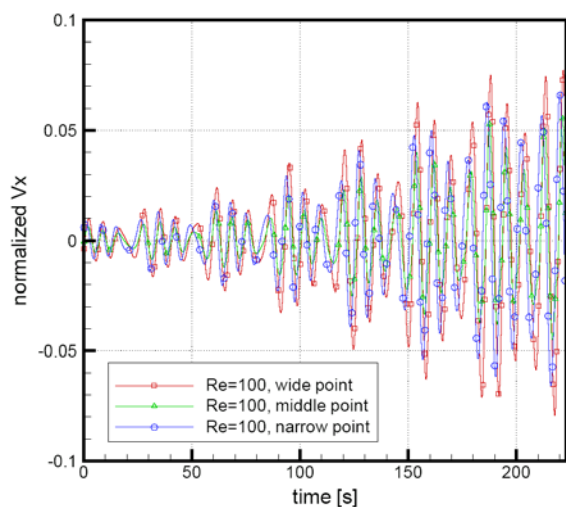
Rysunek 5 przedstawia przebieg czasowy składowej wektora prędkości w kierunku $0x$ dla przepływu o liczbie Reynoldsa $Re = 20$, unormowanej przez średnią wartość przepływu niezaburzonego (uśrednioną po płaszczyźnie symetrii $z = 0$), w punktach „wide”, „middle” i „narrow”, które znajdują się na przekroju poprzecznym kanału odpowiednio w jego najszerszym, pośrednim i najwęższym miejscu (punkty czerwony, zielony i niebieski na rys. 4b). Można zauważyć, że początkowe zaburzenia poprzeczne w kierunku $0x$ ulegają szybkiemu wygaszeniu i zanikają po około 20 s. Początkowe zaburzenie jest tłumione we wszystkich trzech wybranych punktach geometrii w podobnym tempie. Liczba Reynoldsa równa 20 jest zatem znacznie niższa od wartości krytycznej i nie

Dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$, dla której charakterystykę przebiegu czasowego poprzecznego zaburzenia wykreślono na rysunku 7, obserwujemy już wyraźne wzmocnienie zaburzenia początkowego. Świadczy to, że krytyczna liczba Reynoldsa została przekroczona i nawet bardzo niewielkie zaburzenia przepływu nie ulegną wygaszeniu.

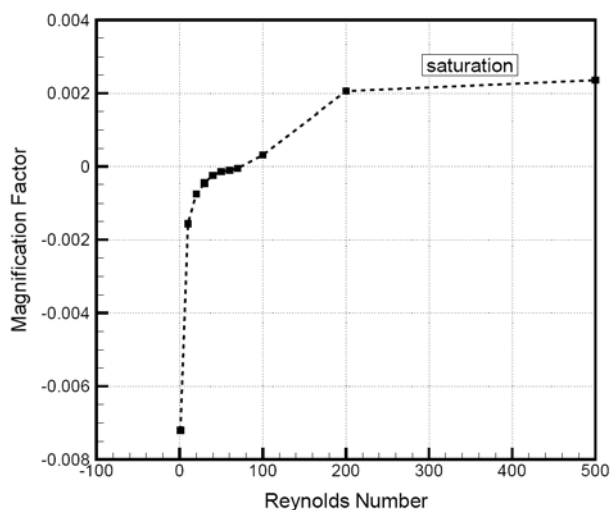
Bazując na obliczeniach przeprowadzonych dla poszczególnych liczb Reynoldsa wyznaczono współczynnik wzmocnienia zaburzeń (rys. 8), który jest zdefiniowany jako średnie nachylenie obwiedni przebiegów opisujących czasową zmienność składowej prędkości v_x w funkcji czasu. Wartość współczynnika wzmocnienia wyznaczono dla 11 zbadanych numerycznie przypadków liczb Reynoldsa z zakresu 1 - 500. Ujemne wartości współczynnika wskazują, że w danym zakresie liczb Reynoldsa wstępne zaburzenia destabilizujące przepływ będą ulegać wygaszeniu; dodatnie natomiast, że ulegną wzmocnieniu. Jak można zauważyć na rys. 8, dla rozpatrywanej geometrii kanału istnieje graniczna liczba Reynoldsa, wynosząca ok. $Re = 80$, po przekroczeniu której przepływ będzie samorzutnie dążył do destabilizacji i wzmocnienia powstałych niestabilności.



Rys. 6. Wygaszenie zaburzeń dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 70$ – przebieg czasowy znormalizowanej prędkości v_x w punktach „wide”, „middle” i „narrow”.

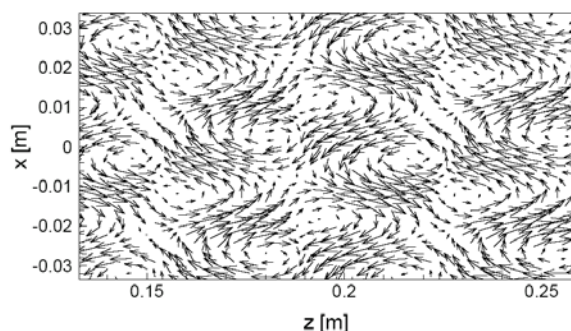


Rys. 7. Wzmocnienie zaburzeń dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$ – przebieg czasowy znormalizowanej prędkości v_x w punktach „wide”, „middle” i „narrow”.

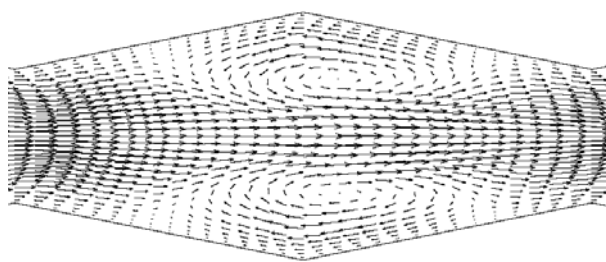


Rys. 8. Współczynnik wzmocnienia zaburzeń przepływu wyznaczony dla 11 liczb Reynoldsa z zakresu 1 – 500.

Na rysunku 9 przedstawiono uzyskane w obliczeniach numerycznych dla liczby Reynoldsa $Re = 100$ wektorowe pole zaburzeń na płaszczyźnie symetrii kanału (płaszczyzna $0xz$) – tj. różnicę chwilowego pola prędkości i przepływu niezaburzonego. Widoczna jest charakterystyczna struktura wirowa powstałych zaburzeń, bardzo podobna do struktury odpowiadającej niestatecznemu modowi zaburzeń wyznaczonemu z teorii liniowej (por. rys. 3). Na rysunku 10 przedstawiono to samo pole zaburzeń w przekroju poprzecznym płaszczyzną $z=0$. Obecność złożonych, trójwymiarowych zawirowań, a także fakt, że zaburzenia mają charakter fal biegnących pozwala przypuszczać, że w przepływie może zachodzić chaotyczna konwekcja, a w rezultacie znaczne zwiększenie intensywności mieszania oraz transportu masy i ciepła.



Rys. 9. Obliczone numerycznie pole zaburzeń prędkości na płaszczyźnie symetrii (płaszczyźnie $y = 0$) dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$.



Rys. 10. Obliczone numerycznie pole zaburzeń prędkości w przekroju poprzecznym płaszczyzną $z = 0$ dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re = 100$.

4. WNIOSKI

Przeprowadzona analiza, zarówno teoretyczna jak i numeryczna, potwierdza, że poprzeczne pofalowanie ścian kanału o odpowiednio dobranych parametrach może być skutecznym środkiem destabilizacji przepływu laminarnego przy stosunkowo niewielkich liczbach Reynoldsa. Powstała w wyniku niestateczności przepływu bazowego nowa forma ruchu charakteryzuje się przy tym złożonym, zmiennym w czasie polem prędkości, co sprzyja intensyfikacji procesów mieszania i wymiany masy/ciepła. Opisane zjawisko może mieć istotne znaczenia dla przepływów w mikro-skali, gdzie z uwagi na małe wymiary i niskie prędkości brak jest efektów inercyjnych, a transport masy odbywa się głównie wskutek zachodzącej bardzo powoli dyfuzji molekularnej. Przepływy takie, z uwagi na powszechną miniaturyzację i szybki rozwój analizy przepływów biologicznych, są coraz częściej przedmiotem zainteresowania i badań wielu dziedzin nauki, m.in. takich jak inżynieria komputerowa (konieczność chłodzenia coraz mniejszych i wydajniejszych procesorów), chemia (mikro-reaktory chemiczne), biologia czy medycyna (systemy analizy DNA, nowe metody dostarczania leków). Stąd też, prace mające na celu intensyfikację procesu mieszania w przepływach laminarnych mają szczególne znaczenie.

Przeprowadzona analiza zaburzeń przepływu wykonana została dla wyidealizowanego kanału z periodycznymi warunkami na ściankach bocznych i periodycznym warunkiem wlot-wylot. Dlatego też, przed wykonaniem planowanych badań eksperymentalnych, istnieje potrzeba wykonania dalszych obliczeń mających na celu wyjaśnienie wpływu rzeczywistych ścian bocznych kanału, które mogą powodować tłumienie zaburzeń. Konieczne jest również wyjaśnienie wpływu skończonej długości kanału, co może mieć wpływ na długość drogi powstania i wzmocnienia zaburzeń przepływu. Obliczenia te pozwolą na określenie optymalnej geometrii kanału i jego konstrukcję w celu eksperymentalnego potwierdzenia poprawności przeprowadzonych obliczeń.

Podziękowania

Niniejsza praca została wykonana w ramach grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego „Intensyfikacja procesu mieszania w mikro-przepływach”.

Bibliografia

- [1] King K.R., Wang S., Irimia D., Jayaramn A., Toner M., Yarmush M., A high throughput Microfluidic realtime gene expression living cell array, *Lab on Chip*, vol. 7, pp. 77-85, 2007.
- [2] Nguyen N. T., Wu, Z., Micro-mixers – a review, *J. Micromech. Microeng.* 15, p1-6, 2005
- [3] Santiago J.G., Wereley S.T., Meinhart C.D., Beebe D.J., Adrian R.J., 1998, A micro particle image Velocimetry system, *Exp. Fluids*, **25**, 316-319

- [4] Blonski S. Korczyk P, Kowalewski T.A., Analysis of turbulence in a micro-channel emulsifier, *Int. J. Thermal Scs*, doi:10.1016/j.ijthermalsci.2007.01.028
- [5] Szumbariski J., *Niestateczność ruchu cieczy lepkiej w pofalowanym kanale*, Prace Naukowe, Mechanika, z.218, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007
- [6] Szumbariski J, Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 45, No 3, 2007
- [7] Roache P.J., "Verification and validation in Computational Science and Engineering", *Hermosa Publishers*, Albuquerque, NM, 1998

NUMERICAL SIMULATIONS OF THE FLOW INSTABILITY GENERATED BY CORRUGATED CHANNEL WALLS.

Summary:

Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated channel walls is investigated theoretically and numerically. The linear stability analysis indicates that appropriate wall corrugation triggers exponentially growing flow instability at the Reynolds numbers as low as 80. DNS simulations performed for the infinite channel with corrugated walls support this prediction. Moreover, the obtained form of unstable velocity field disturbances looks very similar to the picture obtained for the linearly unstable normal mode determined from the linear theory. The kinematic structure of the disturbed flow is relatively complex and time-dependent, which apparently improves effective mixing and mass/heat transfer. Possible applications include microfluidics, flows in biochemical reactors and medical devices, cooling of microelectronic systems and others.