



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Rafał Stocki

**NIEZAWODNOŚCIOWA OPTIMALIZACJA KONSTRUKCJI  
PRĘTOWYCH W ZAKRESIE DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ -  
TEORIA I PROGRAM KOMPUTEROWY**

Praca doktorska

Promotor - prof. dr hab. inż. Michał Kleiber

Warszawa 1999



---

# Spis treści

---

<b>1. Przedmiot, cel i zakres pracy</b>	<b>1</b>
1.1. Przedmiot rozważań . . . . .	1
1.2. Cel i zakres pracy . . . . .	3
1.3. Przegląd literatury . . . . .	8
<b>2. Metody analizy niezawodności konstrukcji</b>	<b>15</b>
2.1. Podstawowe pojęcia . . . . .	15
2.2. Wybrane miary niezawodności . . . . .	20
2.2.1. Wskaźnik niezawodności Cornella . . . . .	20
2.2.2. Wskaźnik niezawodności Cornella a metoda stochastycznych elementów skończonych . . . . .	23
2.2.3. Wskaźnik niezawodności Hasofer-Linda . . . . .	25
2.3. Metody wykorzystujące informacje o rozkładach prawdopodobieństwa . . . . .	29
2.3.1. Własności gaussowskiej przestrzeni standardowej $\mathbf{u}$ . . . . .	29
2.3.2. Transformacja do przestrzeni $\mathbf{u}$ . . . . .	31
2.3.3. Metoda analizy niezawodności pierwszego rzędu (FORM) . . . . .	32
2.3.3.1. Wrażliwość wskaźnika niezawodności w metodzie FORM . . . . .	36
2.3.4. Metoda analizy niezawodności drugiego rzędu (SORM) . . . . .	38
2.3.5. Metoda Mean-Value First-Order (MVFO) . . . . .	42
2.3.6. Metoda Monte Carlo . . . . .	44
2.3.7. Metoda ‘importance sampling’ . . . . .	46
2.4. Podejście probabilistyczne w normach . . . . .	49
<b>3. Niezawodnościowa optymalizacja konstrukcji</b>	<b>53</b>
3.1. Podział, oznaczenia i grupowanie parametrów . . . . .	53
3.2. Zadanie optymalizacji niezawodnościowej . . . . .	55
3.2.1. Budowa systemu optymalizacji niezawodnościowej . . . . .	58
3.2.2. Inne sformułowania . . . . .	60
3.3. System optymalizacji niezawodnościowej jako narzędzie projektanta . . . . .	64

---

<b>4. Metody poprawy efektywności optymalizacji niezawodnościowej</b>	<b>79</b>
4.1. Redukcja liczby parametrów i ograniczeń . . . . .	79
4.2. Sterowanie algorytmem lokalizacji punktu projektowego . . . . .	80
4.3. Metody optymalizacji interaktywnej . . . . .	83
4.4. Porównanie metod realizacji zadania optymalizacji niezawodnościowej . . . . .	87
<b>5. Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji geometrycznie nieliniowych</b>	<b>99</b>
<b>6. Wnioski i spostrzeżenia</b>	<b>115</b>
<b>A. Wybrane algorytmy optymalizacyjne optymalizacji niezawodnościowej</b>	<b>119</b>
A.1. Metoda rekurencyjnego programowania kwadratowego . . . . .	119
A.1.1. Wyprowadzenie podproblemu programowania kwadratowego . . . . .	120
A.1.2. BFGS – quasi-newtonowska metoda aproksymacji hesjanu . . . . .	123
A.1.3. NLPQL . . . . .	124
A.2. Metody poszukiwania punktu projektowego . . . . .	127
A.2.1. Algorytm Abdo-Rackwitz-Fiesslera (ARF) . . . . .	128
A.2.2. Wielokrotne punkty projektowe . . . . .	131
<b>B. Analiza wrażliwości konstrukcji kratowych</b>	<b>133</b>
B.1. Wrażliwość w zagadnieniach liniowych . . . . .	135
B.1.1. Element skończony kratownicy przestrzennej . . . . .	136
B.1.2. Funkcja graniczna przemieszczeniowa . . . . .	139
B.1.3. Funkcja graniczna naprężeniowa / stateczności lokalnej . . . . .	140
B.1.4. Funkcja graniczna stateczności globalnej . . . . .	141
B.2. Wrażliwość w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych . . . . .	142
B.2.1. Element skończony kratownicy przestrzennej . . . . .	144
B.2.2. Funkcja graniczna przemieszczeniowa . . . . .	148
B.2.3. Funkcja graniczna naprężeniowa / stateczności lokalnej . . . . .	149
B.2.4. Funkcja graniczna stateczności globalnej . . . . .	149
<b>C. Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa</b>	<b>153</b>
<b>Literatura</b>	<b>159</b>

---

# Przedmiot, cel i zakres pracy

---

## 1.1. Przedmiot rozważań

Deterministyczna optymalizacja kształtu oraz wymiarów konstrukcji ze względu na minimum kosztu lub maksimum nośności jest obecnie szeroko znana oraz powszechnie stosowana w procesie projektowania. Dzięki ciągłemu zwiększaniu się mocy obliczeniowej współczesnych komputerów, a także rozwojowi efektywnych algorytmów numerycznych, metody optymalizacyjne dostępne są już w ramach wielu komercyjnych pakietów metody elementów skończonych. Konstrukcja optymalna, która otrzymywana jest jako wynik działania algorytmu optymalizacyjnego, minimalizującego odpowiednio zdefiniowaną funkcję kosztu, zapewniać powinna równocześnie określony poziom niezawodności. Ocena niezawodności konstrukcji wymaga uwzględnienia losowego charakteru szeregu parametrów opisujących materiał, geometrię i obciążenia, jak również niepewności związanej z przyjętym modelem konstrukcji. W ramach obowiązujących obecnie norm projektowych losowość parametrów konstrukcji uwzględniana jest za pomocą tzw. częściowych współczynników bezpieczeństwa (wyznaczanych często w sposób empiryczny), które w zależności od typu parametru odpowiednio zwiększają lub zmniejszają jego wartość. Podejście takie nie umożliwia niestety dokładnej oceny poziomu bezpieczeństwa konstrukcji optymalnej, a z punktu widzenia aktualnego zaawansowania metod analizy niezawodności wydawać się może wręcz nieracjonalne. Już prawie 20 lat temu nastąpił bowiem prawdziwy przełom w teorii niezawodności konstrukcji. Uświadomiono sobie wtedy, że trudne do policzenia wielowymiarowe całki po obszarze awarii z funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych, które definiują prawdopodobieństwo zniszczenia i które do tej

pory redukowały zakres stosowalności analizy niezawodności do niewielkich, akademickich przykładów, mogą być zastąpione przez pewien problem optymalizacji (dużo efektywniejszy w realizacji numerycznej) oraz pewne proste działania algebraiczne. Obecnie dysponując probabilistycznym opisem parametrów konstrukcji oraz identyfikując potencjalne sytuacje awaryjne poprzez zdefiniowanie odpowiednich funkcji granicznych można, przy stosunkowo niedużym nakładzie obliczeniowym, otrzymać dobre przybliżenie wartości prawdopodobieństwa awarii, np. za pomocą metody pierwszego rzędu (FORM). Gromadzone przez lata dane statystyczne dotyczące obciążeń oraz parametrów wytrzymałościowych pozwalają na konstruowanie probabilistycznych modeli zawierających nie tylko informację o wartościach średnich oraz kowariancjach zmiennych losowych, ale także o typach rozkładów prawdopodobieństwa, które je opisują.

Alternatywą dla projektowania konstrukcji w oparciu o optymalizację deterministyczną oraz współczynniki bezpieczeństwa wydaje się być optymalizacja niezawodnościowa, rozwijana intensywnie w ostatnich latach. Ograniczenia nakładane na niezawodność konstrukcji wyspecyfikowane są tu w sposób jawny w sformułowaniu zadania optymalizacji, a sama niezawodność liczona jest za pomocą FORM lub innych zaawansowanych metod wykorzystujących wiedzę o rozkładach prawdopodobieństwa parametrów konstrukcji. Ocenia się, że najwięcej zastosowań znajdzie optymalizacja niezawodnościowa w projektowaniu drogich i nietypowych konstrukcji, gdzie brakuje wiedzy, a zwłaszcza doświadczenia na temat pracy konstrukcji i gdzie konieczne jest bardziej racjonalne podejście do zagadnień oceny niezawodności oraz w projektowaniu konstrukcji, które produkuje się w dużych ilościach.

W niniejszej pracy rozważane są zagadnienia optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji prętowych, a w szczególności konstrukcji kratowych poddanych dużym przemieszczeniom i podatnych na utratę stateczności. Ustroje prętowe są często i chętnie stosowane w wielu współczesnych konstrukcjach inżynierskich. Wykorzystuje się je między innymi jako przekrycia obiektów o dużej powierzchni, konstrukcje platform wiertniczych, wysokie maszty radiowe, podpory sieci energetycznych, dźwigi budowlane czy też konstrukcje wsporcze radioteleskopów o dużej średnicy. Do podstawowych zalet konstrukcji prętowych należy ich niewielki ciężar własny przy stosunkowo dużej nośności. W projektowaniu tego typu konstrukcji decydujące znaczenie mogą mieć zjawiska związane z ich statecznością. Zjawiska utraty stateczności konstrukcji prętowych mogą mieć różny charakter. Przez pojęcie utraty stateczności globalnej rozumie się utratę stateczności konstrukcji jako całości, związaną z bifurkacją położenia równowagi lub zjawiskiem przeskoku. Możliwa jest również utrata stateczności konstrukcji spowodowana niestatecznością pojedynczych elementów układu tzn. wyboczeniem poszczególnych prętów pomiędzy węzłami, tzw. zjawisko utraty stateczności lokalnej. Jest rzeczą powszechnie znaną, iż występujące w układzie imperfekcje geometrii bądź też odmienne od zakładanych parametry materiałowe prowadzić mogą do znacznego zwiększenia podatności konstrukcji na utratę stateczności. Dlatego też odpowiednim rozwiązaniem w projektowaniu konstrukcji narażonych na utratę stateczności globalnej wydaje się zastosowanie aparatu optymalizacji niezawodnościowej z ograniczeniami nałożonymi na wielkość krytycznego mnożnika obciążenia.

Optymalizacja niezawodnościowa ze swej ‘natury’ jest zagadnieniem wymagającym długich obliczeń komputerowych, co ciągle stanowi barierę przy analizie bardzo złożonych układów konstrukcyjnych poddanych wielu ograniczeniom niezawodnościowym. Ponieważ obliczenie prawdopodobieństwa awarii odpowiadającego danemu ograniczeniu wiąże się z rozwiązaniem zadania optymalizacji (znalezieniem tzw. punktu projektowego), optymalizacja niezawodnościowa nazywana czasem bywa optymalizacją dwupoziomową. Problem poprawy efektywności procesu obliczeniowego stanowi obecnie przedmiot wielu badań. W ramach niniejszej pracy zbudowany został komputerowy system optymalizacji niezawodnościowej OPTIREL, łączący wyspecjalizowany program analizy niezawodności, sprawny algorytm optymalizacyjny oraz program elementów skończonych wraz z efektywnym modulem analizy wrażliwości. Pokazano, że odpowiednie zaprojektowanie tego systemu jako systemu optymalizacji interaktywnej umożliwi implementację szeregu metod, które pozwalają na znaczną redukcję czasu obliczeń oraz umożliwiają lepszą kontrolę procesu optymalizacji niezawodnościowej, co jest szczególnie istotne przy optymalizacji konstrukcji nieliniowych.

## 1.2. Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest teoretyczne opracowanie oraz komputerowa implementacja zagadnień optymalizacji niezawodnościowej geometrycznie nieliniowych konstrukcji prętowych. Na przykładzie utworzonego w ramach pracy komputerowego systemu OPTIREL chciano wykazać, że projektowanie konstrukcji wspomagane przez system optymalizacji niezawodnościowej stanowi ciekawą i bardziej racjonalną metodę projektowania w stosunku do metod tradycyjnych, w których odpowiedni poziom niezawodności zapewniany jest przez stosowanie tzw. wartości charakterystycznych parametrów projektowych i częściowych współczynników bezpieczeństwa. Przydatność systemu przetestowano na przykładach wielu konstrukcji kratowych, w tym przestrzennych konstrukcji podatnych na utratę stateczności globalnej. Aby umożliwić jak najpełniejszy probabilistyczny opis parametrów konstrukcji rozpatrywana jest szeroka klasa zmiennych losowych, których wartości średnie oraz odchylenia standardowe tworzą zbiór parametrów projektowych zadania optymalizacji. Jako zmienne losowe przyjęto następujące parametry modelowanych układów konstrukcyjnych: pola przekrojów prętów, współrzędne węzłów, mnożniki schematów obciążenia oraz moduły Younga i granice plastyczności materiałów. Taki dobór zmiennych umożliwia optymalizację zarówno wymiarów jak i kształtu konstrukcji. Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych przyjmowane są spośród kilku, najczęściej stosowanych w praktyce rozkładów. Funkcję celu stanowi koszt początkowy konstrukcji, utożsamiany najczęściej z jej ciężarem. Pokazano, że różnorodność dostępnych w ramach optymalizacji niezawodnościowej parametrów projektowych umożliwia konstruowanie rozszerzonych funkcji celu, np. uwzględniających koszt związany z jakością stosowanych materiałów. Rozpatrywane są trzy typy warunków granicznych, które stanowią ograniczenia procesu optymalizacji. Są to: warunki nieprzekraczania dopuszczalnych przemieszczeń węzłów konstrukcji, dopuszczalnych naprężeń w prętach (utożsamianych

w zależności od znaku naprężenia i smukłości pręta z granicą plastyczności bądź naprężeniem krytycznym) oraz warunek nakładany na mnożnik obciążenia w przypadku konstrukcji podatnych na utratę stateczności globalnej. Powyższe warunki spełnione być muszą z prawdopodobieństwem nie mniejszym od pewnej minimalnej wartości, ustalonej przez projektanta.

Efektywny komputerowy system optymalizacji niezawodnościowej łączyć musi szereg wyspecjalizowanych modułów do analizy niezawodności, optymalizacji, analizy konstrukcji metodą elementów skończonych i analizy wrażliwości. Tworząc system OPTIREL starano się wybrać oraz zaimplementować najefektywniejsze spośród znanych metod realizujących wymienione zadania. Jako moduł niezawodnościowy przyjęto, uznawany obecnie za jeden z najlepszych komercyjnych programów z tej dziedziny, rozwijany przez niemiecką firmę RCP GmbH pakiet COMREL [12]. Do realizacji zadania optymalizacji wybrano algorytm rekurencyjnego programowania kwadratowego NLPQL [106], natomiast analiza statyczna oraz analiza wrażliwości geometrycznie nieliniowych konstrukcji kratowych realizowana jest przez utworzony przez autora, na bazie rozwijanego w IPPT PAN programu POLSAP, program PSAP-T-NL. Zbudowany system umożliwia przetestowanie szeregu metod zwiększających efektywność procesu optymalizacji niezawodnościowej, ze szczególnym uwzględnieniem metod optymalizacji interaktywnej.

Wprowadzenie wielu postaci funkcji granicznych, w tym m.in. funkcji opisujących awarię konstrukcji na skutek utraty stateczności globalnej oraz analiza konstrukcji geometrycznie nieliniowych, stanowi w kontekście optymalizacji niezawodnościowej element oryginalny. Na podkreślenie zasługują także zaproponowane metody usprawnienia procesu obliczeniowego oraz ogólne spostrzeżenia i wskazówki dotyczące budowy systemów optymalizacji niezawodnościowej. Ważnym elementem pracy jest także, zdaniem autora, szczegółowo omówiony przykład zastosowania systemu OPTIREL w projektowaniu konstrukcji inżynierskich.

Praca składa się z 6 rozdziałów i 3 dodatków.

Rozdział 2 w całości poświęcony jest zagadnieniom analizy niezawodności konstrukcji. Główny nacisk położony został na te metody, które dostępne są w pakiecie OPTIREL i które obecnie najczęściej używane są do analizy niezawodności konstrukcji inżynierskich. Na wstępie rozdziału wprowadzono podstawowe pojęcia teorii niezawodności, takie jak: awaria konstrukcji, funkcja graniczna, niezawodność elementu i systemu oraz wskaźnik niezawodności  $\beta$ . Pojęcia te zilustrowano na przykładzie analizy niezawodności pręta rozciąganego.

Następnie zaprezentowano te metody oceny prawdopodobieństwa awarii, w których wykorzystuje się znajomość jedynie wektora wartości średnich oraz macierzy kowariancji zmiennych losowych. Sytuacja taka jest bardzo często spotykana w praktyce, gdyż nie zawsze dysponujemy dostatecznym materiałem statystycznym pozwalającym na określenie typów rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych. Przedstawiono koncepcję wskaźnika Cornela oraz sposób jego obliczania za pomocą, dostępnej w ramach OPTIREL, metody stochastycznych elementów skończonych. Na przykładzie analizy niezawodności wspor-



nika kratowego pokazano charakterystyczny dla tego wskaźnika brak niezmienniczości względem równoważnych sformułowań funkcji granicznych. Pokazano, że problemu tego unika się stosując wskaźnik Hasofer-Linda, zdefiniowany jako najmniejsza odległość powierzchni granicznej od początku układu współrzędnych w gaussowskiej przestrzeni standardowej. W dodatku A.2 omówiono algorytmy optymalizacyjne używane do znajdowania tzw. punktu projektowego, tj. punktu na powierzchni granicznej leżącego najbliżej początku układu.

Obliczenie wartości wskaźnika Hasofer-Linda w przypadku znajomości rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych wymaga wprowadzenia takiej transformacji zmiennych z przestrzeni oryginalnej do gaussowskiej przestrzeni standardowej, która zachowywałaby miarę prawdopodobieństwa. Dlatego też, po uprzednim omówieniu własności gaussowskiej przestrzeni standardowej, przedstawiono wzory wykorzystywanej w programie COMREL transformacji Rosenblatta. Transformacja ta zakłada znajomość łącznej gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych oraz gęstości brzegowych. Lokalizacja punktu projektowego w standardowej przestrzeni gaussowskiej oraz linearyzacja funkcji granicznej w tym punkcie są istotą metody analizy niezawodności pierwszego rzędu (tzw. metody FORM), która w niniejszej pracy jest najczęściej stosowana. Na przykładzie konstrukcji wspornika kratowego przeanalizowano wpływ założeń dotyczących rozkładu prawdopodobieństwa wybranej zmiennej losowej na wartość wskaźnika niezawodności liczonego metodą FORM. Przedstawiono również wyrażenia na wrażliwość tego wskaźnika na parametry funkcji granicznej oraz parametry rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych. Pokazano, iż znajomość wrażliwości wskaźnika niezawodności jest bardzo istotna w przyjęciu optymalnego modelu stochastycznego. W dalszej części rozdziału przedstawiono zarys metody analizy niezawodności drugiego rzędu (SORM) oraz metod symulacyjnych: klasycznej metody Monte Carlo i metody ‘importance sampling’. Metody te omówione zostały pod kątem ich przydatności do zadania optymalizacji niezawodnościowej. Przedstawiono również koncepcję wskaźnika niezawodności  $\beta^{MMVFO}$ , na którym opiera się zaproponowana w rozdziale 4 metoda poprawy efektywności optymalizacji niezawodnościowej MMV (Modified Mean Value). Dokładność wyników oraz efektywność wszystkich wymienionych metod porównano na przykładzie analizy niezawodności wspornika. Ostatni punkt rozdziału poświęcony jest metodzie częściowych współczynników bezpieczeństwa, za pomocą której uwzględnia się w obowiązujących obecnie normach projektowych losowy charakter parametrów konstrukcji oraz niepewności statystyczne i modelowe. Przytoczono zasady ustalania tzw. wartości charakterystycznych oraz wartości obliczeniowych parametrów projektowych.

Rozdział 3 poświęcony jest wprowadzeniu najważniejszych zagadnień związanych z niezawodnościową optymalizacją konstrukcji. Na początku rozdziału podano propozycję systemu oznaczeń, który uwzględniałby różnorodność parametrów występujących w zadaniu optymalizacji niezawodnościowej. Przedstawiono także koncepcję grupowania parametrów. Podano następnie wykorzystywane w pracy sformułowanie zadania dwupoziomowej optymalizacji niezawodnościowej jako minimalizacji kosztu początkowego konstrukcji przy ograniczeniach nałożonych na wartości wskaźników niezawodności elementów. Zapropono-

wano postać rozszerzonej funkcji kosztu początkowego, która pozwala na uwzględnienie kosztów związanych z jakością materiału. Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji prętowych wymaga uwzględnienia różnych możliwych typów awarii oraz szeregu zmiennych losowych i parametrów projektowych. W niniejszej pracy brano pod uwagę awarie konstrukcji w postaci przekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń węzłów, dopuszczalnych naprężeń w prętach, lokalnego wybożenia prętów oraz utraty stateczności globalnej na skutek bifurkacji czy też przeskoku. W przykładach numerycznych uwzględniono losowość wielu parametrów opisujących materiał, geometrię oraz obciążenie konstrukcji.

W punkcie 3.2.1 szczegółowo omówiono schemat budowy systemu OPTIREL. Podkreślono kluczowe znaczenie jakie w systemie optymalizacji niezawodnościowej odgrywa zastosowanie efektywnych, analitycznych metod analizy wrażliwości. W punkcie 3.2.2 dokonano przeglądu oraz krytycznej oceny innych, alternatywnych sformułowań zadania optymalizacji niezawodnościowej ze szczególnym uwzględnieniem popularnego ostatnio w literaturze tzw. sformułowania jednopoziomowego.

Na przykładzie konstrukcji powłoki kratowej zaproponowano wykorzystanie systemu optymalizacji niezawodnościowej jako alternatywy dla tradycyjnych metod projektowania konstrukcji, w których losowość parametrów projektowych uwzględnia się poprzez wprowadzenie częściowych współczynników bezpieczeństwa. Porównano rozwiązanie wynikające z optymalizacji deterministycznej, uzyskane dla ustalanych według norm wartości obciążeń, z analogicznym rozwiązaniem wynikającym z optymalizacji niezawodnościowej.

Pod koniec rozdziału przedstawiono przykład optymalizacji konstrukcji wspornika kratowego, gdzie jako parametry projektowe przyjęto odchylenia standardowe granic plastyczności materiałów, z których wykonano elementy konstrukcji. Przykład ten ilustruje jak w ramach optymalizacji niezawodnościowej uwzględniać można koszt związany z jakością stosowanych materiałów.

Rozdział 4 poświęcony jest różnym strategiom poprawy efektywności procesu optymalizacji niezawodnościowej. Proces ten w większości przypadków jest bardzo czasochłonny obliczeniowo i dlatego niesłychanie ważna z punktu widzenia użytkownika komputerowego systemu optymalizacji niezawodnościowej jest implementacja szeregu metod pozwalających na skrócenie czasu obliczeń.

Bardzo ważne jest przyjęcie optymalnego modelu stochastycznego oraz optymalizacyjnego. W punkcie 4.1 przedstawiono wskazówki dotyczące redukcji liczby zmiennych losowych oraz ograniczeń niezawodnościowych. Znaczące oszczędności można osiągnąć także poprzez odpowiednie sterowanie algorytmem lokalizacji punktu projektowego. Zaproponowano kilka strategii automatycznego jak również interaktywnego sterowania tym algorytmem. Spośród nich warto wymienić strategię SPZ - polegającą na sterowaniu wielkością parametru zbieżności oraz, szczególnie efektywną, strategię PPP - polegającą na odpowiednim wyborze punktu startowego.

Niezwykle istotne, szczególnie w optymalizacji dużych, nieliniowych układów konstrukcyjnych jest zaprojektowanie systemu optymalizacji niezawodnościowej jako systemu optymalizacji interaktywnej. W punkcie 4.3, na przykładzie systemu OPTIREL, omówiono

najistotniejsze cechy systemu interaktywnego oraz zaproponowano, stosowaną z powodzeniem w większości prezentowanych w pracy przykładów, strategię aproksymacji ograniczeń niezawodnościowych. Przedstawiono także, wchodzący w skład OPTIREL'a, program wizualizacji trendów optymalizacji - Optiview. Efektywność zaproponowanych rozwiązań przetestowano na przykładzie optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji wsporczej platformy wiertniczej.

Rozdział 5 zawiera omówienie zagadnień związanych z optymalizacją niezawodnościową konstrukcji kratowych podlegających dużym przemieszczeniom oraz podatnych na utratę stateczności globalnej. Sformułowano szczegółowe warunki, które, oprócz tych wymienionych w rozdziałach 3 i 4, powinien spełniać efektywny komputerowy system optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji geometrycznie nieliniowych.

Zaprezentowano trzy przykłady analizy niezawodności oraz optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji narażonych na utratę stateczności globalnej. Przedstawiono problemy związane z ich numeryczną realizacją oraz sposoby ich przewyciężenia. Na przykładzie zadania analizy niezawodności powłoki kratowej, w którym 444 parametry opisujące konstrukcję oraz obciążenie wybrano jako zmienne losowe, pokazano, że w przypadku dużych rzeczywistych układów konstrukcyjnych jedynie zastosowanie wydajnych metod analizy wrażliwości umożliwia obliczenie prawdopodobieństwa zniszczenia w możliwym do zaakceptowania czasie. Pokazano również, iż nieuwzględnienie w analizie niezawodności nieuchronnych imperfekcji położenia węzłów może prowadzić w przypadku tego typu konstrukcji do znaczących błędów w określeniu wielkości prawdopodobieństwa awarii. W kolejnym przykładzie rozpatrywano zadanie niezawodnościowej optymalizacji kształtu małowyniosłej kopuły kratowej podatnej na utratę stateczności w postaci przeskoku węzłów. Zaproponowano metodę uniknięcia trudności numerycznych związanych z poruszaniem się po niestatecznej ścieżce równowagi poprzez odpowiednią linearyzację zachowania konstrukcji. Podkreślono znaczenie interaktywnej kontroli procesu obliczeniowego. W trzecim przykładzie analizowano zadanie optymalizacji niezawodnościowej słupa kratowego narażonego na utratę stateczności globalnej typu bifurkacyjnego oraz awarie w postaci wyboczenia poszczególnych prętów. Wzięto pod uwagę szereg zmiennych losowych oraz parametrów projektowych.

Rozdział 6 zawiera wnioski oraz spostrzeżenia.

Dodatek A poświęcony jest omówieniu stosowanych w pracy algorytmów optymalizacyjnych. Na wstępie przedstawiony został algorytm rekurencyjnego programowania kwadratowego, który w zadaniu dwupoziomowej optymalizacji niezawodnościowej stosowany być może zarówno w zewnętrznej (minimalizacja funkcji celu) jak i wewnętrznej (zadanie poszukiwania punktu projektowego) pętli optymalizacyjnej. Przedstawiono wyprowadzenie podproblemu programowania kwadratowego, którego rozwiązanie określa kierunek poszukiwań, podano wzory metody BFGS służącej do aproksymacji hesjanu funkcji Lagrange'a oraz omówiono, opracowany przez Schittkowskiego, pakiet rekurencyjnego programowania kwadratowego – NLPQL.

W punkcie A.2 zaprezentowano wybrane algorytmy poszukiwania punktu projektowego.

Efektywność tych algorytmów ma największy wpływ na efektywność obliczeniową większości współczesnych metod analizy niezawodności, a co za tym idzie również niezawodnościowej optymalizacji. Obok NLPQL najpopularniejszym gradientowym algorytmem poszukiwania punktu projektowego pozostaje tzw. algorytm Rackwitza-Fisslera (RF). W pracy omówiono algorytm RF, który zmodyfikowany został przez Abdo poprzez dodanie procedury obliczania długości kroku. Wspomniano również o innych modyfikacjach tego algorytmu, a także o metodach postępowania w przypadku, gdy funkcja graniczna posiada wiele punktów projektowych.

*Dodatek B* poświęcony jest zagadnieniom analizy wrażliwości liniowych oraz geometrycznie nieliniowych konstrukcji kratowych. Zamieszczono tam wszystkie wzory, które w ramach dyskretnych analitycznych metod analizy wrażliwości są niezbędne do policzenia gradientów, wykorzystywanych w pracy funkcji granicznych, względem wszystkich rozpatrywanych parametrów projektowych.

*Dodatek C* zawiera wzory oraz opisy najczęściej używanych w pracy rozkładów prawdopodobieństwa. Obok rozkładów normalnego oraz logarytmiczno-normalnego przedstawiono rozkłady ekstremów: Gumbela, Frecheta i Weibulla.

### 1.3. Przegląd literatury

Niniejsza praca obejmuje swoim zakresem takie dziedziny nauki jak: optymalizacja deterministyczna, teoria niezawodności, optymalizacja niezawodnościowa, analiza wrażliwości, analiza stateczności konstrukcji czy metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice konstrukcji. W dorobku każdej z wymienionych dziedzin, za wyjątkiem optymalizacji niezawodnościowej, istnieje obecnie bardzo bogata literatura, obejmująca tysiące publikacji. W poniższym przeglądzie postanowiono skoncentrować się na pracach dotyczących niezawodności konstrukcji oraz optymalizacji niezawodnościowej jako najistotniejszych z punktu widzenia rozpatrywanych w pracy zagadnień.

Przegląd literatury należy rozpocząć od prac poświęconych teorii niezawodności konstrukcji, gdyż to właśnie dzięki olbrzymiemu postępowi jaki się w niej dokonał w ciągu ostatnich 25-30 lat możliwy jest obecnie rozwój niezawodnościowej optymalizacji. Współczesna teoria niezawodności konstrukcji jest już dobrze ugruntowaną dyscypliną naukową. Można wymienić szereg podręczników oraz monografii, z których najbardziej znane to: [81] Madsena, Krenka i Linda, [86] Melchersa, [26] Ditlevsena i Madsena, [119] Thoft-Christensena i Bakera czy monografia [3], której autorami są Augusti, Baratta i Casciati. Na uwagę zasługuje też książka Harra [52], prezentująca podstawowe pojęcia teorii niezawodności ze szczególnym uwzględnieniem ich zastosowania w inżynierii lądowej. Na świecie organizowanych jest obecnie wiele konferencji naukowych poświęconych problemom niezawodności konstrukcji, spośród których należy wymienić, organizowane cyklicznie od 1969 roku, konferencje ICOSSAR (International Conference on Structural Safety and Reliability) oraz organizowane od 1987 co 2 lata w ramach grupy roboczej 7.5 IFIP (International Federation for Information Processing) konferencje na temat niezawodności oraz optymalizacji

konstrukcji. Prezentowane tam prace wydawane są następnie w materiałach pokonferencyjnych. Jako wiodące ośrodki naukowe uznać można: kierowany przez R. Rackwiza zespół na uniwersytecie w Monachium, kierowany przez O. Ditlevsena ośrodek na uniwersytecie w Lyngby w Danii oraz inny duński ośrodek, grupujący pracowników uniwersytetu w Aalborgu, kierowany przez P. Thoft-Christensena. Spośród innych czołowych badaczy wymienić można A. Der Kiureghiana z uniwersytetu w Berkeley w Kalifornii, G. I. Schüllerera z uniwersytetu w Innsbrucku czy też R. E. Melchersa z uniwersytetu w Newcastle w Australii. Mimo, że większość współczesnych norm projektowych opartych jest ciągle na koncepcji wartości charakterystycznych i częściowych współczynników bezpieczeństwa, to w wielu przypadkach wartości tych współczynników kalibruje się na podstawie przeprowadzonych analiz niezawodnościowych, zob. Galambos [45] i Ellingwood [33]. W ramach JCSS (Joint Committee on Structural Safety) przygotowywane są obecnie projekty nowych, modelowych norm, zapewniających bardziej racjonalne podejście do zagadnień bezpieczeństwa konstrukcji, poprzez np. uwzględnianie pełniejszego statystycznego opisu parametrów konstrukcji (różne typy rozkładów prawdopodobieństwa) czy też wprowadzenie wskaźnika niezawodności jako miary stopnia bezpieczeństwa konstrukcji. Projekt takiej modelowej normy, autorstwa Ditlevsena i Madsena opublikowano w [25, 26]. Rozwój teorii niezawodności widoczny jest także w liczbie dostępnych programów analizy niezawodności. Do najbardziej obecnie znanych należą: pakiet STRUREL [115] (zawiera on program COMREL-TI do analizy zagadnień niezawodności elementu, niezmiennych w czasie, COMREL-TV do analizy zagadnień zmiennych w czasie i SYSREL do zagadnień niezawodności systemu), CALREL [76], COSSAN [14], ISPUD [58], PROBAN [94] i NESSUS [87].

Za prekursora niezawodności uważa się Freudenthala [44], autora pracy o bezpieczeństwie konstrukcji działających pod obciążeniem losowym, chociaż jedną z pierwszych prac na ten temat była praca polskiego naukowca W. Wierzbickiego [124] z 1937 roku. Jednak za pierwszy, ważny krok w kierunku współczesnych metod pozwalających na efektywną i dokładną ocenę bezpieczeństwa konstrukcji należy uznać pracę Hasofera i Linda [53], opublikowaną w 1974 roku. Zawarto w niej ideę lokalizacji (za pomocą odpowiedniego algorytmu optymalizacyjnego) tzw. ‘punktu projektowego’, to jest takiej realizacji zmiennych losowych z obszaru awarii, której odpowiada największa wartość funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Linearyzacja funkcji granicznej w punkcie projektowym pozwalała otrzymać następnie miarę niezawodności, która jest niezmiennicza ze względu na równoważne sformułowania warunku granicznego, tzw. wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda. Właśnie ten brak niezmienniczości był podstawową słabością stosowanego poprzednio wskaźnika Cornella [13]. Utrudniał on m.in. stosowanie tej miary niezawodności do porównywania stopnia bezpieczeństwa różnych konstrukcji. Ideę wskaźnika Hasofera-Linda wykorzystali w 1978 roku Rackwitz i Fiessler w pracy [96]. Zastosowali oni ponadto transformacje niezależnych zmiennych losowych o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa do standardowych zmiennych normalnych oraz zaproponowali algorytm poszukiwania punktu projektowego. W pracy [55] Hohenbichler i Rackwitz zaproponowali wykorzystanie w analizie niezawodności transformacji Rosenblatta [101] do transformacji zależnych zmiennych



losowych do przestrzeni standardowej. Transformacja Rosenblatta oraz, wykorzystana po raz pierwszy przez Der Kiureghiana i Liu w pracy [22], transformacja Natafa są obecnie najczęściej używane i umożliwiają analizę problemów niezawodności zarówno w przypadku gdy znany jest łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych jak też gdy znane są tylko rozkłady brzegowe zmiennych i macierz korelacji. Aproksymacja funkcji granicznej w punkcie projektowym funkcją pierwszego lub drugiego stopnia prowadzi, odpowiednio, do metod analizy niezawodności pierwszego rzędu (FORM) lub drugiego rzędu (SORM). Chociaż pierwsza z tych metod daje w większości przypadków, mających praktyczne znaczenie, zadowalające wyniki, to dla funkcji granicznych, w których wpływ członów nieliniowych jest bardzo znaczący, jej dokładność może być niewystarczająca. Dlatego też powstało wiele publikacji poświęconych metodzie SORM, a w szczególności zagadnieniom poprawy jej precyzji oraz efektywności numerycznej. Spośród ważniejszych prac dotyczących SORM wymienić należy [40] Fiesslera, Neumanna i Rackwitz (pierwsza praca w której zaproponowano wykorzystanie aproksymacji powierzchni granicznej funkcją kwadratową), [10] Breitunga, [21] Der Kiureghiana, Lina i Hwanga czy [122] Tvedta.

Chociaż w porównaniu z SORM czas obliczeń numerycznych związany z metodą FORM jest dużo krótszy, to w wielu przypadkach jest on nadal zbyt długi z punktu widzenia praktyki projektowej. Może mieć to miejsce jeśli obliczenie wartości funkcji granicznej wiąże się z czasochłonną, nieliniową analizą za pomocą programu elementów skończonych lub jeśli gradienty tej funkcji obliczane są różnicowo. Stawiając sobie za cel zmniejszenie liczby koniecznych obliczeń wartości funkcji granicznej oraz jej gradientów Wu i in. zaproponowali tzw. metodę Advanced Mean Value (AMV) [127]. Istotą tej metody jest znalezienie wartości dystrybuanty wielkości stanowiących odpowiedź konstrukcji (takich jak przemieszczenia, naprężenia, częstości drgań własnych), bazując na linearyzacji funkcji granicznej w punkcie wartości średnich zmiennych losowych. Konstruowana jest krzywa, łącząca punkty odpowiadające przybliżonym położeniom punktów projektowych dla różnych wartości odpowiedzi konstrukcji (Most Probable Point Locus). Pomimo licznych usprawnień (kosztem numerycznej efektywności) metoda ta w przypadku nieliniowych funkcji granicznych może dawać wyniki znacznie odbiegające od dokładnych. Jest ona jednak często stosowana i wielu autorów używa jej w swoich pracach, zob. np. [61, 100, 117, 128].

Odrębną grupę metod analizy niezawodności stanowią metody symulacyjne. Do ich zalet należą niewątpliwie łatwość implementacji, możliwość uzyskania wyników z dowolną precyzją oraz niewrażliwość na nieróżniczkowalność powierzchni granicznej czy też istnienie wielu punktów projektowych (problemy utrudniające wykorzystanie metod FORM/SORM). Najlepiej znana, klasyczna metoda Monte Carlo, pomimo ciągłego zwiększania się mocy obliczeniowej współczesnych komputerów, jest jednak bardzo rzadko stosowana w obliczeniach niezawodnościowych. Przy bardzo małych wartościach prawdopodobieństwa awarii rzeczywistych konstrukcji, liczba koniecznych symulacji dyskwalifikuje przydatność tej metody w zastosowaniach praktycznych. Lata osiemdziesiąte przyniosły jednak rozwój tzw. metod redukcji wariancji, po angielsku nazywanych ‘importance sampling’. Poprzez

odpowiedni dobór funkcji gęstości prawdopodobieństwa, według której generuje się zmienne losowe można znacznie zmniejszyć obszar próbkowania oraz liczbę symulacji. Metoda ta ma wiele odmian. Stosowana jest też często w połączeniu z FORM lub SORM. Spośród prac jej poświęconych, warto wymienić artykuły Schuëllera i Stixa [110], Hohenbichlera i Rackwitz [57] oraz Dolińskiego [29]. Inną odmianą metod symulacyjnych jest metoda symulacji kierunkowej. Nada się ona najlepiej do analizy niezawodności problemów, w których powierzchnia graniczna ma kształt zbliżony do hipersfery. Nie jest jednak efektywna w przypadku większej liczby zmiennych losowych (np.  $n > 6$ ). Przegląd oraz omówienie różnych metod symulacyjnych znaleźć można w pracach Rubinsteina [102] i Melchersa [85, 86].

We wczesnych zastosowaniach metod FORM i SORM przyjmowano najczęściej, że funkcja graniczna jest jawną funkcją zmiennych losowych. Niestety, za wyjątkiem niewielu prostych przykładów, taka zależność funkcyjna nie może być wyspecyfikowana, a w większości przypadków dana jest za pośrednictwem określonej procedury numerycznej, np. metody elementów skończonych. Poczynając jednak od pierwszych prac Der Kiureghiana oraz współpracowników, w połowie lat osiemdziesiątych [19, 20] problematyka wykorzystania metody elementów skończonych w ramach metod analizy niezawodności zaczęła być bardzo intensywnie rozwijana. Jej rozwój wiąże się m.in. z rozwojem metod analizy wrażliwości. Przy dużej liczbie zmiennych losowych, zagadnienie efektywnego i dokładnego liczenia gradientów funkcji granicznej ma bowiem kluczowe znaczenie z punktu widzenia numerycznej efektywności analizy niezawodności. Chociaż nie jest to tak ewidentne w przypadku rozpatrywanych w pracy konstrukcji prętowych, to nadal jednym z najtrudniejszych problemów w zastosowaniach MES w zagadnieniach probabilistycznych jest odpowiednia dyskretyzacja pól losowych parametrów (np. losowych, zmiennych w przestrzeni, parametrów materiałowych konstrukcji powłokowej). Przegląd oraz testy różnych metod dyskretyzacji znaleźć można w pracy Li i DerKiureghiana [73] lub też Matthiesa i in. [83]. Spośród ciekawych przykładów analizy niezawodności z wykorzystaniem FORM oraz metody elementów skończonych wymienić można pracę Lee i Anga [72], w której rozpatrywano problem niezawodności rozciąganej tarczy z pęknięciem, pracę Engelstada i Reddy'ego [39], poświęconą analizie niezawodności geometrycznie nieliniowych warstwowych powłok kompozytowych, pracę Mahadevana i Mehty [82], gdzie analizowano przykład niezawodności konstrukcji ramowej poddanej ruchom podłoża wywołanym trzęsieniem ziemi, czy też pracę Liu i Der Kiureghiana [75], w której zastosowano SORM do analizy niezawodności konstrukcji geometrycznie nieliniowych.

Przy tworzeniu programu umożliwiającego analizę niezawodności z wykorzystaniem metody elementów skończonych najkorzystniejszą sytuacją jest posiadanie dostępu zarówno do kodu źródłowego MES, jak i programu niezawodnościowego. Pozwala to na optymalne połączenie obu programów, właściwą implementację algorytmów analizy wrażliwości i usprawnienie wzajemnej komunikacji. Nie jest to na ogół możliwe. Budowa własnego oprogramowania 'od zera' jest bardzo czasochłonna, trudna i mało rozsądna. Poza tym, istniejące i rozwijane od wielu lat programy oferują o wiele bogatsze możliwości w stosunku do tego, co jesteśmy w stanie w krótkim czasie zaimplementować. Dlatego kosztem

spadku efektywności, związanego z zastosowaniem różnego rodzaju ‘interfejsów’ oraz łączeniem programów na poziomie wywołań systemowych, łączy się istniejące, komercyjne programy lub np. przystosowuje własny pakiet MES do współpracy z wyspecjalizowanym programem analizy niezawodności. Powstało wiele prac, w których proponuje się sposoby wykorzystania znanych pakietów metody elementów skończonych do analizy niezawodności metodami FORM/SORM. Gutiérrez i in. w pracy [50] używali do tego celu pakietu DIANA, Gopalakrishna i Donaldson [49], Borri i Speranzini [9] i Maymon [84] wykorzystywali pakiet ANSYS, natomiast Riha i in. w [100] pakiet MSC/NASTRAN.

Należy również wspomnieć o rozwijanych obecnie metodach analizy niezawodności, wykorzystujących koncepcję tzw. powierzchni odpowiedzi (ang. response surface). Poprzez odpowiedni dobór punktów eksperymentalnych, w których obliczana jest wartość funkcji granicznej, powierzchnia graniczna aproksymowana jest za pomocą hiperpowierzchni drugiego stopnia. Skonstruowana w ten sposób powierzchnia jest jawną funkcją zmiennych losowych, co znakomicie ułatwia zastosowanie metody FORM czy też metod symulacyjnych (najczęściej jest to metoda ‘importance sampling’). Jednak, aby niezawodność konstrukcji obliczona dla danej powierzchni odpowiedzi nie była obciążona zbyt dużym błędem, powierzchnia ta musi dobrze aproksymować rzeczywistą powierzchnię graniczną w okolicy punktu projektowego. Położenie tego punktu niestety nie jest zazwyczaj znane. Ciekawy przykład zastosowania powierzchni odpowiedzi w analizie niezawodności złożonych, podlegających dużym przemieszczeniom, konstrukcji podpór linii energetycznych zaprezentowali Dagher, Lu i Peyrot w pracy [16]. Ponieważ z analizy podobnych podpór wynikało, że punkt projektowy znajduje się w pobliżu wartości obciążenia odpowiadającej 50-letniemu okresowi powrotu, dlatego też wokół tego punktu konstruowano powierzchnię. O metodach tworzenia powierzchni odpowiedzi oraz o jej zastosowaniach w analizie niezawodności przeczytać można w pracach Buchera i Bourgunda [11], Rajashekhara i Ellingwooda [98] oraz El-Tawila i in. [32].

Chociaż w niniejszej pracy tematyka ta nie była brana pod uwagę, to dla pełniejszego obrazu badań z zakresu teorii niezawodności konstrukcji warto jest też wspomnieć o publikacjach dotyczących niezawodności systemowej. W pracach tych rozpatruje się zazwyczaj dwa rodzaje zagadnień: zagadnienie jednoczesnego uwzględnienia wielu funkcji granicznych oraz zagadnienie wielu możliwych sekwencji awarii poszczególnych elementów prowadzących do zniszczenia całej konstrukcji. Przegląd różnych metod analizy niezawodności konstrukcji jako systemu znaleźć można w artykule Ditlevsena i Bjeragera [27] lub książce Thoft-Christensena i Murotsu [120].

Ostatnie 15 lat to dynamiczny rozwój optymalizacji niezawodnościowej. W przeglądowej pracy [118] Thoft-Christensen pokazał, że od połowy lat osiemdziesiątych nastąpił gwałtowny wzrost publikacji poświęconych tej tematyce. Postęp ten związany jest m.in. z rozwojem techniki komputerowej, efektywnych algorytmów optymalizacji oraz metod analizy wrażliwości. Poza tym, wspomniany już postęp w zakresie wykorzystania metody elementów skończonych w obliczaniu niezawodności umożliwił optymalizację niezawodnościową rzeczywistych, złożonych układów konstrukcyjnych. Spośród badaczy, którzy w tym okresie szczególnie intensywnie zajmowali się problematyką optymalizacji niezawod-



nościowej wymienić można Murotsu [89] oraz Frangopola [42, 43].

Teoria optymalizacji niezawodnościowej oraz zagadnienia jej implementacji rozwijane są obecnie w kilku ośrodkach naukowych na świecie. Niewątpliwie do najważniejszych należy zespół z uniwersytetu w Aalborgu, kierowany przez P. Thoft-Christensena. Spośród licznych, oryginalnych publikacji autorów związanych z tą uczelnią, warto wymienić prace Enevoldsen i Sørensen [35, 36] poświęcone tzw. systemowej optymalizacji niezawodnościowej (tzn. takiej, gdzie w sformułowaniu problemu optymalizacji występuje miara niezawodności konstrukcji jako systemu), pracę Thoft-Christensena i Sørensen [121], w której dyskutowany jest problem efektywności różnych algorytmów optymalizacyjnych w zastosowaniu do optymalizacji niezawodnościowej, pracę Enevoldsen [34], gdzie podano sposób obliczania wrażliwości, otrzymywanego z optymalizacji niezawodnościowej, rozwiązania optymalnego, czy też pracę Enevoldsen i in. [38], w której zaprezentowano przykłady niezawodnościowej optymalizacji kształtu układów tarczowych. Wiele prac na temat optymalizacji niezawodnościowej powstaje również na uniwersytecie w Innsbrucku, w ośrodku kierowanym przez G.I. Schuëllera. Rozwijane tam metody optymalizacji niezawodnościowej opierają się na analizie niezawodności przy użyciu symulacyjnej techniki ‘importance sampling’ oraz koncepcji powierzchni odpowiedzi, zob. Gasser i Schuëller [46, 47]. W Polsce zagadnieniami optymalizacji niezawodnościowej zajmowali się Jendo i Putresza [59, 60]. Putresza w swoim doktoracie [95] zajmował się wielokryterialną optymalizacją konstrukcji prętowych przy użyciu programowania stochastycznego.

Optymalizacja niezawodnościowa jest zazwyczaj zadaniem wymagającym czasochłonnych obliczeń numerycznych. Wiele prac z tej dziedziny poświęconych jest właśnie sposobom poprawy wydajności procesu obliczeniowego. Jednym z rozwiązań mających prowadzić do tego celu jest sformułowanie zadania optymalizacji niezawodnościowej jako tzw. zadania optymalizacji jednopoziomowej, które pozwala na pominięcie wewnętrznej pętli optymalizacyjnej, tj. poszukiwania punktu projektowego. Sformułowanie to zaproponowane zostało przez Madsena i Friis Hansena w pracy [80], a następnie rozwijane było przez Enevoldsen i Sørensen [37] oraz Kuschela i Rackwitsa [69, 70]. Zalety związane z optymalizacją jednopoziomową ‘okupione’ są niestety koniecznością obliczania drugich pochodnych ograniczeń niezawodnościowych względem parametrów projektowych oraz zmiennych losowych, co stanowi bardzo poważne ograniczenie przydatności tego podejścia. W celu usprawnienia procesu optymalizacji niezawodnościowej, Sørensen i in. [113] oraz Santos i in. [103] zaproponowali wykorzystanie technik optymalizacji interaktywnej. Podejście to, w nieco zmodyfikowanej postaci, zastosowano także w niniejszej pracy.

Z publikacji poświęconych budowie systemu optymalizacji niezawodnościowej wymienić można prace Luo i Grandhi [77] oraz Rajagopalana i Grandhi [97], w których przedstawiono system optymalizacji niezawodnościowej utworzony na bazie pakietu metody elementów skończonych i optymalizacji ASTROS oraz omówiono ciekawy interfejs użytkownika systemu. Pewne ogólne rozważania na temat zastosowania optymalizacji niezawodnościowej w procesie projektowania i wytwarzania konstrukcji jak również architektury systemu optymalizacji niezawodnościowej znaleźć można w pracy Schuëllera i in. [109].

Jak dotąd nie ma w zasadzie prac, w których rozpatrywano by optymalizację niezawodnościową

wodnościową złożonych konstrukcji, narażonych na utratę stateczności globalnej. Jediną znaną autorowi jest praca Kogiso, Shao i Murotsu [68], w której maksymalizowana jest niezawodność ściskanej osiowo, kompozytowej płyty. Zmiennymi projektowymi są tu kąty wzajemnego ułożenia warstw kompozytu.

---

## Metody analizy niezawodności konstrukcji

---

### 2.1. Podstawowe pojęcia

Rozpatrywane w pracy zagadnienia analizy niezawodności konstrukcji opierają się na dwóch podstawowych założeniach. Po pierwsze zakłada się, że konstrukcja może znajdować się jedynie w jednym z dwóch dopuszczalnych stanów: *stanie bezpiecznym* lub *stanie awarii (zniszczenia)*. Przez awarię należy tu rozumieć niespełnienie pewnego ograniczenia, nałożonego przez projektanta na pracę konstrukcji. Tak określona awaria nie musi pociągać za sobą żadnych tragicznych następstw z jakimi w potocznym rozumieniu łączy się często słowa ‘awaria’ i ‘zniszczenie’. Drugie założenie dotyczy parametrów opisujących stan konstrukcji. Przyjmuje się, że parametry te traktowane są jako *zmienne losowe* (w odróżnieniu od procesów losowych). Ponadto, rozpatrywane problemy analizy niezawodności dotyczyć będą tzw. niezawodności elementu. Przez element rozumie się tu całą konstrukcję lub jej część, której stan określony jest przez jedną funkcję zniszczenia (kryterium awarii). Znajomość niezawodności elementów jest podstawą do systemowej analizy niezawodności, gdzie stan bezpieczeństwa konstrukcji definiowany jest przez pewien układ stanów wielu elementów (zob. np. [120]). W niniejszej pracy niezawodność konstrukcji jako systemu nie będzie jednak brana pod uwagę. Na niezawodność konstrukcji składają się następujące elementy:

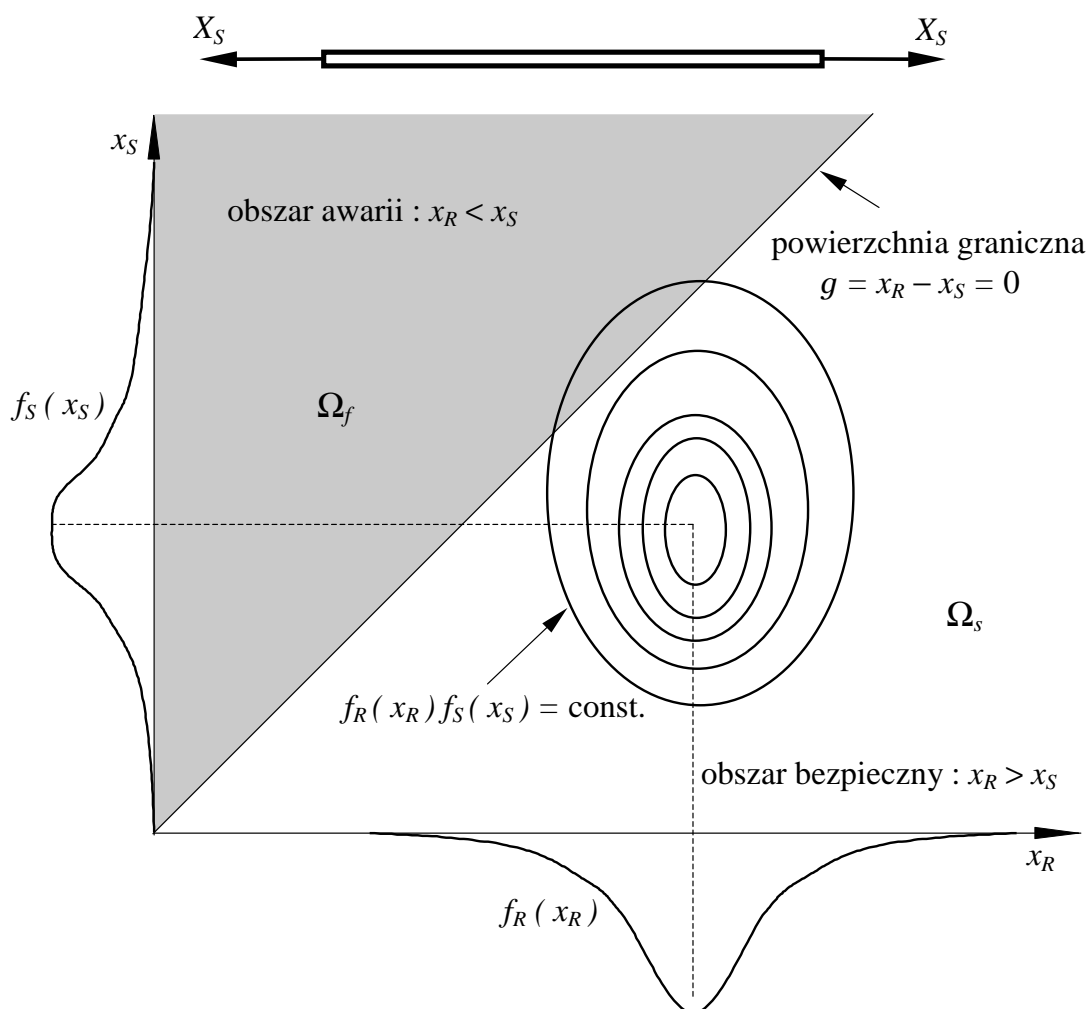
**bezawaryjność** - zdolność konstrukcji do utrzymania sprawności w ciągu określonego przedziału czasu w określonych warunkach eksploatacji,

**zdolność naprawcza** - przystosowanie do zapobiegania, wykrywania i usuwania uszkodzeń,

**trwałość** - zdolność do długotrwałej eksploatacji przy należytej obsłudze technicznej, włącznie z naprawami.

W niniejszej pracy niezawodność utożsamiać będziemy z bezawaryjnością. Liczbowo definiuje się ją jako dopełnienie do jedynki prawdopodobieństwa awarii  $P_f$

$$\mathcal{R} = 1 - P_f . \quad (2.1)$$



RYS. 2.1. Problem niezawodności pręta rozciąganego

Bardzo często w celu przedstawienia podstawowych zagadnień analizy niezawodności rozpatruje się przykład pryzmatycznego pręta o wytrzymałości na rozciąganie  $X_R$  rozciągającego siłą  $X_S$  (rys. 2.1). Zniszczenie (przekroczenie granicy plastyczności, zerwanie) pręta nastąpi gdy  $X_R \leq X_S$ . Przyjmując, że  $X_R$  i  $X_S$  są nieujemnymi i niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości prawdopodobieństwa odpowiednio  $f_R(x_R)$  oraz  $f_S(x_S)$ ,

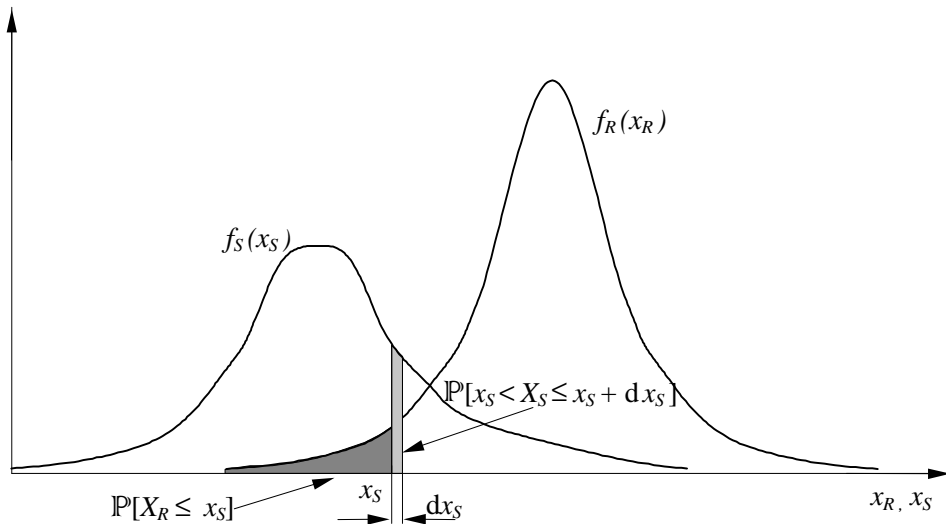
prawdopodobieństwo zniszczenia pręta obliczyć można z jednego z poniższych wzorów

$$P_f = \mathbb{P}[X_R \leq X_S] = \iint_{x_R \leq x_S} f_R(x_R) f_S(x_S) dx_R dx_S \quad (2.2a)$$

$$= \int_0^\infty F_R(x_S) f_S(x_S) dx_S \quad (2.2b)$$

$$= \int_0^\infty [1 - F_S(x_R)] f_R(x_R) dx_R = 1 - \int_0^\infty F_S(x_R) f_R(x_R) dx_R, \quad (2.2c)$$

gdzie  $F_R(x_R) = \int_0^{x_R} f_R(t) dt$  i  $F_S(x_S) = \int_0^{x_S} f_S(t) dt$  są dystrybuantami odpowiednio zmiennych  $X_R$  i  $X_S$ . Graficzną reprezentację równania (2.2b) pokazano na rysunku 2.2. Jak widać, całkowany jest iloczyn prawdopodobieństw  $\mathbb{P}[x_S < X_S \leq x_S + dx_S]$  oraz  $\mathbb{P}[X_R \leq x_S]$ . W przypadku większości rozkładów prawdopodobieństwa powyższe całki muszą być obliczane numerycznie.



RYS. 2.2. Graficzna reprezentacja całki (2.2b)

Rozpatrywany problem można również przedstawić definiując tzw. funkcję graniczną

$$g(X_R, X_S) = X_R - X_S. \quad (2.3)$$

Można teraz napisać, że zniszczenie pręta nastąpi gdy  $g \leq 0$ , a więc prawdopodobieństwo zniszczenia jest równe

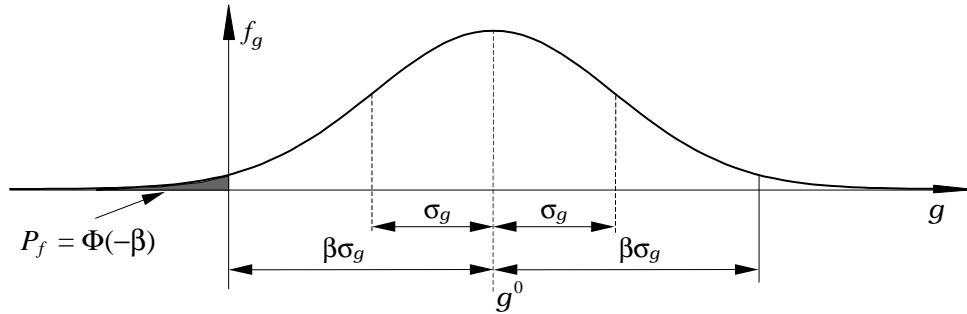
$$P_f = F_g(0), \quad (2.4)$$

gdzie  $F_g(0)$  jest dystrybuantą zmiennej losowej  $g = g(X_R, X_S)$ . Powyższe sformułowanie jest szczególnie wygodne gdy zmienne  $X_R$  i  $X_S$  mają rozkład normalny, odpowiednio  $N(X_R^0, \sigma_{X_R})$  i  $N(X_S^0, \sigma_{X_S})$  (z pomijalnie małym prawdopodobieństwem przyjmowania wartości ujemnych). W takim przypadku również  $g$  ma rozkład normalny (por. dodatek C) o wartości średniej  $g^0 = X_R^0 - X_S^0$  i odchyleniu standardowym  $\sigma_g = (\sigma_{X_R}^2 + \sigma_{X_S}^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Prawdopodobieństwo zniszczenia wyraża się więc następująco:

$$P_f = \Phi\left(-\frac{g^0}{\sigma_g}\right) = \Phi(-\beta), \quad (2.5)$$

gdzie  $\Phi(\cdot)$  jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego, a  $\beta$  oznacza tzw. *wskaźnik niezawodności*. Wielkości występujące w powyższym wzorze przedstawiono na rysunku 2.3. Należy podkreślić, iż znak równości we wzorze (2.5) postawić można jedynie w przypadku zmiennych gaussowskich.



Rys. 2.3. Graficzna interpretacja wzoru (2.5)

W przypadku ogólnym, stan konstrukcji zależy może od wielu parametrów losowych. Reprezentować one mogą losowe własności obciążeń, materiału oraz geometrii konstrukcji. Podstawowe parametry losowe grupowane będą w wektorze kolumnowym  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Słowo ‘podstawowe’ służy tu odróżnieniu od zmiennych losowych charakteryzujących zachowanie konstrukcji, takich jak przemieszczenia czy naprężenia. W niektórych pracach wektor  $\mathbf{X}$  nazywany bywa także wektorem zmiennych bazowych. Uogólniając analizowany przykład pręta można napisać, iż stan konstrukcji w przestrzeni realizacji  $\mathbf{x}$  wektora  $\mathbf{X}$  zdefiniowany jest za pomocą losowej funkcji granicznej  $g(\mathbf{X})$  następująco:

$$g(\mathbf{x}) \leq 0 : \quad \text{obszar awarii } \Omega_f, \quad (2.6a)$$

$$g(\mathbf{x}) = 0 : \quad \text{powierzchnia graniczna}, \quad (2.6b)$$

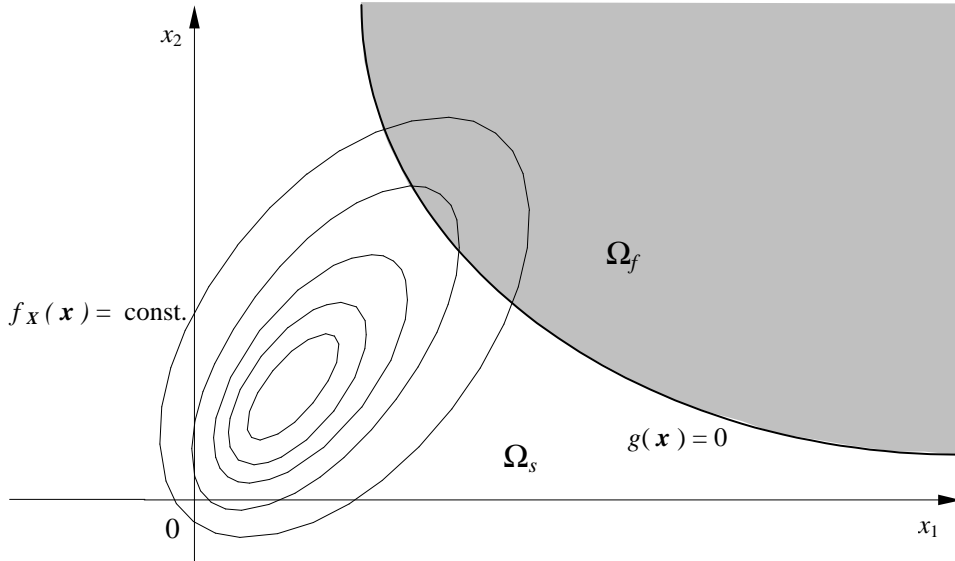
$$g(\mathbf{x}) > 0 : \quad \text{obszar bezpieczny } \Omega_s. \quad (2.6c)$$

Dla dwu zmiennych losowych, obszary te zostały pokazane na rysunku 2.4. Należy zauważyć, że definicja funkcji  $g(\mathbf{X})$  nie jest jednoznaczna. Zarówno  $3g(\mathbf{X})$  jak i  $[g(\mathbf{X})]^3$  mogą być użyte jako alternatywne funkcje graniczne. Ten brak jednoznaczności stwarzał w początkowym okresie rozwoju teorii niezawodności konstrukcji pewne problemy.

Korzystając z wprowadzonej definicji warunku granicznego 2.6, prawdopodobieństwo awarii wyraża się wzorem

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.7)$$

gdzie  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  oznacza łączną gęstość rozkładu prawdopodobieństwa podstawowych parametrów losowych. Znając wartość  $P_f$ , wskaźnik niezawodności



RYS. 2.4. Powierzchnia graniczna  $g(\mathbf{x}) = 0$ , obszar bezpieczny i obszar awarii w przestrzeni zmiennych  $\mathbf{X}$

zdefiniowany może być następująco (zob. [81])

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f), \quad (2.8)$$

gdzie  $\Phi^{-1}(\cdot)$  jest funkcją odwrotną dystrybuanty rozkładu normalnego. Wskaźnik niezawodności stanowi wygodną alternatywę prawdopodobieństwa awarii w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji. Dla większości konstrukcji  $\beta$  przyjmuje wartości pomiędzy 1 a 5 co odpowiada prawdopodobieństwom  $1.6 \cdot 10^{-1}$  i  $2.9 \cdot 10^{-7}$ . Poniżej w tabeli przedstawiono prawdopodobieństwa awarii odpowiadające wybranym wartościom wskaźnika niezawodności. Wartości te przyjmuje się często w literaturze jako graniczne dla określonych klas bezpieczeństwa (zob. np. [24, 90])

$\beta$	3.2	3.7	4.2	4.7	5.2
$P_f = \Phi(-\beta)$	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-7}$

Obliczenie całki we wzorze (2.7) wiąże się z trzema trudnościami. Po pierwsze, gęstość prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  może nie być dobrze znana gdyż dostępne dane statystyczne mogą być niekompletne. Po drugie, sama funkcja graniczna  $g(\mathbf{X})$  może zawierać w sobie pewną niedokładność związaną z przyjętym modelem zachowania się konstrukcji. Po trzecie, nawet gdy  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  oraz  $g(\mathbf{X})$  są dobrze znane, numeryczne całkowanie wyrażenia na  $P_f$  dla dużej liczby zmiennych losowych ( $n > 5$ ) jest bardzo trudne, a najczęściej niewykonalne. Przykłady analizy niezawodności bazujące na obliczaniu całki (2.7) (zob. [130]) dotyczą jedynie prostych przypadków gdy funkcja graniczna dana jest w jawnej postaci i nie nadają się do analizy rzeczywistych konstrukcji. Wpływ wspomnianych wyżej niepewności związanych z przyjętymi parametrami rozkładów zmiennych losowych oraz stosowanym modelem można uwzględnić w oparciu o metodę wnioskowania bayesowskiego [17, 52]. Pozwala ona na uaktualnianie początkowych założeń dotyczących parametrów rozkładów oraz funkcji granicznej na podstawie informacji o pracy konstrukcji uzyskanych

w późniejszym czasie (informacje a posteriori). Umożliwia między innymi otrzymanie momentów statystycznych prawdopodobieństwa zniszczenia oraz wskaźnika niezawodności, które są funkcjami losowymi wspomnianych parametrów. W niniejszej pracy uwzględniane są jedynie losowości tkwiące w fizycznej naturze parametrów opisujących konstrukcje. Nie brano pod uwagę niepewności statystycznych oraz modelowych, zdając sobie sprawę, że otrzymane wyniki powinny być punktem wyjścia do dalszej analizy bayesowskiej.

## 2.2. Wybrane miary niezawodności

### 2.2.1. Wskaźnik niezawodności Cornella

Często w praktycznych problemach analizy niezawodności konstrukcji nieznane są rozkłady podstawowych zmiennych losowych  $\mathbf{X}$ . Zakłada się jedynie znajomość wektora wartości średnich oraz macierzy kowariancji postaci

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ \vdots \\ X_n^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

gdzie  $X_i^0$  jest wartością średnią,  $\sigma_i$  odchyleniem standardowym zmiennej  $X_i$ , zaś  $\rho_{kl}$  jest współczynnikiem korelacji zmiennych  $X_k$  i  $X_l$ . Rozwijając funkcję  $g(\mathbf{X})$  w szereg Taylora wokół wartości średnich oraz zachowując dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcja graniczna przybiera postać

$$g(\mathbf{X}) \approx \bar{g}(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} (X_i - X_i^0). \quad (2.10)$$

Obliczając wartość oczekiwaną oraz wariancję zlinearyzowanej funkcji losowej  $\bar{g}(\mathbf{X})$  dostajemy

$$g^0(\mathbf{X}) \approx \bar{g}^0(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}^0), \quad (2.11)$$

$$\sigma_g^2(\mathbf{X}) \approx \sigma_{\bar{g}}^2(\mathbf{X}) = \nabla g^T(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0}, \quad (2.12)$$

gdzie  $\nabla g(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0}$  jest gradientem funkcji  $g(\mathbf{X})$  obliczonym dla wartości średnich wektora  $\mathbf{X}$ . Z twierdzenia o maksymalnej entropii wynika, że rozkładem, który przy znajomości jedynie dwóch pierwszych momentów maksymalizuje funkcjonal entropii informacyjnej jest rozkład normalny (zob. [31]). Mając zatem do dyspozycji jedynie informacje o momentach statystycznych dane wzorem (2.9) można przyjąć, że zmienne  $\mathbf{X}$  są typu gaussowskiego, a co za tym idzie również funkcja  $\bar{g}(\mathbf{X})$  ma rozkład normalny. Tak więc prawdopodobieństwo awarii dla warunku opartego na zlinearyzowanej funkcji granicznej ma postać

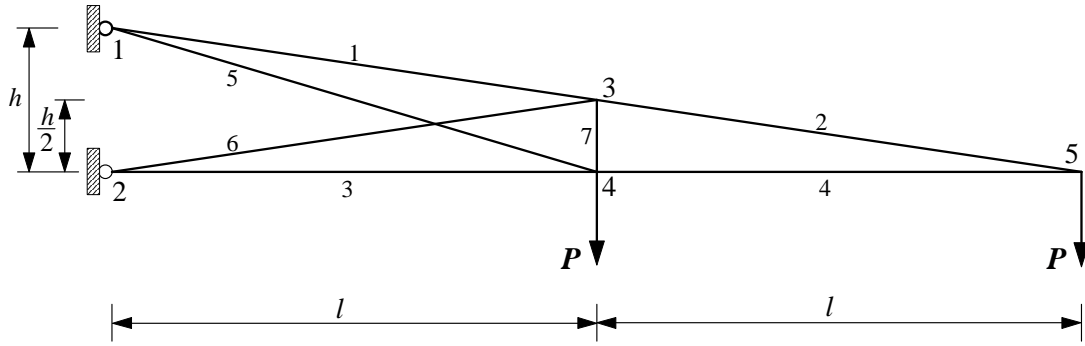
$$\mathbb{P}[g(\mathbf{X}) \leq 0] \approx \mathbb{P}[\bar{g}(\mathbf{X}) \leq 0] = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{g}(\mathbf{X}) - \bar{g}^0(\mathbf{X})}{\sigma_{\bar{g}}(\mathbf{X})} \leq -\frac{\bar{g}^0(\mathbf{X})}{\sigma_{\bar{g}}(\mathbf{X})}\right] = \Phi(-\beta_C), \quad (2.13)$$



gdzie  $\beta_C$  jest wskaźnikiem niezawodności Cornella [13], danym jako

$$\beta_C = \frac{\bar{g}^0(\mathbf{X})}{\sigma_{\bar{g}}(\mathbf{X})}. \quad (2.14)$$

Wskaźnik Cornella oznaczany jest czasem przez  $\beta^{\text{MVFOSM}}$ , gdzie MVFOSM jest skrótem angielskiej nazwy *Mean-Value, First-Order, Second-Moment*, podkreślającej, iż został on utworzony na bazie dwóch pierwszych momentów funkcji  $\bar{g}(\mathbf{X})$  powstałej z aproksymacji funkcji  $g(\mathbf{X})$  szeregiem Taylora pierwszego rzędu, wokół wartości średnich. Niestety, dużą wadą wskaźnika  $\beta_C$  jako miary niezawodności jest jego zależność od sformułowania funkcji granicznej. Zilustrowane to zostanie na przykładzie analizy niezawodności wspornika kratowego przedstawionego na rysunku 2.5.



Rys. 2.5. Wspornik kratowy

### Przykład 2.1

Wspornik składa się z siedmiu prętów połączonych przegubowo. Występujące na rysunku oznaczenia długości wynoszą odpowiednio  $l = 400$  cm i  $h = 120$  cm. Przyjęto geometrycznie nieliniowy model zachowania konstrukcji. Moduł sprężystości materiału wszystkich prętów wynosi  $E = 21000$  kN/cm<sup>2</sup>. Obciążenie stanowią dwie siły skupione  $P = 10$  kN przyłożone do węzłów 4 i 5. Jako podstawowe zmienne losowe opisujące konstrukcję przyjęto pola przekrojów prętów oraz mnożnik obciążenia  $\lambda$ . Wartości oczekiwane, odchylenia standardowe oraz macierz współczynników korelacji  $\rho$  dane są następująco:

$$\begin{array}{l} X_1 - A_1 \\ X_2 - A_2 \\ X_3 - A_3 \\ X_4 - A_4 \\ X_5 - A_5 \\ X_6 - A_6 \\ X_7 - A_7 \\ X_8 - \lambda \end{array} \mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 15.0 \\ 15.0 \\ 15.0 \\ 15.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ 8.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} \rho = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Wartości oczekiwane oraz odchylenia standardowe pól przekrojów prętów podano w  $\text{cm}^2$ . Warunek graniczny zdefiniowano jako warunek nieprzekraczalności dopuszczalnego przemieszczenia pionowego  $q_5^g$  węzła 5. Odpowiadająca mu funkcja graniczna ma postać

$$g(\mathbf{X}) = 1 - \frac{|q_5(\mathbf{X})|}{q_5^g} . \quad (2.15)$$

Wartość  $q_5^g$  przyjęto równą 4 cm. Gradient  $\nabla g(\mathbf{X})$  obliczony za pomocą metody układu sprzężonego, zaimplementowanej w rozwijanym w niniejszej pracy programie PSAP-T-NL, wynosi

$$\nabla g(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0} = \begin{bmatrix} 1.205 \cdot 10^{-2} \\ 9.731 \cdot 10^{-3} \\ 1.183 \cdot 10^{-2} \\ 9.390 \cdot 10^{-3} \\ 3.998 \cdot 10^{-5} \\ -3.159 \cdot 10^{-5} \\ -3.612 \cdot 10^{-6} \\ -6.451 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} ,$$

natomiast wartość funkcji granicznej  $g(\mathbf{X}^0) = 0.355$ . Na podstawie wzorów (2.11)–(2.14) wskaźnik niezawodności Cornella, oraz prawdopodobieństwo zniszczenia wynoszą:

$$\beta_C = 2.496 , \quad P_f = 6.284 \cdot 10^{-3} . \quad (2.16)$$

Obliczmy teraz  $\beta_C$  dla funkcji granicznej  $g_2(\mathbf{X})$  zdefiniowanej jako

$$g_2(\mathbf{X}) = (g(\mathbf{X}))^3 = \left[ 1 - \frac{|q_5(\mathbf{X})|}{q_5^g} \right]^3 . \quad (2.17)$$

Powierzchnia graniczna  $g_2(\mathbf{x}) = 0$  jest taka sama jak powierzchnia  $g(\mathbf{x}) = 0$ , a co za tym idzie identyczne są obszary bezpieczne  $\Omega_s$  oraz awarii  $\Omega_f$  (por. rys. 2.4). Należałoby oczekiwać, że prawdopodobieństwo awarii odpowiadające funkcji (2.17) będzie takie samo jak w przypadku funkcji (2.15). Wykonując ponownie obliczenia dla  $g_2(\mathbf{X})$  dostajemy

$$g(\mathbf{X}^0) = 0.045 , \quad \nabla g(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0} = \begin{bmatrix} 4.547 \cdot 10^{-3} \\ 3.671 \cdot 10^{-3} \\ 4.462 \cdot 10^{-3} \\ 3.542 \cdot 10^{-3} \\ 1.508 \cdot 10^{-5} \\ -1.192 \cdot 10^{-5} \\ -1.362 \cdot 10^{-6} \\ -2.433 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} ,$$

a stąd

$$\beta_C = 0.832 , \quad P_f = 2.027 \cdot 10^{-1} . \quad (2.18)$$

◇

Z powyższego przykładu widać, że wskaźnik niezawodności Cornella może przybierać różne wartości dla równoważnych sformułowań powierzchni granicznej  $g(\mathbf{x}) = 0$ . Jest to

oczywistą konsekwencją linearyzacji funkcji granicznej w punkcie  $\mathbf{X}^0$ , gdzie  $g(\mathbf{X}^0) \neq 0$ . Niejednoznaczności tej unika się przyjmując definicję wskaźnika niezawodności zaproponowaną przez Hasofer'a i Linda (patrz punkt 2.2.3).

### 2.2.2. Wskaźnik niezawodności Cornella a metoda stochastycznych elementów skończonych

Po przedstawieniu metody obliczania wskaźnika niezawodności Cornella, a przed zdefiniowaniem wskaźnika Hasofer'a-Linda warto jest wspomnieć o sposobach obliczania prawdopodobieństwa awarii przy użyciu metody stochastycznych elementów skończonych. Dodatkową motywacją do poruszenia tego tematu jest to, iż program PSAP-T-NL posiada zaimplementowany przez T.D. Hiena moduł metody stochastycznych elementów skończonych (ang. skrót SFEM). Ideę SFEM w ujęciu perturbacyjnym (zob. [65]) zaprezentować można wychodząc od równania metody elementów skończonych dla liniowej statyki

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) \mathbf{q}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}(\mathbf{X}), \quad (2.19)$$

gdzie  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{Q}$  są odpowiednio: macierzą sztywności konstrukcji, wektorem uogólnionych przemieszczeń oraz wektorem obciążeń węzłowych. W równaniu (2.19) zaznaczono zależność wszystkich występujących w nim wyrazów od wektora zmiennych losowych  $\mathbf{X} = \{X_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Należy jednak podkreślić, że  $\mathbf{K}$  oraz  $\mathbf{Q}$  zależą od wektora  $\mathbf{X}$  w sposób jawny, natomiast  $\mathbf{q}$  jako rozwiązanie układu (2.19) jest niejawną funkcją  $\mathbf{X}$ . Rozwijając macierz  $\mathbf{K}$  oraz wektory  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{q}$  w szereg Taylora wokół wartości średnich zmiennych losowych oraz zachowując wyrazy rozwinięcia do drugiego rzędu włącznie i stosując regułę sumacyjną względem powtarzających się indeksów, dostajemy

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}(\mathbf{X}^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \Delta X_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \Delta X_i \Delta X_j, \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}(\mathbf{X}^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \Delta X_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \Delta X_i \Delta X_j, \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{X}) = \mathbf{q}(\mathbf{X}^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \Delta X_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \Delta X_i \Delta X_j, \quad (2.20c)$$

gdzie  $\Delta X_i = X_i - X_i^0$ . Podstawiając powyższe rozwinięcia do (2.19) i grupując wyrazy tych samych rzędów uzyskuje się następujące równania:

- równanie zerowego rzędu: jeden układ równań liniowych na  $\mathbf{q}(\mathbf{X}^0)$

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}^0) \mathbf{q}(\mathbf{X}^0) = \mathbf{Q}(\mathbf{X}^0), \quad (2.21)$$

- równania pierwszego rzędu:  $n$  układów równań liniowych na  $\partial \mathbf{q} / \partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}^0) \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} - \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \mathbf{q}(\mathbf{X}^0), \quad (2.22)$$

- równanie drugiego rzędu: jeden układ równań liniowych na  $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{X}^0)$

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}^0) \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{X}^0) = \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{q} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \mathbf{C}_{ij}^{\mathbf{X}}, \quad (2.23)$$

gdzie  $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{X}^0) \stackrel{\text{def}}{=} [\partial^2 \mathbf{q} / (\partial x_i \partial x_j)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \mathbf{C}_{ij}^{\mathbf{X}}$ , a  $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$  jest macierzą kowariancji zmiennych losowych<sup>1)</sup>. Równanie (2.23) otrzymane zostało przez przemnożenie członów drugiego rzędu przez  $\mathbf{C}_{ij}^{\mathbf{X}}$  i zsumowanie. Umożliwia to uzyskanie jednego układu równań na  $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{X}^0)$  zamiast  $n(n+1)/2$  układów równań na  $\partial^2 \mathbf{q} / (\partial x_i \partial x_j)$  (uwzględniając symetrię macierzy drugich pochodnych). Wykonując następnie operację wartości średniej i kowariancji na wyrazach wektora uogólnionych przemieszczeń  $\mathbf{q}$  dostajemy ostatecznie przybliżenie drugiego rzędu wektora wartości średnich

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}(\mathbf{X}^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \mathbf{C}_{ij}^{\mathbf{X}} = \mathbf{q}(\mathbf{X}^0) + \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{X}^0) \quad (2.24)$$

oraz przybliżenie pierwszego rzędu macierzy kowariancji

$$\text{Cov}(q_i, q_j) = \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \frac{\partial q_j}{\partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^0} \mathbf{C}_{kl}^{\mathbf{X}}. \quad (2.25)$$

Podsumowując można powiedzieć, że wynikiem działania programu SFEM w ujęciu perturbacyjnym są wartości oczekiwane oraz macierz kowariancji uogólnionych przemieszczeń, a co za tym idzie odkształceń i naprężeń w elementach.

Nasuwa się pytanie, jak wykorzystać te wyniki w obliczeniach niezawodnościowych? Bardzo często funkcja graniczna, zapisywana umownie jako funkcja podstawowych zmiennych losowych  $g(\mathbf{X})$ , nie jest jawną funkcją żadnej zmiennej  $X_i$  i można ją zapisać w postaci  $g(\mathbf{q}(\mathbf{X})) = \mathbf{g}(\mathbf{q})$ . Można wtedy, dysponując wynikami z programu SFEM przenieść zadanie obliczenia prawdopodobieństwa zniszczenia z  $n$ -wymiarowej przestrzeni  $\mathcal{X}$  do  $m$ -wymiarowej przestrzeni  $\mathbf{q}$ , gdzie  $m$  jest wymiarem wektora  $\mathbf{q}$ . Postępując dalej analogicznie jak w przypadku wskaźnika niezawodności Cornella (por. (2.10)–(2.14)) dostajemy

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \approx \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}^0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0} (q_i - q_i^0), \quad (2.26)$$

$$\mathbf{g}^0(\mathbf{q}) \approx \bar{\mathbf{g}}^0(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}^0), \quad (2.27)$$

$$\sigma_{\bar{\mathbf{g}}}^2(\mathbf{q}) \approx \sigma_{\bar{\mathbf{g}}}^2(\mathbf{q}) = \nabla \mathbf{g}^T(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0} \mathbf{C}_{\mathbf{q}} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0}, \quad (2.28)$$

gdzie  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0}$  jest gradientem funkcji  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , a  $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$  macierzą kowariancji (2.25) o wymiarach  $m \times m$ . Ostatecznie, wskaźnik niezawodności oraz prawdopodobieństwo zniszczenia będą miały postać

$$\beta_C^{\text{SFEM}} = \frac{\bar{\mathbf{g}}^0(\mathbf{q})}{\sigma_{\bar{\mathbf{g}}}(\mathbf{q})}, \quad P_f = \Phi(-\beta_C^{\text{SFEM}}). \quad (2.29)$$

<sup>1)</sup>Symbol  $\mathbf{X}$ , w odróżnieniu od (2.9), umieszczony jest u góry dla wygody zapisu.

Skrót SFEM w powyższym oznaczeniu służy podkreśleniu, że  $\beta_C^{\text{SFEM}}$  jest ‘mutacją’ wskaźnika Cornella uzyskaną przy pomocy metody stochastycznych elementów skończonych. Tak zdefiniowana miara niezawodności wymaga jednak krytycznej oceny:

- metoda perturbacji drugiego rzędu zastosowana do otrzymania wyrażen na wielkości średnie oraz macierz kowariancji wektora uogólnionych przemieszczeń jest wystarczającym przybliżeniem jedynie w przypadku małych współczynników zmienności zmiennych losowych  $\mathbf{X}$  (przyjmuje się, że  $\max \nu < 20\%$ ).
- wskaźnik (2.29)<sub>1</sub> posiada wszystkie wady wskaźnika niezawodności Cornella: nieinwariantość w przypadku równoważnych sformułowań powierzchni granicznej, nie uwzględnianie informacji o typach rozkładów zmiennych losowych (zakładanie normalności zmiennych  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{q}$  oraz  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ ).
- ciągle jeszcze nie ma zbyt wielu komercyjnych pakietów SFEM. Zakładając, że mamy taki program do dyspozycji i nie mamy dostępu do jego wersji źródłowej trudno wyobrazić sobie sytuację, iż program ten nie dostarcza informacji na temat pochodnych  $\partial \mathbf{q}(\mathbf{X})/\partial x_i$  umożliwiając policzenie wskaźnika Cornella bezpośrednio ze wzoru (2.14). Udogodnienie wynikające z łatwego policzenia występującego we wzorze (2.28) gradientu  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0}$  ( $\mathbf{g}$  jest jawną funkcją  $\mathbf{q}$ ) jest w rzeczywistości mało istotne.

Z innych pomysłów na wykorzystanie SFEM w analizie niezawodności konstrukcji warto wspomnieć zaprezentowaną w pracy [91] tzw. metodę W-SOTM (Weibull-Second-Order and Three-Moment method). Zakłada się w niej znajomość trzech momentów statystycznych zmiennych losowych (wartości średnich, wariancji oraz skośności) oraz podobnie jak w SFEM rozwija się funkcję graniczną wokół wartości średnich w szereg Taylora do drugiego rzędu włącznie. Po obliczeniu wektora przemieszczeń oraz wrażliwości przemieszczeń pierwszego i drugiego rzędu otrzymuje się wartość średnią, wariancję oraz skośność odstepu bezpieczeństwa  $Y = g(\mathbf{X})$ . Przyjmując, że  $Y$  ma rozkład Weibulla (por. dodatek C) prawdopodobieństwo zniszczenia obliczane jest z dystrybuanty (C.24) tego rozkładu jako  $P_f = F_Y(0)$ . Możliwość lepszej reprezentacji zmiennych losowych o różnych rozkładach prawdopodobieństwa dostaje się jednak kosztem dokładniejszej informacji statystycznej oraz konieczności obliczania wrażliwości drugiego rzędu.

### 2.2.3. Wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda

Wskaźnik niezawodności (2.5) oraz wskaźnik Cornella (2.14) w przypadku zmiennych niezależnych (macierz  $\mathbf{C}_X$  diagonalna) mają prostą interpretację geometryczną. Wracając do przedstawionego w punkcie 2.1 przykładu pręta rozciąganego i wprowadzając nowe zmienne standaryzowane  $U_R$  oraz  $U_S$ , zdefiniowane jako

$$U_R = \frac{X_R - X_R^0}{\sigma_{X_R}}, \quad U_S = \frac{X_S - X_S^0}{\sigma_{X_S}}, \quad (2.30)$$

powierzchnia graniczna (2.3) przybiera postać

$$G(U_R, U_S) = U_R \sigma_{X_R} - U_S \sigma_{X_S} + (X_R^0 - X_S^0), \quad (2.31)$$

a powierzchnia graniczna  $G(u_R, u_S) = 0$  dana jest równaniem

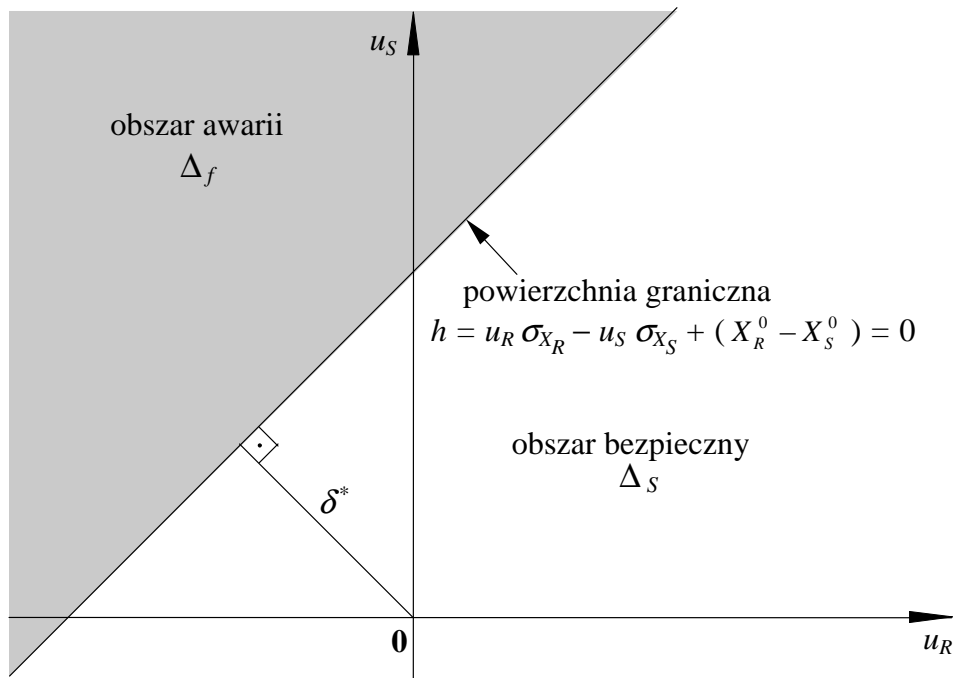
$$u_R \sigma_{X_R} - u_S \sigma_{X_S} + (X_R^0 - X_S^0) = 0. \quad (2.32)$$

Odległość powierzchni granicznej (w rozpatrywanym przykładzie, prostej granicznej) od początku układu  $[u_R, u_S]$  wynosi (zob. rys. 2.6)

$$\delta^* = \frac{|X_R^0 - X_S^0|}{\sqrt{\sigma_{X_R}^2 + \sigma_{X_S}^2}}, \quad (2.33)$$

a więc dla  $X_R^0 \geq X_S^0$  jest ona równa wskaźnikowi niezawodności danemu w równaniu (2.5). W przypadku zlinearyzowanej funkcji granicznej (2.10) odległość  $\delta^*$  powierzchni  $\bar{g}(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = 0$  od początku układu współrzędnych w przestrzeni zmiennych standaryzowanych  $\mathbf{U}$  (gaussowskiej przestrzeni standardowej) wynosi (por. (2.14))

$$\delta^* = \frac{|g(\mathbf{X}^0)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0} \right)^2 \sigma_{X_i}^2}}. \quad (2.34)$$



RYS. 2.6. Interpretacja geometryczna wskaźnika niezawodności (2.5)

Zatem w szczególnym przypadku liniowej funkcji granicznej, wartość bezwzględna wskaźnika niezawodności, zdefiniowanego jako  $g^0/\sigma_g$ , równa jest odległości powierzchni granicznej od początku układu współrzędnych w przestrzeni  $\mathbf{U}$ . Tak więc dla liniowej funkcji granicznej danej równaniem

$$l(\mathbf{U}) = \mathbf{a}^T \mathbf{U} + a_0 \quad (2.35)$$

odległość od początku układu oraz wskaźnik  $\beta$  mają postać

$$\delta^* = \frac{|a_0|}{\sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}}, \quad \beta = \text{sign}[l(\mathbf{0})] \delta^*. \quad (2.36)$$

Z powyższej definicji wynika, że  $\beta > 0$  wtedy gdy  $g(\mathbf{X}^0) > 0$ .

Zaprezentowana analogia geometryczna wykorzystana została w definicji wskaźnika niezawodności Hasofera i Linda [53]. Pokazali oni, że problem braku niezmienniczości, charakterystyczny dla wskaźnika Cornella, może być rozwiązany przez rozwinięcie funkcji  $g(\mathbf{X})$  w szereg Taylora wokół punktu leżącego na powierzchni granicznej. Ponieważ alternatywnym sformułowaniem funkcji granicznych odpowiada ta sama powierzchnia graniczna, to linearyzacja pozostaje niezmiennicza w stosunku do równoważnych sformułowań. Jako punkt linearyzacji wybrano punkt leżący najbliżej początku układu współrzędnych w gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathbf{U}$ . W przypadku znajomości jedynie wektora wartości średnich oraz macierzy kowariancji (2.9) transformacja z przestrzeni  $\mathbf{X}$  do  $\mathbf{U}$  ma postać (por. [28])

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0), \quad (2.37)$$

gdzie  $\mathbf{D} = [\sigma_{X_i}]$  jest macierzą diagonalną z odchyleniami standardowymi zmiennych losowych na przekątnej, a  $\mathbf{L}$  jest macierzą trójkątną dolną otrzymaną z dekompozycji Cholesky'ego (zob. [41]) macierzy współczynników korelacji  $\boldsymbol{\rho} = \rho_{ij}$  taką, że  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$ . Punkt linearyzacji nazywany jest *punktem projektowym* (ang. design point) i oznaczany jest jako  $\mathbf{u}^*$ , a w przestrzeni  $\mathbf{X}$  jako  $\mathbf{x}^*$ . Ze względu na osiową symetrię przestrzeni  $\mathbf{U}$  jest to punkt, któremu odpowiada największa wartość funkcji gęstości prawdopodobieństwa spośród punktów leżących w obszarze awarii (zob. rys. 2.7), co tłumaczy wybór właśnie tego punktu do linearyzacji. Definiuje się go następująco:

$$\|\mathbf{u}^*\| = \min_{G(\mathbf{u})=0} \|\mathbf{u}\| = \delta^*, \quad (2.38)$$

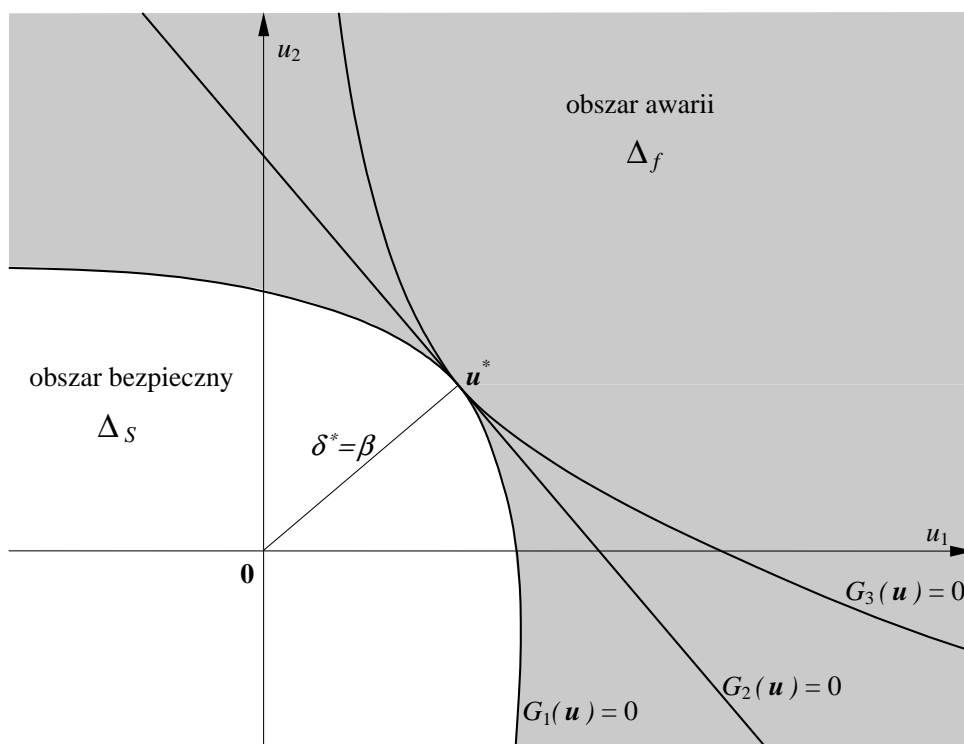
gdzie  $G(\mathbf{U}) = g(\mathbf{X}^0 + \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{U})$  jest przetransformowaną do przestrzeni  $\mathbf{U}$  funkcją graniczną, a  $\|\cdot\|$  normą euklidesową. Korzystając z powyższej definicji oraz przedstawionej wcześniej analogii geometrycznej wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda dany jest jako

$$\beta = \text{sign}[G(\mathbf{0})] \delta^*. \quad (2.39)$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia stowarzyszone ze wskaźnikiem (2.39) wynosi

$$P_f = \Phi(-\beta). \quad (2.40)$$

Wskaźnik Hasofera-Linda oznaczany jest czasami w literaturze przez  $\beta^{\text{FOSM}}$ , gdzie FOSM jest skrótem angielskiej nazwy *First-Order, Second-Moment*. Znalezienie punktu projektowego  $\mathbf{u}^*$  jest zadaniem programowania nieliniowego z ograniczeniami. W wykorzystywanym w pracy pakiecie analizy niezawodności COMREL [12] do lokalizacji punktu projektowego używany jest, omówiony w dodatku A.2, algorytm Abdo-Rackwitza-Fiesslera [1].



RYS. 2.7.  $\beta$  - wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda,  $u^*$  - punkt projektowy

Z definicji wskaźnika Hasofera-Linda jako odległości od powierzchni granicznej wynika podstawowa jego wada, a mianowicie to, że większa wartość  $\beta$  nie musi oznaczać wcale mniejszego prawdopodobieństwa awarii. Jak widać na rysunku 2.7, funkcjom granicznym  $G_1$ ,  $G_2$  i  $G_3$  odpowiada ten sam wskaźnik niezawodności pomimo wyraźnie różnego kształtu odpowiadających im obszarów awarii. Jednak dokładność wyników otrzymywanych przy użyciu wskaźnika Hasofera-Linda jest często wystarczająca dla potrzeb praktycznych i dlatego zyskał on dużą popularność jako miara niezawodności, szczególnie w połączeniu z metodami transformacji wykorzystującymi pełną informację o rozkładach zmiennych podstawowych  $\mathbf{X}$ .

### Przykład 2.2

Dla danych z przykładu 2.1 na stronie 21 i funkcji granicznej (2.15) obliczono wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda oraz odpowiadające mu prawdopodobieństwo zniszczenia. Wynoszą one odpowiednio

$$\beta = 2.237, \quad P_f = 1.266 \cdot 10^{-2}. \quad (2.41)$$



Współrzędne punktu projektowego w przestrzeni  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{X}$  wynoszą

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} -1.2070 \\ -0.3768 \\ -0.2597 \\ -0.1570 \\ -0.0003 \\ 0.0003 \\ 0.0001 \\ 1.8197 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 13.1894 \\ 13.2124 \\ 13.1914 \\ 13.2159 \\ 9.9997 \\ 10.0000 \\ 8.0001 \\ 1.3639 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z intuicją, awaria w postaci przekroczenia dopuszczalnego przemieszczenia węzła 5 (por. rys. 2.5) wystąpiła w przypadku realizacji wartości mnożnika obciążenia (zmienna losowa  $X_8$ ) większej od jego wartości średniej oraz realizacji wartości pól przekrojów prętów 1–4 (zmiennne losowe  $X_1$ – $X_4$ ) mniejszych od swoich wartości średnich.  $\diamond$

### 2.3. Metody wykorzystujące informacje o rozkładach prawdopodobieństwa

Przedstawione dotąd metody analizy niezawodności konstrukcji nie wykorzystywały wiedzy na temat typów rozkładów prawdopodobieństwa podstawowych zmiennych losowych. Zakładano znajomość jedynie wartości średnich oraz macierzy kowariancji, co zgodnie z twierdzeniem o maksymalnej entropii implikowało traktowanie zmiennych jako normalne. Często jednak dostępne są dodatkowe informacje statystyczne pozwalające dokładniej opisać rozkłady prawdopodobieństwa. Poza tym, typy rozkładów niektórych parametrów losowych odbiegają znacznie od rozkładu gaussowskiego i przyjęcie założenia o ich normalności prowadzić może do grubych błędów w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji. Bardzo często wyraźnie niegaussowski charakter mają obciążenia atmosferyczne. Obciążenia takie jak wiatr, śnieg, prądy i fale morskie oddziałują na konstrukcję ze zmienną w czasie intensywnością i powinny być traktowane jako procesy losowe [3, 90]. Można jednak czasem traktować je jako zmienne losowe o rozkładach prawdopodobieństwa odpowiadających rozkładowi maksimów tych obciążeń w danym (długim) przedziale czasu. Przykładami takich rozkładów są omówione w dodatku C rozkłady Gumbela i Frecheta.

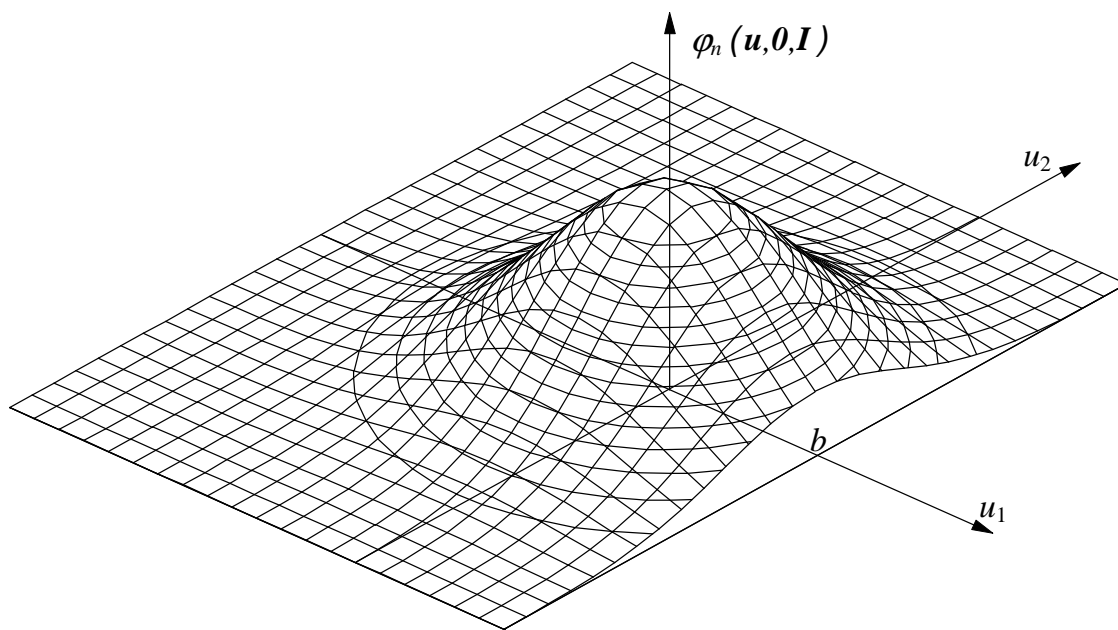
Z metod wykorzystujących pełny opis probabilistyczny zmiennych losowych (ang. full-distribution reliability methods) omówione zostaną metody FORM i SORM oraz wybrane metody symulacyjne. Przedstawione zostaną charakterystyczne własności gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathcal{U}$  oraz zaprezentowana będzie, kluczowa dla wspomnianych metod, transformacja z przestrzeni  $\mathcal{X}$  do  $\mathcal{U}$ .

#### 2.3.1. Własności gaussowskiej przestrzeni standardowej $\mathcal{U}$

Gaussowska przestrzeń standardowa zdefiniowana jest jako zbiór realizacji niezależnych, standaryzowanych zmiennych normalnych  $\mathbf{U}$  o zerowych wartościach średnich oraz jed-

nostkowej macierzy korelacji  $\mathbf{I}$ , z łączną gęstością rozkładu prawdopodobieństwa postaci

$$\varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) = \prod_{i=1}^n \varphi(u_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}u_i^2\right] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{u}\right]. \quad (2.42)$$



Rys. 2.8. Łączna gęstość prawdopodobieństwa standardowego rozkładu normalnego

Przestrzeń ta ma szereg istotnych własności:

1. Osiowa symetria - warstwicę funkcji (2.42) tworzą współśrodkowe hipersfery (dla dwu zmiennych, okręgi) wokół początku układu współrzędnych.
2. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa maleje wykładniczo z kwadratem odległości od początku układu.
3. Dla zadanego  $u_i = b$ , warunkowa gęstość rozkładu prawdopodobieństwa pozostałych zmiennych jest również gęstością standardowego rozkładu normalnego. Oznacza to, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa w hiperpłaszczyźnie wyznaczonej przez  $u_i = b$  maleje wykładniczo wraz z kwadratem odległości od osi  $u_i$  (zob. rys. 2.8). Z własności osiowej symetrii wynika, że dla dowolnej hiperpłaszczyzny funkcja gęstości maleje wykładniczo wraz z kwadratem odległości od punktu będącego rzutem początku układu współrzędnych na tę hiperpłaszczyznę.
4. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że realizacja  $\mathbf{u}$  wektora  $\mathbf{U}$  należy do podprzestrzeni  $u_i \geq b$  wydzielonej przez hiperpłaszczyznę  $u_i = b$  wynosi  $\Phi(-b)$ , gdzie  $\Phi(\cdot)$  jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Podobnie jak w punkcie 3, z własności symetrii osiowej wynika, iż w przypadku podprzestrzeni wydzielonej przez dowolną hiperpłaszczyznę (niekoniecznie prostopadłą do jednej

z osi), prawdopodobieństwo, że realizacja  $\mathbf{u}$  należy do podprzestrzeni nie zawierającej  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  wynosi  $\Phi(-b)$ , gdzie  $b$  jest odległością hiperpłaszczyzny od początku układu współrzędnych.

### 2.3.2. Transformacja do przestrzeni $\mathcal{U}$

Transformacja podstawowych zmiennych losowych do gaussowskiej przestrzeni standardowej,  $\mathbf{U} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$ , musi zapewniać równoważność sformułowania problemu niezawodności. Prawdopodobieństwo zniszczenia zdefiniowane w przestrzeni  $\mathcal{X}$  musi być równe prawdopodobieństwu zdefiniowanemu w przestrzeni  $\mathcal{U}$

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Delta_f} \prod_{i=1}^n \varphi(u_i) \, du_1 du_2 \dots du_n, \quad (2.43)$$

gdzie  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  jest łączną gęstością prawdopodobieństwa zmiennych podstawowych,  $\Omega_f$  jest obszarem awarii w przestrzeni  $\mathcal{X}$ , a  $\Delta_f$  jest obszarem awarii w przestrzeni  $\mathcal{U}$ . Transformację tych obszarów można zapisać symbolicznie jako

$$\Omega_f = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\} \longrightarrow \Delta_f = \{\mathbf{u} : G(\mathbf{u}) \leq 0\}. \quad (2.44)$$

Powierzchnia graniczna transformuje się następująco:

$$g(\mathbf{x}) = 0 \longrightarrow g[\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u})] = G(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.45)$$

Jeśli zmienne  $\mathbf{X}$  mają rozkład normalny (lecz nie standardowy), przedstawiona przy okazji omawiania wskaźnika Hasofera-Linda transformacja liniowa (2.37) spełnia warunek (2.43). W przypadku zmiennych niegaussowskich transformacja  $\mathbf{U} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$  ma charakter nieliniowy. I tak, dla niegaussowskich zmiennych niezależnych ma ona postać

$$u_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.46)$$

gdzie  $\Phi^{-1}$  jest funkcją odwrotną do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, a  $F_{X_i}$  jest dystrybuantą rozkładu zmiennej  $X_i$ .

Dla ogólnego przypadku niegaussowskich, zależnych zmiennych losowych Hohenbichler i Rackwitz [55] zaproponowali użycie tzw. transformacji Rosenblatta [101] postaci

$$\Phi(u_1) = H_1(x_1) = F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_1(t) \, dt, \quad (2.47a)$$

$$\Phi(u_2) = H_2(x_2|x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} \frac{f_2(x_1, t)}{f_1(x_1)} \, dt, \quad (2.47b)$$

⋮

$$\Phi(u_i) = H_i(x_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t)}{f_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})} \, dt, \quad (2.47c)$$

dla  $i = 1, \dots, n$ ,

gdzie  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_i)$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa rozkładu brzegowego

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{i+1} dx_{i+2} \cdots dx_n. \quad (2.48)$$

Transformacja (2.47) jest wygodna w użyciu jeżeli znane są rozkłady warunkowe  $H_i$  lub jeśli znana jest łączna gęstość rozkładu zmiennych  $\mathbf{X}$ . Łatwo sprawdzić, że dla zmiennych niezależnych transformacja Rosenblatta redukuje się do (2.46). Należy jednak zauważyć, że przedstawiona transformacja nie jest jednoznaczna i może zależeć od uporządkowania zmiennych w wektorze  $\mathbf{X}$ . Tak jak to zostało pokazane w pracy [55], konsekwencją tej niejednoznaczności mogą być różne postacie powierzchni granicznej  $G(\mathbf{u}) = 0$ , a co za tym idzie różne lokalizacje punktu projektowego i w konsekwencji różne wartości prawdopodobieństwa awarii. W takiej sytuacji powinno się przeanalizować wszystkie  $n!$  ustawienia wektora  $\mathbf{X}$  i wybrać ten punkt projektowy, który leży najbliżej początku układu. Dla dużych  $n$  jest to zadanie bardzo czasochłonne obliczeniowo, jeśli w ogóle wykonalne.

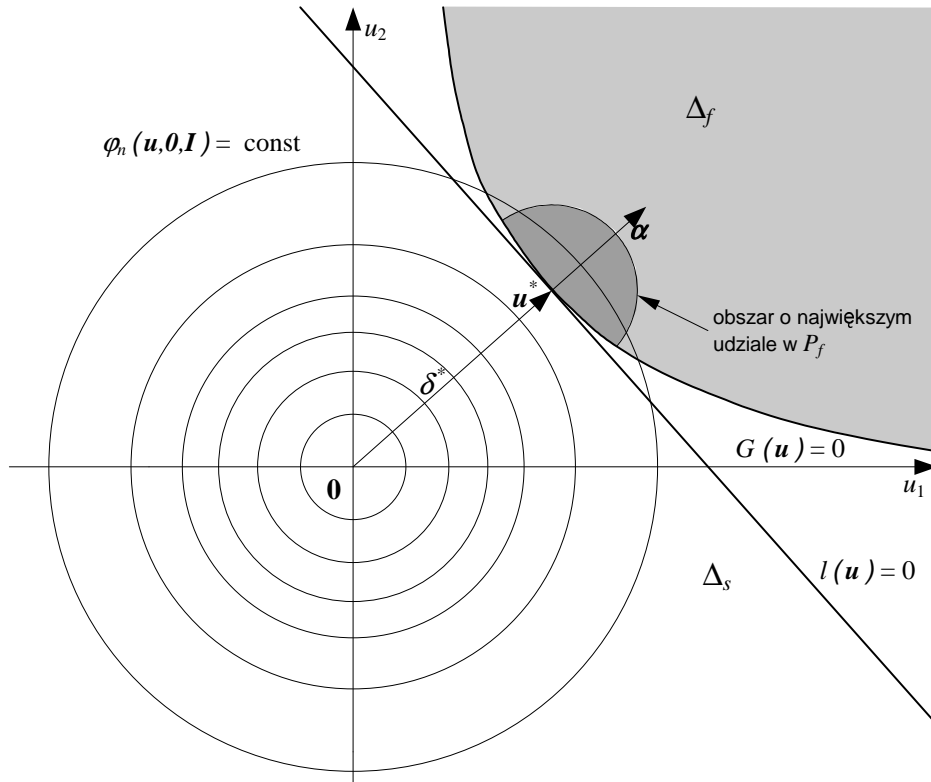
### 2.3.3. Metoda analizy niezawodności pierwszego rzędu (FORM)

W gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathbf{u}$  całka opisująca prawdopodobieństwo zniszczenia ma postać

$$P_f = \int_{\Delta_f} \varphi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (2.49)$$

gdzie  $\varphi_n(\mathbf{u})$  oznacza łączną gęstość standardowego, normalnego rozkładu prawdopodobieństwa (2.42). Jak to już wspomniano przy okazji definiowania wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda (por. 2.2.3), punktowii leżącemu najbliżej początku układu współrzędnych spośród punktów tworzących obszar awarii odpowiada największa wartość funkcji (2.42). Wynika z tego, że realizacje zmiennych losowych odpowiadające punktowii projektowemu  $\mathbf{x}^* = T^{-1}(\mathbf{u}^*)$  opisują najbardziej prawdopodobną realizację układu konstrukcyjnego, która prowadzi do awarii. Ponadto z uwagi na własności 2 i 3 przestrzeni  $\mathbf{u}$  (por. punkt 2.3.2), funkcja gęstości prawdopodobieństwa maleje wykładniczo z kwadratem odległości w kierunku promieniowym od punktu projektowego, jak również w płaszczyźnie stycznej do powierzchni granicznej w punkcie projektowym. Stąd też, największy wpływ na wartość prawdopodobieństwa awarii wyrażoną wzorem (2.49) ma obszar znajdujący się w sąsiedztwie punktu projektowego, wyróżniony na rysunku 2.9 ciemniejszym kolorem. Zakłada się, że powierzchnia graniczna nie jest silnie nieliniowa i nie posiada innych punktów projektowych (minimów lokalnych zadania (2.38)) znajdujących się w mniej więcej w takiej samej odległości co  $\mathbf{u}^*$  (zob. [18, 112] oraz dodatek A.2.2 – metody postępowania w przypadku wielu punktów projektowych). Powyższe spostrzeżenia przemawiają za tym, że dobre przybliżenie prawdopodobieństwa zniszczenia można uzyskać zastępując powierzchnię graniczną inną powierzchnią, która dobrze aproksymuje powierzchnię oryginalną w sąsiedztwie punktu projektowego.

W metodzie analizy niezawodności pierwszego rzędu (oznaczanej jako FORM od angielskiej nazwy *First Order Reliability Method*) powierzchnia graniczna  $G(\mathbf{u}) = 0$  zastąpiona



Rys. 2.9. Przybliżenie pierwszego rzędu

jest hiperpłaszczyzną styczną do  $G(\mathbf{U})$  w punkcie projektowym (zob. rys. 2.9). Równanie hiperpłaszczyzny ma postać

$$l(\mathbf{U}) = -\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{U} + \beta, \quad (2.50)$$

gdzie  $\boldsymbol{\alpha}$  jest wektorem jednostkowym o kierunku przeciwnym do gradientu funkcji  $G(\mathbf{U})$  w punkcie  $\mathbf{u}^*$ , danym jako

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\nabla G(\mathbf{U})}{\|\nabla G(\mathbf{U})\|} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*}, \quad (2.51)$$

a  $\beta$  jest wskaźnikiem niezawodności Hasofera-Linda, związanym z odległością od początku układu współrzędnych  $\delta^*$  poprzez równanie (por. (2.36) i (2.39))

$$\beta = \text{sign}[G(\mathbf{0})] \|\mathbf{u}^*\|. \quad (2.52)$$

Wykorzystując równanie hiperpłaszczyzny (2.50), wskaźnik niezawodności  $\beta$  można wyrazić za pomocą wektora  $\boldsymbol{\alpha}$  jako

$$\beta = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{u}^*. \quad (2.53)$$

Powyższy wzór podkreśla fakt, iż prosta normalna do powierzchni granicznej w punkcie projektowym przechodzi przez początek układu. W odróżnieniu od wskaźnika niezawodności zdefiniowanego w punkcie 2.2.3, wskaźnik (2.53) uwzględnia informację o rozkładach prawdopodobieństwa zmiennych losowych przez wykorzystanie opisaną wcześniej

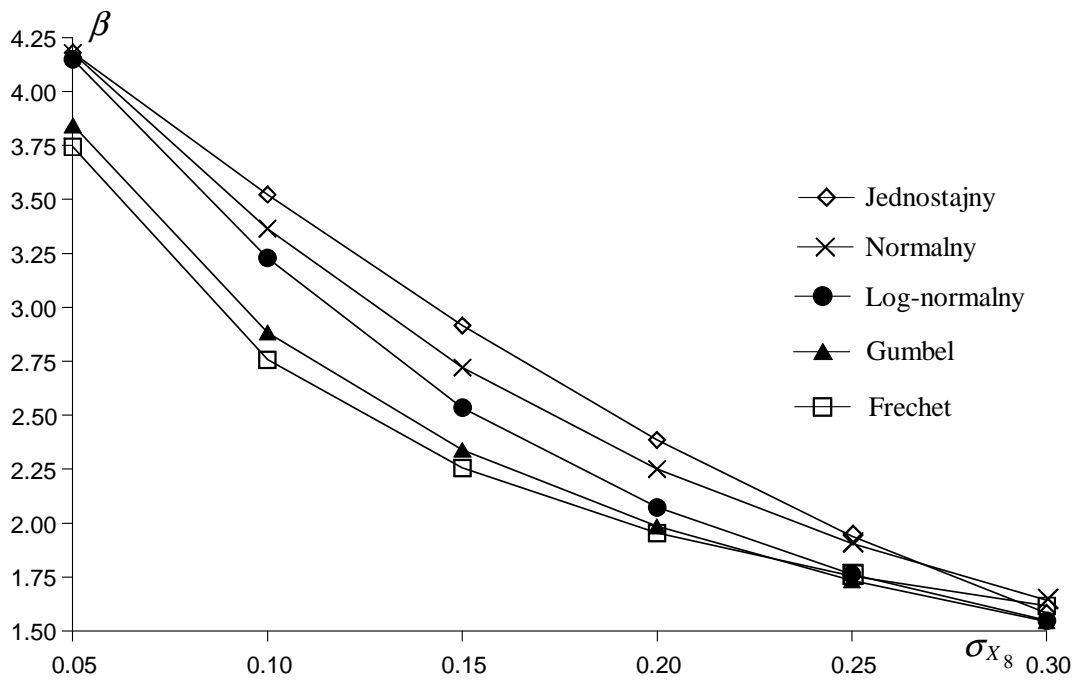
transformacji (2.47). Na podstawie własności 4 gaussowskiej przestrzeni standardowej przybliżenie pierwszego rzędu prawdopodobieństwa awarii ma postać

$$P_{f1} = \Phi(-\beta) . \quad (2.54)$$

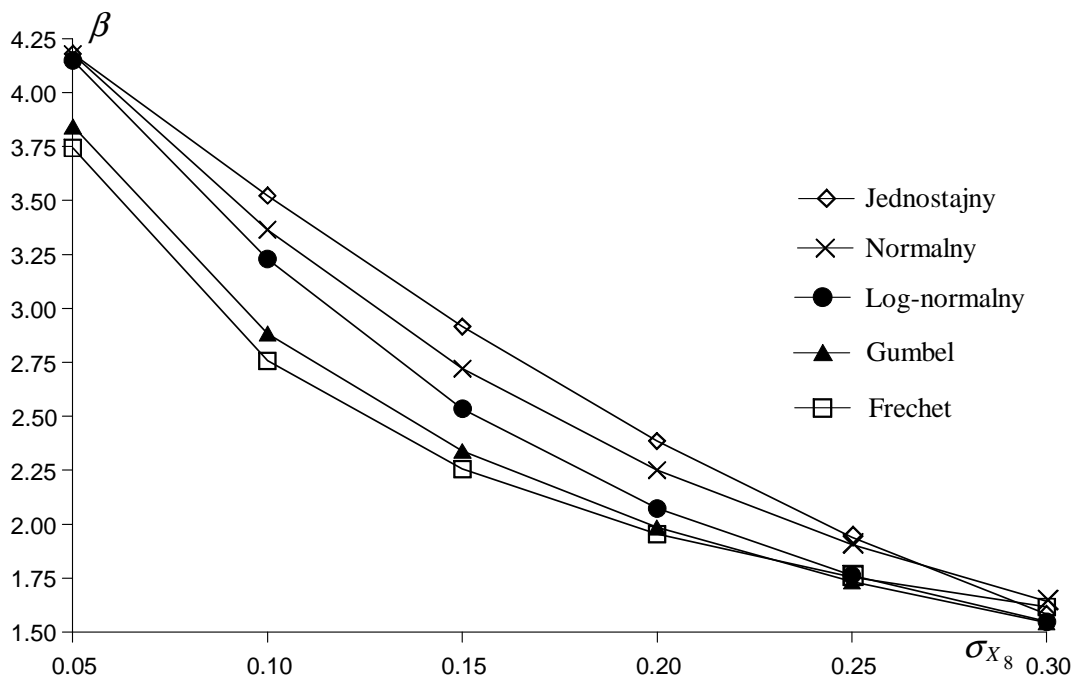
Występujący we wzorze (2.54) wskaźnik niezawodności może być interpretowany jako przybliżenie pierwszego rzędu ścisłej wartości  $\beta$  danej wzorem (2.8). Przybliżenie to jest tym lepsze im bardziej równanie powierzchni  $G(\mathbf{u}) = 0$  zbliżone jest do równania hiperpłaszczyzny (im mniejszy jest wpływ członów nieliniowych). Nieliniowości mogą wynikać z samej postaci funkcji granicznej w przestrzeni oryginalnej jak również z transformacji do przestrzeni  $\mathbf{u}$ . Zazwyczaj dobrym oszacowaniem błędu popełnianego przy stosowaniu metody FORM jest porównanie wyników z metodą aproksymacji drugiego rzędu SORM, omówionej w punkcie 2.3.4. Jednak wieloletnie doświadczenia w stosowaniu metody FORM potwierdziły, iż uzyskiwana przy jej pomocy aproksymacja prawdopodobieństwa awarii jest wystarczająca z punktu widzenia analizy niezawodności szerokiej klasy konstrukcji inżynierskich.

### Przykład 2.3

Kontynuując przykład analizy niezawodności wspornika kratowego, opis stochastyczny konstrukcji z przykładu 2.1 (wektor wartości średnich i macierz kowariancji) uzupełniony został o informację o typach rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych. Przyjęto, że pola przekrojów prętów (zmiennie  $X_1$ – $X_7$ ) mają rozkład logarytmiczno-normalny, natomiast mnożnik obciążenia ( $X_8$ ) modelowano kolejno jako zmienną losową o rozkładzie: jednostajnym, normalnym, logarytmiczno-normalnym, Gumbela oraz Frecheta. Na rysunkach 2.10 i 2.11 przedstawiono porównanie wartości wskaźników  $\beta$  oraz odpowiadających im prawdopodobieństw zniszczenia dla różnych wartości odchylenia standardowego mnożnika obciążenia. Obliczenia wykonano przy pomocy programu analizy niezawodności COMREL [12] będącego częścią rozwijanego w ramach pracy pakietu OPTIREL. Z przedstawionych wykresów widać, iż wrażliwość otrzymywanych wyników na przyjęty typ rozkładu prawdopodobieństwa zmienia się znacznie w zależności od wielkości odchylenia standardowego. Widać też, jak istotnym zagadnieniem w analizie niezawodności jest przyjęcie prawidłowego opisu stochastycznego. Niekompletne dane statystyczne oraz niewłaściwie przyjęte założenia dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa mogą prowadzić do poważnych różnic w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji. Jeśli w rzeczywistości obciążenie ma rozkład Gumbela, to przyjęcie założenia o normalności mnożnika obciążenia (tak jak się to de facto robi w metodach bazujących na znajomości jedynie dwóch pierwszych momentów) prowadzi, dla  $\sigma_{X_8} = 0.2$ , do uzyskania prawie dwukrotnie mniejszej wartości prawdopodobieństwa awarii.  $\diamond$



RYS. 2.10. Wskaźnik niezawodności dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa oraz wartości odchylenia standardowego mnożnika obciążenia



RYS. 2.11. Prawdopodobieństwo awarii dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa oraz wartości odchylenia standardowego mnożnika obciążenia



**2.3.3.1. Wrażliwość wskaźnika niezawodności w metodzie FORM** Bardzo dużą zaletą metody FORM jest to, iż umożliwia ona obliczenie wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmianę dowolnych występujących w opisie zadania parametrów praktycznie bez potrzeby dodatkowych obliczeń. Znajomość (oraz łatwość uzyskania) wrażliwości wskaźnika  $\beta$  ma kluczowe znaczenie w optymalizacji niezawodnościowej. Może też być przydatna w lepszym zrozumieniu pracy konstrukcji, jak również stanowić cenną informację w interaktywnych systemach optymalizacyjnych.

Wrażliwość wskaźnika niezawodności na współrzędne punktu projektowego  $\mathbf{u}^*$  dostępna jest bezpośrednio ze wzoru (2.53) i ma postać

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.55)$$

Jak widać, wektor  $\boldsymbol{\alpha}$  (por. (2.51)) może być traktowany jako względna miara znaczenia zmiennych standaryzowanych. Większa wartość  $\alpha_i$  oznacza większą wrażliwość  $\beta$  lub  $P_{f1}$  na zmienną  $U_i$ . Wrażliwość wskaźnika niezawodności na położenie punktu projektowego  $\mathbf{x}^*$  w przestrzeni oryginalnej dana jest wzorem

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left. \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \sum_{j=1}^n \alpha_j J_{ji} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.56)$$

gdzie  $\mathbf{J} = [\partial u_i / \partial x_j]$  jest macierzą jacobianu transformacji  $\mathbf{U} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$ . Korzystając z definicji (2.52) oraz wzoru (2.55) wrażliwość wskaźnika niezawodności na parametry rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych  $\boldsymbol{\theta}$  dana jest jako (zob. [4, 56])

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left. \frac{\partial T_j(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad i = 1, \dots, m_{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.57)$$

gdzie  $m_{\boldsymbol{\theta}}$  jest wymiarem wektora  $\boldsymbol{\theta}$ , a przez zapis  $U_j = T_j(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$  w sposób symboliczny podkreślono zależność transformacji od parametrów rozkładów. Przedstawiając funkcję graniczną jako  $g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta})$ , gdzie  $\boldsymbol{\eta}$  jest wektorem parametrów deterministycznych, wrażliwość  $\beta$  na parametry funkcji granicznej ma postać

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} \left. \frac{\partial g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad i = 1, \dots, m_{\boldsymbol{\eta}}. \quad (2.58)$$

Zarówno dla parametrów typu  $\boldsymbol{\theta}$  jak i  $\boldsymbol{\eta}$  wrażliwość przybliżenia pierwszego rzędu prawdopodobieństwa awarii dostaje się różniczkując równanie (2.54)

$$\frac{\partial P_{f1}}{\partial p_i} = -\varphi(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, m_{\boldsymbol{\theta}} + m_{\boldsymbol{\eta}}. \quad (2.59)$$

gdzie  $\mathbf{p} = \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}\}$ , a  $\varphi(\cdot)$  jest funkcją gęstości standardowego rozkładu normalnego.

Jak to zostanie pokazane na wielu przykładach w rozdziale poświęconym optymalizacji niezawodnościowej, do obliczenia gradientów ograniczeń niezawodnościowych potrzebna jest znajomość wrażliwości wskaźnika  $\beta$  na parametry rozkładów prawdopodobieństwa



oraz parametry funkcji granicznej  $g$ . Jako zmienne projektowe zadania optymalizacji mogą być bowiem wybrane wartości średnie i odchylenia standardowe rozkładów zmiennych losowych, a także parametry deterministyczne nie wchodzące do opisu stochastycznego konstrukcji.

Znajomość wrażliwości wskaźnika niezawodności może być również pomocna w optymalizacji interaktywnej do prognozowania trendów procesu optymalizacji oraz we wstępnych studiach przy budowaniu modelu stochastycznego. W celu lepszej interpretacji oraz porównania wartości otrzymywanych wrażliwości wygodnie jest wprowadzić znormalizowaną miarę wrażliwości, tzw. elastyczność wskaźnika niezawodności (z ang. ‘elasticity of the reliability index’, zob. [34, 104]) postaci

$$S_i = \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{p_i}{\beta} \quad i = 1, \dots, m_{\theta} + m_{\eta}. \quad (2.60)$$

$S_i$  można interpretować jako procentową zmianę  $\beta$  przy zmianie parametru  $p_i$  o 1%. Znajomość wektora elastyczności umożliwia ewentualną redukcję liczby zmiennych losowych przyjętych do opisu konstrukcji. Jeśli np. elastyczność wskaźnika niezawodności ze względu na odchylenie standardowe zmiennej  $X_i$  jest mała w porównaniu do innych elastyczności, to można uznać, iż wpływ  $X_i$  na wartość prawdopodobieństwa zniszczenia jest niewielki i traktować ją w kolejnych obliczeniach jako parametr deterministyczny. Decyzję o redukcji modelu stochastycznego ułatwić mogą także, zdefiniowane przez Madsena [79], tzw. współczynniki wrażliwości pominięcia (ang. omission sensitivity factors) będące stosunkiem wskaźnika niezawodności obliczonego po zastąpieniu niektórych zmiennych losowych przez wartości deterministyczne do wskaźnika niezawodności obliczonego dla wyjściowego modelu stochastycznego. W przypadku zmiennych niezależnych współczynnik wrażliwości pominięcia ma postać

$$\gamma_i(x_i^d) = \frac{\beta|_{X_i=x_i^d}}{\beta} \approx \frac{\beta - \alpha_i \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^d)]}{\beta \sqrt{1 - \alpha_i^2}}, \quad (2.61)$$

gdzie  $\beta|_{X_i=x_i^d}$  oznacza wartość wskaźnika  $\beta$  otrzymaną po zastąpieniu zmiennej losowej  $X_i$  wartością deterministyczną  $x_i^d$ .

#### Przykład 2.4

Dla danych jak z przykładu 2.1 (funkcja graniczna (2.15)) oraz przy założeniu rozkładu logarytmiczno-normalnego dla pól przekrojów oraz Gumbela dla mnożnika obciążenia wskaźnik niezawodności i odpowiadające mu prawdopodobieństwo awarii wynoszą

$$\beta = 1.984499, \quad P_f = 0.02360002, \quad (2.62)$$

natomiast wektor  $\alpha$ , oraz wektory wrażliwości oraz elastyczności na odchylenia standar-

dowe zmiennych losowych mają postać

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 3.2490 \cdot 10^{-1} \\ 1.0126 \cdot 10^{-1} \\ 6.9661 \cdot 10^{-2} \\ 4.2227 \cdot 10^{-2} \\ 9.5990 \cdot 10^{-5} \\ -1.0337 \cdot 10^{-4} \\ -2.2472 \cdot 10^{-5} \\ -9.3678 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} -5.2499 \cdot 10^{-2} \\ -4.1942 \cdot 10^{-2} \\ -5.1502 \cdot 10^{-2} \\ -4.0347 \cdot 10^{-2} \\ -2.3290 \cdot 10^{-5} \\ -1.7136 \cdot 10^{-5} \\ -2.7868 \cdot 10^{-6} \\ -5.8689 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -3.9682 \cdot 10^{-2} \\ -3.1703 \cdot 10^{-2} \\ -3.8928 \cdot 10^{-2} \\ -3.0497 \cdot 10^{-2} \\ -1.1736 \cdot 10^{-5} \\ -8.6350 \cdot 10^{-6} \\ -1.1234 \cdot 10^{-6} \\ -5.9147 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Z powyższego widać, że elastyczności odpowiadające odchyleniom standardowym pól przekrojów prętów 5–7 (por. rys. 2.5) są o kilka rzędów wielkości mniejsze od pozostałych wyrazów wektora  $\mathbf{S}$ . Można więc, jako nie mające wpływu na wartość prawdopodobieństwa awarii, zastąpić zmienne losowe  $X_5$ – $X_7$  przez ich wartości średnie. Zredukowany model stochastyczny zadania dany będzie wtedy następująco

$$\begin{array}{l} X_1 - A_1 \text{ rozkł. log-normalny} \\ X_2 - A_2 \text{ rozkł. log-normalny} \\ X_3 - A_3 \text{ rozkł. log-normalny} \\ X_4 - A_4 \text{ rozkł. log-normalny} \\ X_5 - \lambda \text{ rozkł. Gumbela} \end{array} \quad \mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 15.0 \\ 15.0 \\ 15.0 \\ 15.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Wskaźnik  $\beta$  i prawdopodobieństwo awarii dla tak zmodyfikowanego zadania niezawodności wynoszą odpowiednio

$$\beta = 1.984501, \quad P_f = 0.0235999. \quad (2.63)$$

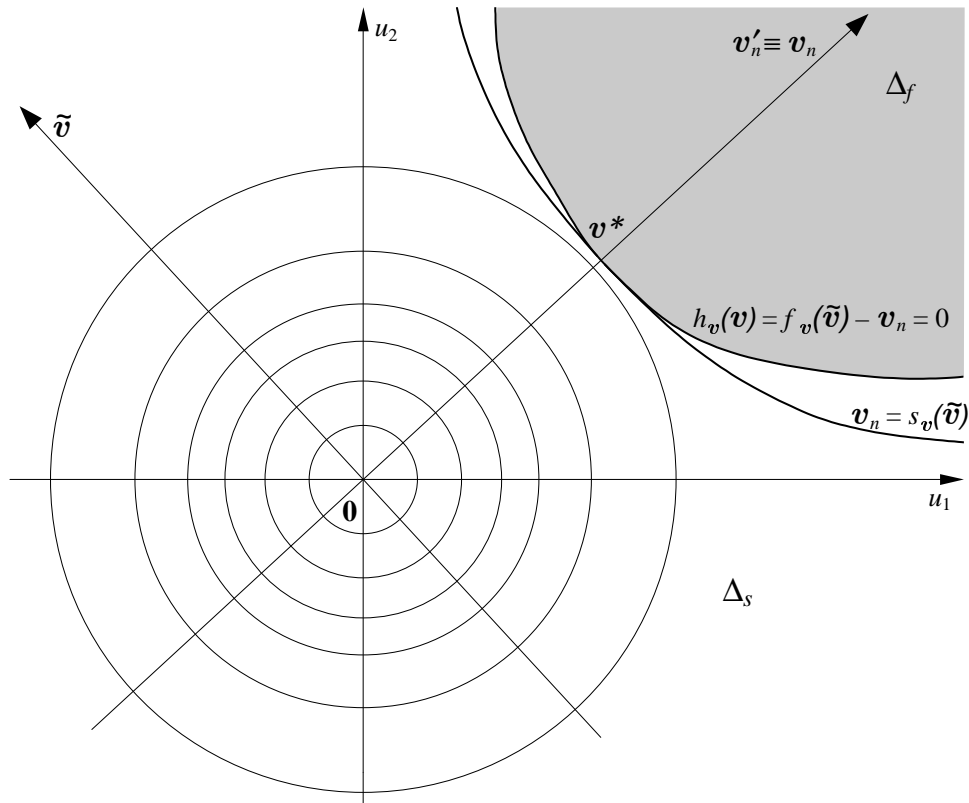
Porównując (2.62) i (2.63) widać, że wynik praktycznie nie uległ zmianie, co potwierdza trafność decyzji o redukcji. Zastępując następnie zmienne  $X_1$ – $X_4$  przez ich wartości średnie dostajemy

$$\beta = 2.135, \quad P_f = 0.0164. \quad (2.64)$$

Uzyskane w ten sposób przybliżenie prawdopodobieństwa awarii różni się o ponad 30% od wyniku (2.62). Jest to dość istotna różnica i dlatego wydaje się, że poprzedni, zredukowany model stochastyczny był optymalny ze względu na koszt obliczeń.  $\diamond$

#### 2.3.4. Metoda analizy niezawodności drugiego rzędu (SORM)

W metodzie analizy niezawodności drugiego rzędu (oznaczanej jako SORM od angielskiej nazwy *Second Order Reliability Method*) dwukrotnie różniczkowalna powierzchnia graniczna  $G(\mathbf{u}) = 0$  zastępowana jest w przestrzeni  $\mathbf{U}$  hiperpowierzchnią drugiego stopnia zawierającą punkt projektowy  $\mathbf{u}^*$  (zob. [10, 30, 40]). W celu zbudowania tej powierzchni wprowadza się najpierw nowy układ współrzędnych  $[v'_1, v'_2, \dots, v'_n]$  poprzez taki obrót



RYS. 2.12. Przybliżenie drugiego rzędu

układu  $[\mathbf{u}]$ , aby nowa oś  $v'_n$  pokrywała się z wektorem  $\mathbf{u}^*$  (zob. rys. 2.12). Transformacja ortogonalna opisująca to przekształcenie ma postać

$$\mathbf{V}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}, \quad (2.65)$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  jest macierzą transformacji  $n \times n$ , której ostatnią kolumną jest wektor cosinusów kierunkowych  $\boldsymbol{\alpha}$ , dany wzorem (2.51), a pozostałe kolumny tworzone są za pomocą odpowiednich metod ortogonalizacji, np. metody Grama-Schmidta [41]. Powierzchnia graniczna  $G(\mathbf{u}) = 0$  transformuje się na powierzchnię

$$G_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}') = 0, \quad (2.66)$$

daną w układzie współrzędnych  $[\mathbf{v}'] = [\tilde{\mathbf{v}}', v'_n] = [v'_1, v'_2, \dots, v'_{n-1}, v'_n]$ . Równanie (2.66) rozwiązane względem  $v'_n$  zapisać można jako

$$v'_n = f_{\mathbf{v}'}(\tilde{\mathbf{v}}'). \quad (2.67)$$

Punkt projektowy  $\mathbf{u}^*$  transformuje się na punkt  $\mathbf{v}'^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}^* = \{0, 0, \dots, 0, \beta\}$ , gdzie  $\beta$  jest wskaźnikiem niezawodności danym przez (2.52). Paraboliczna aproksymacja powierzchni granicznej wokół punktu  $\mathbf{v}'^*$  ma postać

$$v'_n = f_{\mathbf{v}'}(\tilde{\mathbf{v}}') \approx s_{\mathbf{v}'}(\tilde{\mathbf{v}}') = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left. \frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}'}(\tilde{\mathbf{v}}')}{\partial v'_i \partial v'_j} \right|_{\tilde{\mathbf{v}}'=0} v'_i v'_j = \beta + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}'^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{v}}', \quad (2.68)$$

gdzie  $\mathbf{H}$  jest macierzą hesjanu funkcji  $f_{\mathbf{v}'}(\tilde{\mathbf{v}}')$  o wymiarach  $(n-1) \times (n-1)$ , obliczoną w punkcie  $\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{0}$ . Układ  $[\mathbf{v}']$  obracany jest następnie wokół osi  $v'_n$  tak aby mieszane drugie pochodne w nowym układzie  $[\mathbf{v}] = [\tilde{\mathbf{v}}, v_n] = [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v'_n]$  zniknęły. Transformacja ta ma postać

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{V}}', \quad (2.69)$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest macierzą ortogonalną spełniającą równanie

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^T, \quad (2.70)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest diagonalną macierzą o wymiarze  $(n-1) \times (n-1)$  z wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{H}$  na przekątnej. Oznaczając przez  $G_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}}, v_n) = 0$  powierzchnię graniczną w nowym układzie współrzędnych oraz podobnie jak w (2.67) przedstawiając ją w postaci

$$v_n = f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}}), \quad (2.71)$$

aproxymacja paraboliczna funkcji granicznej w otoczeniu punktu  $\mathbf{v}^*$ , który odpowiada punktowi projektowemu  $\mathbf{u}^*$ , ma postać (zob. rys. 2.12)

$$G_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}}) - v_n \approx s_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}}) - v_n = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i^2 - v_n, \quad (2.72)$$

gdzie  $\kappa_i, i = 1, \dots, n-1$  są krzywiznami głównymi powierzchni  $v_n = f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})$  w punkcie  $\mathbf{v}^*$  postaci

$$\kappa_i = \left. \frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})}{\partial v_i^2} \right|_{\tilde{\mathbf{v}}=\mathbf{0}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.73)$$

Transformacje (2.65) i (2.69) są liniowe i zachowują początek układu współrzędnych w  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Wektor losowy  $\mathbf{U}$  transformuje się tożsamościowo na wektor losowy  $\mathbf{V}$ , którego składowe są niezależnymi standaryzowanymi zmiennymi gaussowskimi. Oszacowanie prawdopodobieństwa awarii dla parabolicznej aproxymacji funkcji granicznej (2.72) ma postać

$$\begin{aligned} P_f &= \mathbb{P}[G(\mathbf{U}) \leq 0] = \int_{\Delta_f} \varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) \, d\mathbf{u} = \\ &= \mathbb{P}[G_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}) \leq 0] = \int_{G_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{v}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) \, d\mathbf{v} = \\ &= \mathbb{P}[V_n \geq f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}})] = \int_{v_n \geq f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})} \varphi(v_n) \varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) \, d\mathbf{v} \approx \\ P_{f2} &= \mathbb{P}[V_n \geq s_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}})] = \int_{v_n \geq s_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})} \varphi(v_n) \varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) \, d\mathbf{v} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} \Phi\left(-\beta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i^2\right) \varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) \, d\tilde{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora funkcji  $\ln \Phi(-\beta - x) \approx \ln \Phi(-\beta) - x\psi(-\beta)$ , gdzie  $\psi(-\beta) = \varphi(-\beta)/\Phi(-\beta)$ , oszacowanie prawdopodobieństwa zniszczenia (2.74) dane jest następująco:

$$\begin{aligned} P_{f_2} &\approx \Phi(-\beta) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\psi(-\beta) \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i^2\right) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}v_i^2\right) d\tilde{\mathbf{v}} = \\ &= \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}v_i^2(1 + \kappa_i\psi(-\beta))\right) dv_i = \\ &= \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + \kappa_i\psi(-\beta)]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

W przypadku gdy  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\psi(-\beta) \rightarrow \beta$  (zob. [10]), wzór (2.75) uprościć można do postaci

$$P_{f_2} \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + \kappa_i\beta]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.76)$$

Wskaźnik niezawodności odpowiadający prawdopodobieństwu zniszczenia  $P_{f_2}$  wynosi

$$\beta^{\text{SORM}} = -\Phi^{-1}(P_{f_2}). \quad (2.77)$$

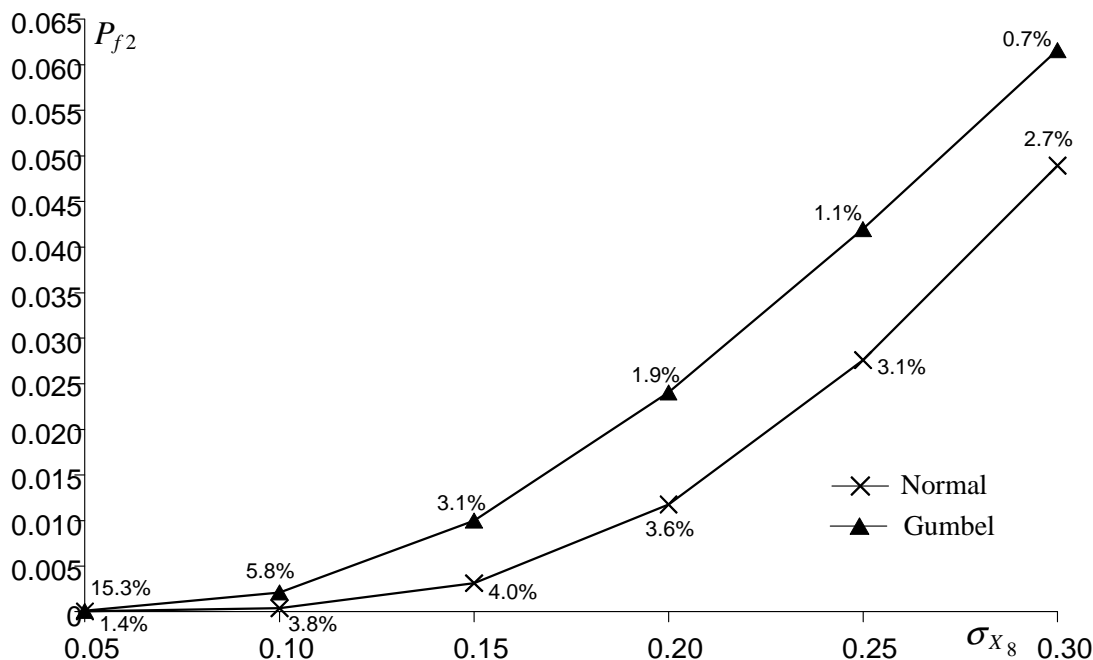
Aproksymacja funkcji granicznej paraboloidą pozwala wprowadzić współczynnik poprawkowy do oszacowania prawdopodobieństwa awarii (2.54). Uwzględnia on krzywizny powierzchni granicznej w punkcie  $\mathbf{u}^*$ . Wzory (2.75) i (2.76) mogą być stosowane przy założeniu, że odpowiednio  $\kappa_i > -1/\psi(-\beta)$  oraz  $\kappa_i > -1/\beta$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Krzywizna mniejsza niż  $-1/\beta$  jest nieakceptowalna, gdyż świadczy o istnieniu na powierzchni granicznej w otoczeniu wyznaczonego punktu  $\mathbf{u}^*$  innego punktu bliższego początkowi układu współrzędnych.

Jak to zostało wcześniej pokazane, doprowadzenie macierzy hesjanu funkcji  $f_{\mathbf{v}'}(\tilde{\mathbf{v}}')$  do postaci diagonalnej wymaga rozwiązania zagadnienia własnego. W przypadku problemów o dużej liczbie zmiennych losowych może być to zadanie wymagające dużego nakładu obliczeń numerycznych. Der Kiureghian i in. w pracy [21] (zob. też [129]) zaproponowali uproszczoną metodę aproksymacji drugiego rzędu, która nie wymaga rozwiązywania problemu własnego. Zakłada się w niej, że osie układu  $[\mathbf{v}']$  pokrywają się z kierunkami głównymi krzywizn paraboloidy niezależnie od ich rzeczywistej orientacji. Krzywizny potrzebne w oszacowaniu (2.75) uzyskuje się poprzez odpowiednią konstrukcję paraboloidy, dopasowanej do rzeczywistej powierzchni granicznej w punktach znajdujących się w pewnej odległości od punktu projektowego.

### Przykład 2.5

Przyjmując dane jak w przykładzie 2.3 policzono prawdopodobieństwo awarii wspornika kratowego metodą niezawodności drugiego rzędu. Na rysunku 2.13 przedstawiono porównanie wyników otrzymanych przy założeniu rozkładów normalnego i Gumbela mnożnika

obciążenia dla różnych wartości odchylenia standardowego. Zaznaczono również procentową różnicę w stosunku do oszacowania pierwszego rzędu (zob. rys. 2.11). Maksymalna różnica wynosi 15.3%, a zatem wpływ nieliniowości powierzchni granicznej nie jest znaczący i wyniki uzyskane przy użyciu FORM można uznać jako zadawalające.  $\diamond$



RYS. 2.13. Prawdopodobieństwo awarii według SORM dla różnych wartości odchylenia standardowego mnożnika obciążenia; zaznaczono procentową różnicę w stosunku do FORM (zob. rys. 2.11)

Należy stwierdzić, że metoda drugiego rzędu pomimo poprawy oszacowania prawdopodobieństwa awarii nie jest jednak efektywną metodą w zastosowaniu do optymalizacji niezawodnościowej. Obliczenie wartości krzywizn powierzchni granicznej wiąże się w przypadku większości praktycznych problemów niezawodności (gdy funkcja graniczna nie dana jest w sposób jawny) z koniecznością zastosowania metod różnicowych. W kontekście optymalizacji niezawodnościowej, gdy obliczenia prawdopodobieństwa zniszczenia powtarzane być muszą często setki razy, zastosowanie metody SORM powodowałoby zwielokrotnienie czasu obliczeniowego. W przeciwieństwie do FORM, metoda drugiego rzędu nie umożliwia także łatwego otrzymania wrażliwości wskaźnika niezawodności. Używany w pracy pakiet COMREL oferuje jedynie wrażliwość wskaźnika  $\beta$  obliczonego metodą FORM.

### 2.3.5. Metoda Mean-Value First-Order (MVFO)

Wskaźnik niezawodności obliczany przy pomocy metody *Mean-Value First-Order*, oznaczany dalej jako  $\beta^{MVFO}$  bardzo przypomina omówiony wcześniej wskaźnik niezawodności Cornela. Różnica pomiędzy nimi polega na tym, że w metodzie MVFO linearyzacji

w punkcie wartości średnich podlega powierzchnia graniczna po transformacji do gausowskiej przestrzeni standardowej, a więc powierzchnia  $g[T^{-1}(\mathbf{U})] = G(\mathbf{U})$ . Rozwijając  $G(\mathbf{U})$  w szereg Taylora wokół punktu  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  i zachowując wyrazy do pierwszego rzędu włącznie otrzymuje się

$$G(\mathbf{U}) \approx \bar{G}(\mathbf{U}) = G(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} U_i. \quad (2.78)$$

Korzystając następnie z geometrycznej interpretacji wskaźnika Hasofer-Linda, który dla funkcji liniowej dany jest wzorem (2.36), wskaźnik  $\beta^{\text{MVFO}}$  przyjmuje postać

$$\beta^{\text{MVFO}} = \frac{G(\mathbf{0})}{\left| \nabla G(\mathbf{U}) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \right|}. \quad (2.79)$$

Podobnie jak wskaźnik Cornela, wskaźnik  $\beta^{\text{MVFO}}$  stanowi bardzo zgrubną miarę bezpieczeństwa konstrukcji i powinien być używany jedynie do liniowych oraz słabo nieliniowych funkcji granicznych. Jego niewątpliwą zaletą jest jednak niewielki koszt obliczeniowy. Nie licząc operacji numerycznych związanych z transformacją z przestrzeni oryginalnej do przestrzeni  $\mathbf{U}$ , aby otrzymać wartość wskaźnika należy policzyć jedynie wartość oraz gradient funkcji granicznej dla  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Jak to zostanie pokazane w części pracy poświęconej optymalizacji niezawodnościowej, zmodyfikowany wskaźnik (2.79) może być w pewnych sytuacjach użyty zamiast wskaźników opartych na FORM lub SORM, których obliczenie wymaga znalezienia punktu projektowego. Modyfikacja polega na linearyzacji funkcji  $G(\mathbf{U})$  nie w punkcie  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  lecz w dowolnym punkcie  $\hat{\mathbf{u}}$ . Oznaczanie wskaźnika niezawodności odpowiadającego tak zlinearyzowanej funkcji granicznej przez  $\beta^{\text{MVFO}}$  nie jest już uprawnione. Jednak dla podkreślenia podobieństw obu wskaźników będzie on oznaczany  $\beta^{\text{MMVFO}}$ , od angielskiej nazwy *Modified Mean-Value First-Order*. Rozwijając  $G(\mathbf{U})$  w szereg Taylora punkcie  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$  i korzystając ponownie ze wzoru (2.36) otrzymujemy

$$\beta^{\text{MMVFO}} = \frac{G(\hat{\mathbf{u}}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \hat{u}_i}{\left| \nabla G(\mathbf{U}) \Big|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \right|}. \quad (2.80)$$

### Przykład 2.6

Przyjmując dane jak w przykładzie 2.4 (rozkład logarytmiczno-normalny dla pól przekrojów oraz rozkład Gumbela dla mnożnika obciążenia), przy pomocy metody mean-value first-order policzono wartość wskaźnika  $\beta^{\text{MVFO}}$  oraz prawdopodobieństwo awarii. Wynoszą one

$$\beta^{\text{MVFO}} = 2.726, \quad P_f^{\text{MVFO}} = 3.202 \cdot 10^{-3}.$$

Wartości te różnią się znacznie od wyników uzyskanych przy pomocy FORM i SORM (FORM:  $\beta = 1.984$ , SORM:  $\beta = 1.976$ ). Można wyobrazić sobie jednak sytuację, że



przeprowadzona została, przy pomocy metody pierwszego rzędu, analiza niezawodności konstrukcji podobnej do analizowanej (np. taka sama geometria, wymiary i warunki podparcia, a nieznacznie inne parametry materiałowe) i dysponujemy współrzędnymi punktu projektowego  $\mathbf{x}^*$ . Można się więc spodziewać, że punkt projektowy dla naszego zadania analizy niezawodności będzie leżał w pobliżu punktu projektowego konstrukcji podobnej, a co za tym idzie nie popełnimy dużego błędu linearyzując tam funkcję graniczną i aproksymując wskaźnik niezawodności konstrukcji przez  $\beta^{\text{MMVFO}}$ . W rozpatrywanym przykładzie funkcję graniczną zlinearyzowano w punkcie

$$\mathbf{x}^* = \{12.317, 12.325, 12.318, 12.326, 9.950, 9.950, 7.960, 1.273\}.$$

Jest to punkt projektowy odpowiadający konstrukcji, która różni się od analizowanej jedynie wielkościami pól przekrojów prętów 1–4 (por. rys. 2.5). Przyjęto wartości średnie oraz odchylenia standardowe pól przekrojów tych prętów równe, odpowiednio,  $13 \text{ cm}^2$  i  $1.3 \text{ cm}^2$ . Obliczając następnie, ze wzoru (2.80), wskaźnik niezawodności, dostajemy

$$\beta^{\text{MMVFO}} = 2.002, \quad P_f^{\text{MMVFO}} = 2.264 \cdot 10^{-2}.$$

Powyższa wartość wskaźnika  $\beta^{\text{MMVFO}}$  niewiele różni się od wartości  $\beta = 1.984$ , otrzymanej z analizy FORM.  $\diamond$

### 2.3.6. Metoda Monte Carlo

Klasyczna metoda symulacyjna Monte Carlo polega na generowaniu realizacji  $\mathbf{x}$  wektora losowego  $\mathbf{X}$  zgodnie z łączną gęstością rozkładu prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , a następnie sprawdzaniu czy dana realizacja leży w obszarze bezpiecznym czy w obszarze awarii. Liczba ‘trafień’ w obszar awarii w stosunku do całkowitej liczby symulacji stanowi estymator prawdopodobieństwa awarii. Powyższą ideę zapisać można definiując funkcję charakterystyczną zbioru  $\Omega_f$  (obszaru awarii) jako

$$\chi_{\Omega_f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \mathbf{x} \in \Omega_f \\ 0 & \text{jeśli } \mathbf{x} \notin \Omega_f \end{cases} \quad (2.81)$$

$\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X})$  jest zatem zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym

$$\mathbb{P}[\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X}) = 1] = P_f, \quad \mathbb{P}[\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X}) = 0] = 1 - P_f, \quad (2.82)$$

gdzie  $P_f = \mathbb{P}[\mathbf{X} \in \Omega_f]$ . Wartość średnia oraz wariancja  $\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X})$  mają postać

$$\chi_{\Omega_f}^0(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X})] = 1 \cdot P_f + 0 \cdot (1 - P_f) = P_f \quad (2.83)$$

$$\text{Var}[\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X})] = \mathbb{E}[(\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X}))^2] - (\mathbb{E}[\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X})])^2 = P_f - P_f^2 = P_f(1 - P_f) \quad (2.84)$$

W metodzie Monte Carlo do obliczenia prawdopodobieństwa awarii wykorzystuje się estymator wartości średniej funkcji charakterystycznej zbioru, postaci

$$\hat{\chi}_{\Omega_f}^0 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \chi_{\Omega_f}(\mathbf{X}_k) = \hat{P}_f, \quad (2.85)$$

gdzie  $\mathbf{X}_k$  są niezależnymi wektorami losowymi o rozkładzie prawdopodobieństwa zdefiniowanym funkcją gęstości  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , a  $K$  jest liczbą symulacji. Wartość średnia oraz wariancja estymatora (2.85) dane są jako

$$\widehat{P}_f^0 = \mathbb{E}[\widehat{P}_f] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \chi_{\Omega_f}^0(\mathbf{X}_k) = \frac{1}{K} K P_f = P_f \quad (2.86)$$

$$\sigma_{\widehat{P}_f}^2 = \text{Var}[\widehat{P}_f] = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K \text{Var}[\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X}_k)] = \frac{1}{K^2} K P_f (1 - P_f) = \frac{1}{K} P_f (1 - P_f) \quad (2.87)$$

Współczynnik zmienności estymatora ma postać

$$\nu_{\widehat{P}_f} = \frac{\sigma_{\widehat{P}_f}}{\widehat{P}_f^0} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{K P_f}}. \quad (2.88)$$

Z powyższego wzoru wynika, że uzyskanie współczynnika zmienności estymatora rzędu 0.1 przy przewidywanym prawdopodobieństwie awarii, które dla rzeczywistych konstrukcji waha się w granicach  $10^{-7} \div 10^{-4}$ , wymaga przeprowadzenia  $K = 10^6 \div 10^9$  symulacji co nawet przy współczesnych komputerach wieloprocesorowych jest zadaniem ogromnym, jeśli w ogóle wykonalnym w możliwym do zaakceptowania czasie.

Olbrzymi nakład obliczeniowy związany z klasyczną metodą Monte Carlo dyskwalifikuje jej przydatność do analizy praktycznych problemów niezawodności konstrukcji. Dla niewielkich zadań, gdy czas obliczenia wartości funkcji granicznej jest bardzo mały, metoda ta może być stosowana do weryfikacji wyników otrzymanych przy użyciu FORM lub SORM (np. wykrycia grubych błędów wynikających z nieuwzględnienia wielokrotnych punktów projektowych).

### Przykład 2.7

Przyjmując opis stochastyczny jak w przykładach 2.1 i 2.3 oraz zakładając, że mnożnik obciążenia  $\lambda$  (zmienna losowa  $X_8$ ) ma rozkład Gumbela o odchyleniu standardowym  $\sigma_{X_8} = 0.2$  przeprowadzono  $K = 600000$  symulacji losowych. Do generacji wektora zależnych zmiennych logarytmiczno-normalnych (opisujących pola przekrojów prętów) wykorzystano generator zależnych zmiennych gaussowskich po odpowiedniej modyfikacji macierzy kowariancji, opisaney w pracy [30]. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki symulacji oraz odpowiadające im wyniki FORM i SORM.

	FORM	SORM	Monte Carlo
$\beta$	1.984	1.976	1.972
$P_f$	0.0236	0.0240	0.0243

Współczynnik zmienności estymatora prawdopodobieństwa awarii, obliczony na podstawie wzoru (2.88) wynosi 0.008.  $\diamond$

### 2.3.7. Metoda ‘importance sampling’

Metodą łączącą zalety FORM i SORM z możliwościami technik symulacyjnych jest metoda ‘importance sampling’<sup>1)</sup>. W porównaniu do klasycznej metody Monte Carlo wymaga ona przeprowadzenia znacznie mniejszej liczby symulacji w celu uzyskania wiarygodnej oceny prawdopodobieństwa awarii konstrukcji. Istnieje wiele odmian tej metody. Przegląd oraz omówienie metod symulacyjnych stosowanych w analizie niezawodności konstrukcji znaleźć można w pracy [85]. Poniżej przedstawione zostaną najważniejsze elementy metody ‘importance sampling’ zaimplementowanej w wykorzystywanym w pracy pakiecie analizy niezawodności COMREL. Metoda ta pozwala na poprawę wyników uzyskiwanych przy użyciu metod przybliżonych (zob. [29, 57]).

Metody ‘importance sampling’ opierają się na następującej tożsamości:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\chi(\mathbf{X})] &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \chi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \chi(\mathbf{w}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{w})}{g_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})} g_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = \mathbb{E}_{\mathbf{W}} \left[ \chi(\mathbf{W}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{W})}{g_{\mathbf{W}}(\mathbf{W})} \right], \end{aligned} \quad (2.89)$$

gdzie  $\chi(\cdot)$  jest dowolną, całkowalną funkcją w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_{\mathbf{X}}(\cdot)$  i  $g_{\mathbf{W}}(\cdot)$  są funkcjami gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, odpowiednio wektora losowego  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{W}$ , a przez  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\cdot]$  i  $\mathbb{E}_{\mathbf{W}}[\cdot]$  oznaczono operację wartości średniej, odpowiednio względem rozkładu  $f_{\mathbf{X}}(\cdot)$  i  $g_{\mathbf{W}}(\cdot)$ . Wzór na prawdopodobieństwo awarii (por. (2.83)) można więc wyrazić w postaci

$$P_f = \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X})] = \mathbb{E}_{\mathbf{W}} \left[ \chi_{\Omega_f}(\mathbf{W}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{W})}{g_{\mathbf{W}}(\mathbf{W})} \right], \quad (2.90)$$

lub po transformacji zmiennych  $\mathbf{X}$  do gaussowskiej przestrzeni standardowej

$$P_f = \mathbb{E}_{\mathbf{U}}[\chi_{\Delta_f}(\mathbf{U})] = \mathbb{E}_{\mathbf{W}} \left[ \chi_{\Delta_f}(\mathbf{W}) \frac{\varphi_n(\mathbf{W}, \mathbf{0}, \mathbf{I})}{g_{\mathbf{W}}(\mathbf{W})} \right], \quad (2.91)$$

gdzie przez  $\chi_{\Delta_f}$  oznaczono funkcję charakterystyczną obszaru awarii  $\Delta_f$ . Na podstawie powyższego wzoru, estymator prawdopodobieństwa awarii,  $\widehat{P}_f$ , przyjmuje postać

$$\widehat{P}_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \chi_{\Delta_f}(\mathbf{W}_k) \frac{\varphi_n(\mathbf{W}_k, \mathbf{0}, \mathbf{I})}{g_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_k)}, \quad (2.92)$$

przy czym do obliczeń realizacji estymatora wykorzystuje się realizacje  $\mathbf{w}_k$  wektora  $\mathbf{W}_k$  generowane zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa danym przez  $g_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})$ . Najważniej-

<sup>1)</sup>J. Putresza w swoim doktoracie [95] tłumaczy nazwę ‘importance sampling’ jako: metoda symulacji według funkcji ważności.

szym zadaniem jest teraz wybranie takiej funkcji  $g_{\mathbf{W}}(\cdot)$ , która maksymalizowałaby efektywność estymatora (2.92). Powinna ona spełniać następujące warunki (zob. [29]):

$$\int_{\Delta_f} g_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = 1, \quad (2.93)$$

$$g_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) = \zeta \varphi_n(\mathbf{w}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) \chi_{\Delta_f}(\mathbf{w}) \quad \text{prawie w całym obszarze } \Delta_f, \quad (2.94)$$

gdzie  $\zeta$  jest liczbą rzeczywistą. Wynika stąd, iż gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wektora  $\mathbf{W}$  powinna koncentrować się w otoczeniu punktu, wokół którego skupia się przeważająca część masy prawdopodobieństwa decydująca o wartości  $P_f$ . Często jako funkcję  $g_{\mathbf{W}}(\cdot)$  przyjmuje się  $n$ -wymiarową gaussowską funkcję gęstości prawdopodobieństwa, ‘rozpiętą’ nad punktem projektowym  $\mathbf{u}^*$ , postaci

$$g_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) = \varphi_n(\mathbf{w}, \mathbf{u}^*, \mathbf{I}) = \prod_{i=1}^n \varphi(w_i - u_i^*). \quad (2.95)$$

Estymator prawdopodobieństwa awarii zapisać można wtedy jako

$$\widehat{P}_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \chi_{\Delta_f}(\mathbf{W}_k) \frac{\varphi_n(\mathbf{W}_k, \mathbf{0}, \mathbf{I})}{\varphi_n(\mathbf{W}_k, \mathbf{u}^*, \mathbf{I})}. \quad (2.96)$$

Takie rozwiązanie zwiększa znacznie efektywność estymacji, ciągle jednak konieczne jest przeprowadzenie kilku tysięcy symulacji. Dalszą poprawę efektywności można uzyskać uwzględniając własności funkcji granicznej przy określaniu funkcji gęstości  $g_{\mathbf{W}}(\cdot)$ . Wprowadzając, tak jak to było zrobione przy wyprowadzaniu wzorów metody drugiego rzędu (zob. punkt 2.3.4), układ współrzędnych  $[\mathbf{v}]$ , prawdopodobieństwo awarii można wyrazić w postaci (por. (2.74))

$$\begin{aligned} P_f &= \mathbb{P}[G_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}) \leq 0] = \mathbb{P}[V_n \geq f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}})] = \int_{v_n \geq f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})} \varphi(v_n) \varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{v} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} \Phi(-f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})) \varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{0}, \mathbf{I}) d\tilde{\mathbf{v}} = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{V}}}[\Phi(-f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}}))]. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Z porównania wzorów (2.97) i (2.89) widać, że do oszacowania prawdopodobieństwa awarii,  $P_f$ , wykorzystać można estymator wartości średniej, postaci

$$\widehat{P}_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi(-f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}}_k)) \frac{\varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{V}}_k, \mathbf{0}, \mathbf{I})}{g_{\mathbf{W}}(\tilde{\mathbf{V}}_k)}, \quad (2.98)$$

gdzie  $g_{\mathbf{W}}(\cdot)$  jest  $(n-1)$  wymiarową funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, której postać i parametry należy tak dobrać, aby efektywność estymacji była jak największa. Przyjęcie gaussowskiego rozkładu prawdopodobieństwa

$$g_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) = \varphi_{n-1}(\mathbf{w}, \mathbf{0}, \Sigma) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{w_i}{\sigma_i}\right), \quad (2.99)$$

w którym  $\Sigma = [\sigma_i]$  jest macierzą diagonalną, pozwala na zmianę skupienia realizacji  $\mathbf{w}_k$  wokół punktu  $\tilde{\mathbf{v}}^* = \mathbf{0}$  poprzez sterowanie wartościami wariancji  $\sigma_i^2$ . Przyjmując następnie paraboliczną aproksymację (2.72) funkcji granicznej oraz funkcję  $g_{\mathbf{w}}(\cdot)$  daną wzorem (2.99) estymator prawdopodobieństwa awarii (2.98) przyjmuje postać

$$\widehat{P}_f \approx \widehat{P}_{fs} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi(-s_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}}_k)) \frac{\varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{V}}_k, \mathbf{0}, \mathbf{I})}{\varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{V}}_k, \mathbf{0}, \Sigma)}. \quad (2.100)$$

Minimalizując wariancję powyższego estymatora względem odchyłeń standardowych,  $\sigma_i$  w rozkładzie (2.99) otrzymuje się (zob. [29])

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{1 + \frac{\kappa_i \psi(-\beta)}{1 + \kappa_i \eta}}, \quad (2.101)$$

gdzie przez  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , oznaczono krzywizny główne powierzchni  $v_n = f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})$  w punkcie  $\mathbf{v}^*$  (por. (2.73)),  $\psi(-\beta) = \varphi(-\beta)/\Phi(-\beta)$ , a parametr  $\eta$  dany jest następująco

$$\eta = \begin{cases} \beta - \frac{\psi(-\beta)}{\beta}(1 + \beta) & \text{dla } -\frac{1}{\beta} \leq \kappa_i < 0 \\ 0 & \text{dla } \kappa_i \geq 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

Przyjmując wariancje (2.101) wyznaczone dla parabolicznej aproksymacji funkcji granicznej w definicji funkcji gęstości  $g_{\mathbf{w}}(\cdot) = \varphi(\cdot, \mathbf{0}, \Sigma)$ , estymator prawdopodobieństwa awarii (2.98) przyjmuje ostatecznie postać

$$\begin{aligned} \widehat{P}_f &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi(-f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}}_k)) \frac{\varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{V}}_k, \mathbf{0}, \mathbf{I})}{\varphi_{n-1}(\tilde{\mathbf{V}}_k, \mathbf{0}, \Sigma)} = \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi(-f_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{V}}_k)) \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i \exp\left[-\frac{V_{i,k}^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Otrzymany estymator charakteryzuje się bardzo dużą efektywnością. W większości przypadków w celu uzyskania współczynnika zmienności estymatora mniejszego niż 10% wystarcza  $K = 20 \div 100$  symulacji niezależnie od wielkości szacowanego prawdopodobieństwa awarii. Pomimo tak znacznej w stosunku do klasycznej metody Monte Carlo poprawy efektywności, należy stwierdzić, iż metody 'importance sampling' nie nadają się do zastosowania w zadaniach optymalizacji niezawodnościowej. Spowodowane jest to ciągle znacznym w porównaniu z FORM czasem obliczeń oraz niemożnością szybkiego uzyskania wrażliwości otrzymywanego prawdopodobieństwa zniszczenia na parametry projektowe. Ze względu na swą dużą dokładność, metoda ta bardzo dobrze nadaje się do określenia błędu popełnianego przez metody pierwszego i drugiego rzędu.

### Przykład 2.8

Przyjmując dane dla analizowanego w bieżącym rozdziale wspornika kratowego jak w przykładzie 2.4, prawdopodobieństwo awarii oraz wskaźnik niezawodności uzyskane po 100 symulacjach metodą 'importance sampling' wynoszą odpowiednio,  $P_f = 0.0240$  i  $\beta = 1.976$ .

Z porównania z wynikami zamieszczonymi w tabeli w przykładzie 2.5 widać, że otrzymane wartości są identyczne jak dla metody SORM, którą w przypadku tego prostego przykładu można uznać za dokładną.  $\diamond$

## 2.4. Podejście probabilistyczne w normach

W celu uzyskania bardziej kompletnego obrazu zagadnień oceny bezpieczeństwa konstrukcji oraz metod niezawodnościowego projektowania warto jest wspomnieć o ‘klasycznej’ normowej metodzie częściowych współczynników bezpieczeństwa. W podrozdziale 3.3 dokonano próby porównania wyników optymalizacji niezawodnościowej oraz optymalizacji deterministycznej, w której wartości parametrów projektowych oraz obciążeń przyjmowane były zgodnie z zaleceniami odpowiednich norm. Dlatego też poniżej podane zostały najważniejsze zasady ustalania wartości współczynników częściowych.

W obowiązujących obecnie normach projektowych stochastyczny charakter parametrów opisujących konstrukcję oraz działające na nią obciążenia uwzględniany jest poprzez zastosowanie tzw. metod probabilistycznych poziomu I [90]. Metody te, zwane także pół-probabilistycznymi, polegają m.in. na statystycznym określeniu niektórych częściowych współczynników bezpieczeństwa (głównie jakości materiału konstrukcyjnego oraz charakteru i zmienności obciążeń), przy określeniu pozostałych współczynników bezpieczeństwa w sposób arbitralny. Najczęściej wyróżnia się następujące współczynniki częściowe związane z:

- losowością właściwości mechanicznych materiałów i wymiarów przekrojów,
- losowością obciążeń działających na konstrukcję,
- dokładnością teorii obliczeniowych i ich zgodnością z rzeczywistą pracą konstrukcji,
- uwzględnieniem zmian w materiale konstrukcyjnym w okresie eksploatacji,
- jakością pracy wytwórni.

W ramach metod poziomu I, jedna *wartość charakterystyczna* określa każdy parametr losowy. Oznaczając dalej przez  $R^0$  i  $\sigma_R$  odpowiednio wartość średnią i odchylenie standardowe wytrzymałości materiału, a przez  $Q^0$  i  $\sigma_Q$  wartość średnią i odchylenie standardowe obciążenia, wytrzymałość charakterystyczna materiału  $R_k$  oraz charakterystyczna wartość obciążenia  $Q_k$  zdefiniowane są jako

$$R_k = R^0 - t_R \sigma_R \quad Q_k = Q^0 + t_Q \sigma_Q, \quad (2.104)$$

gdzie parametry  $t_R$  i  $t_Q$  dobiera się tak, aby wartości charakterystyczne  $R_k$  i  $Q_k$  były odpowiednimi kwantylami zmiennych losowych  $R$  i  $Q$  (np. na poziomie: 2%, 5% dla wytrzymałości oraz na poziomie 98% rocznego maksimum dla obciążenia). Często przyjmuje się

$$t_R = \begin{cases} 2 & \text{dla konstrukcji stalowych (zalecenie ECCS<sup>1</sup>)} \\ 1.645 & \text{dla konstrukcji betonowych (zalecenie CEB<sup>2</sup>)} \end{cases} \quad (2.105)$$

<sup>1</sup>)Europejska Konwencja Konstrukcji Stalowych

<sup>2</sup>)Europejski Komitet Betonu

Wprowadza się następnie tzw. *wartości obliczeniowe (projektowe)*  $R_d$  i  $Q_d$ , dane jako

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_s} \quad Q_d = \gamma_f Q_k, \quad (2.106)$$

gdzie  $\gamma_s$  i  $\gamma_f$  są odpowiednio współczynnikami częściowymi wytrzymałości i obciążenia. Zasady przyjmowania wartości tych współczynników omówione zostaną w dalszej części rozdziału.

Koncentrując się dalej na konstrukcjach stalowych (zob. [78, 131]), schemat ‘normowego’ podejścia do projektowania konstrukcji przedstawiony zostanie na podstawie obowiązującej normy PN-90/B-03200. Norma ta stanowi, iż wymiarowanie konstrukcji należy przeprowadzać metodą stanów granicznych, rozróżniając:

- stany graniczne nośności i odpowiadające im obciążenia obliczeniowe,
- stany graniczne użytkowania i odpowiadające im obciążenia charakterystyczne.

Przy wymiarowaniu konstrukcji należy wykazać, że we wszystkich możliwych do przewidzenia przypadkach projektowych, w fazach realizacji i eksploatacji, spełnione są warunki nośności i sztywności konstrukcji. W ogólnym przypadku warunek normy zapisać można w postaci

$$g(\mathbf{Q}_d, \mathbf{R}_d; \gamma_d, \gamma_n) > 0, \quad (2.107)$$

gdzie przez  $\gamma_d$  oznaczono współczynniki uwzględniające niepewności modelu, inne niż te, które wzięto w rachubę przy specyfikowaniu współczynników  $\gamma_s$  i  $\gamma_f$ , natomiast  $\gamma_n$  oznacza współczynnik konsekwencji zniszczenia.

### *Obciążenia*

Wartość charakterystyczna obciążenia ustalana jest bezpośrednio na podstawie norm, np.: PN-82/B-02000/2001/2003/2004, PN-80/B-02010, PN-77/B-02011, PN-87/B-02013, PN-88/B-02014, PN-86/B-02015. W zależności od czasu trwania i sposobu działania, obciążenia dzieli się na: stałe, zmienne i wyjątkowe. Zgodnie z normą PN-76/B-03001, wartość charakterystyczną ustala się:

- dla obciążeń stałych - jako wartość średnią,
- dla obciążeń zmiennych - jako wartość mającą okres powrotu co najmniej równy zakładanemu okresowi eksploatacji konstrukcji lub inny uzasadniony ekonomicznie i zapewniający bezpieczeństwo konstrukcji.

Zgodnie z definicją (2.106), wartości obciążeń obliczeniowych uzyskuje się mnożąc wartości charakterystyczne przez odpowiednie współczynniki częściowe. W celu określenia wartości obliczeniowych kombinacji obciążeń działających na konstrukcję wprowadza się następujące współczynniki:

- współczynnik obciążenia (częściowy współczynnik bezpieczeństwa)  $\gamma_f$  - uwzględnia on możliwość wystąpienia wartości obciążenia nie korzystniejszej od wartości charakterystycznej. Wartość tego współczynnika waha się w granicach  $0.8 \div 1.4$



przy czym wartości  $\gamma_f < 1$  należy stosować gdy zmniejszenie obciążenia powoduje zmniejszenie bezpieczeństwa konstrukcji. Np. dla obciążenia śniegiem  $\gamma_f = 1.4$ , dla obciążenia wiatrem  $\gamma_f = 1.3$ , a dla obciążenia od ciężaru własnego elementów konstrukcji  $\gamma_f = 1.1$ .

- współczynnik jednoczesności obciążeń zmiennych  $\psi_o$  - współczynnik uwzględniający zmniejszone prawdopodobieństwo jednoczesnego wystąpienia kilku różnych obciążeń o wartościach charakterystycznych w pełnej ich wielkości. W zależności od znaczenia obciążenia zmiennego współczynnik  $\psi_o$  przyjmuje wartości od 0.7 do 1.0.
- współczynnik dynamiczny  $\alpha_d$  - współczynnik ten uwzględnia się w przypadku, gdy obciążenia działające na konstrukcje mają charakter dynamiczny. W przypadku gdy nie przeprowadza się specjalnej analizy dynamicznej, współczynnik ten można przyjąć na podstawie normy PN-82/B-02003.
- współczynnik konsekwencji zniszczenia  $\gamma_n$  - częściowy współczynnik bezpieczeństwa przyjmowany w celu dodatkowego zwiększenia lub zmniejszenia bezpieczeństwa konstrukcji w zależności od stopnia zagrożenia życia ludzkiego i wielkości strat gospodarczych. Dla budowli, których zniszczenie pociągnęłoby katastrofalne skutki materialne i społeczne przyjmuje się  $\gamma_n > 1.0$ , dla budowli nie przeznaczonych na stały pobyt ludzi  $\gamma_n < 1.0$ , dla pozostałych  $\gamma_n = 1.0$ .

W analizie stanów granicznych nośności norma zobowiązuje projektanta do uwzględnienia dwóch kombinacji obciążeń, tzw. kombinacji podstawowej i kombinacji wyjątkowej. Kombinacja podstawowa składa się z obciążeń stałych oraz zmiennych, uszeregowanych wg ich znaczenia. Odpowiadające jej obciążenie obliczeniowe ma postać

$$P = \left( \sum_{i=1}^m G_{ki} \gamma_{fi} + \sum_{j=1}^n Q_{kj} \psi_{oj} \gamma_{fj} \alpha_{dj} \right) \gamma_n, \quad (2.108)$$

gdzie przez  $Q_{kj}$  oznaczono tu wartość charakterystyczną  $j$ -tego obciążenia zmiennego, statycznego, a przez  $G_{ki}$  wartość charakterystyczną  $i$ -tego obciążenia stałego. W przypadku kombinacji wyjątkowej wszystkie kombinacje obciążeń zmiennych, niezależnie od ich liczby i znaczenia należy pomnożyć przez współczynnik  $\psi_o = 0.8$ . Obciążenie obliczeniowe w kombinacji wyjątkowej składającej się z obciążeń stałych, niektórych zmiennych i jednego wyjątkowego oblicza się wg następującego wzoru:

$$P_w = \sum_{i=1}^m G_{ki} \gamma_{fi} + 0.8 \sum_{j=1}^n Q_{kj} \gamma_{fj} \alpha_{dj} + F_a, \quad (2.109)$$

gdzie  $F_a$  jest obciążeniem wyjątkowym.

W stanach granicznych użytkowania uwzględnia się jedynie obciążenia charakterystyczne, przyjmując kombinację obciążeń składającą się ze wszystkich obciążeń stałych i jednego najniekorzystniejszego obciążenia zmiennego, postaci

$$P_k = \sum_{i=1}^m G_{ki} + Q_{kj}. \quad (2.110)$$

*Wytrzymałość stali*

Wymienione w normie PN-90/B-03200 stałe materiałowe takie jak: masa objętościowa, moduł sprężystości, współczynnik Poissona czy współczynnik rozszerzalności cieplnej, traktowane są jako wielkości deterministyczne, niezależne od gatunku stali. Stochastyczny charakter właściwości mechanicznych materiału uwzględnia się przyjmując wytrzymałość stali jako zmienną losową. Podobnie jak w przypadku obciążeń, rozróżnia się wytrzymałość charakterystyczną i obliczeniową. Inaczej jednak niż w normach dotyczących obciążeń, w normie ‘stalowej’ podano gotowe wartości wytrzymałości obliczeniowych<sup>1)</sup>. Wartość charakterystyczną wytrzymałości przyjmuje się jako odpowiedni kwantyl granicy plastyczności stali  $\sigma^0$ . Dla najczęściej stosowanych gatunków stali odpowiadające im wartości charakterystyczne podane są w oddzielnej tabeli. Dla pozostałych gatunków stali podano regułę ustalania wartości współczynnika częściowego  $\gamma_s$  (por. (2.106)). W zależności od wartości granicy plastyczności, przyjmuje się, że  $\gamma_s = 1.1 \div 1.25$ .

---

<sup>1)</sup>W normie PN-90/B-03200 wytrzymałość obliczeniowa stali przy rozciąganiu, ściskaniu, zginaniu oznaczana jest symbolem  $f_d$

---

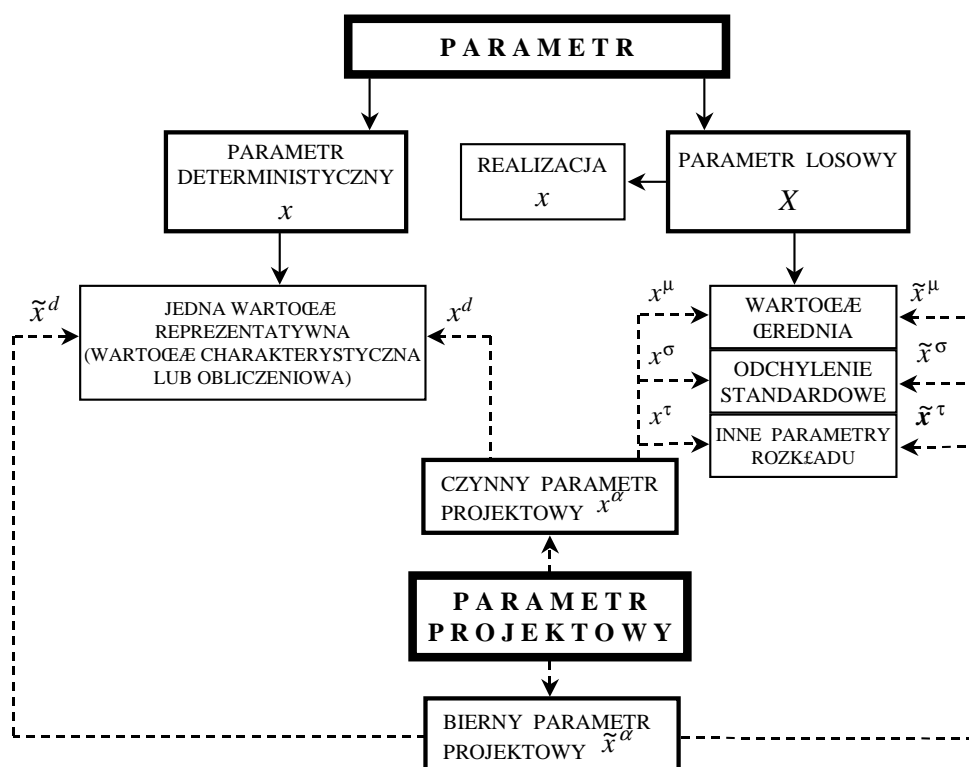
## Niezawodnościowa optymalizacja konstrukcji

---

### 3.1. Podział, oznaczenia i grupowanie parametrów

Parametrami projektowymi (decyzyjnymi, optymalizacyjnymi) zadania optymalizacji niezawodnościowej mogą być zarówno parametry deterministyczne jak też parametry (lub momenty statystyczne) rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych. Ponadto, z uwagi na wykorzystywanie w pracy metod optymalizacji interaktywnej, warto jest rozróżnić tzw. parametry projektowe czynne oraz bierne. Przez parametr czynny rozumieć się będzie właściwy parametr projektowy, którego wartość zmienia się w procesie optymalizacji, natomiast wartość parametru biernego pozostaje stała. Rozróżnienie to, z pozoru sztuczne, jest wygodne w kontekście optymalizacji interaktywnej, gdzie użytkownik nadzorujący proces optymalizacji może zdecydować o przeniesieniu parametru projektowego z początkowego zbioru czynnych parametrów projektowych do grupy parametrów biernych, czyli mówiąc inaczej, zmienić liczbę parametrów decyzyjnych.

W opracowaniach dotyczących optymalizacji niezawodnościowej nie wypracowano jak dotąd dominującego systemu oznaczeń, które w czytelny sposób oddawałyby różnorodność typów parametrów, charakterystycznych dla tego zagadnienia. W niniejszej pracy przyjęto oznaczenia zaproponowane przez Santosa i in. w artykule [104] (zob. rys. 3.1). Tak jak w rozdziale 2, parametry (zmienne) losowe przyjęto oznaczać dużą literą  $X$ , natomiast realizacje tych parametrów oraz parametry deterministyczne przez  $x$ . Parametry



Rys. 3.1. Podział i oznaczenia parametrów w zadaniu optymalizacji niezawodnościowej

deterministyczne określane są jedną wartością liczbową, która utożsamiana może być bądź z wartością charakterystyczną lub obliczeniową (por. punkt 2.4), bądź z wartością średnią. Przez  $x^d$  oznacza się czynny parametr projektowy związany z parametrem deterministycznym, natomiast przez  $x^\mu$  i  $x^\sigma$  przyjęto oznaczać czynne parametry projektowe, związane odpowiednio z wartością średnią  $X^0$  i odchyleniem standardowym  $\sigma_X$  zmiennej losowej  $X$ . Bierne parametry projektowe oznacza się przez dodanie ‘falki’ nad parametrem czynnym,  $\tilde{x}^\alpha$ ,  $\alpha = \{d, \mu, \sigma\}$ .

Bardzo istotnym zagadnieniem z punktu widzenia efektywności numerycznej procesu optymalizacji niezawodnościowej jest redukcja liczby parametrów projektowych oraz losowych. Biorąc pod uwagę np. założenia dotyczące zachowania symetrii optymalizowanej konstrukcji bądź zachowania proporcji niektórych jej wymiarów, czy też ograniczonej liczby różnych przekrojów prętów lub cech materiałowych, stosuje się często grupowanie parametrów wynikających z dyskretyzacji konstrukcji metodą elementów skończonych. W przypadku konstrukcji prętowych jest to postępowanie dość naturalne i często spotykane. Projektując np. dźwigar kratowy, projektant może założyć, że pręty pasa górnego wykonane zostaną z jednego rodzaju elementów, analogicznie ujednoczone zostaną pręty pasa dolnego oraz odpowiednio, przekroje krzyżulców i słupków. Takie rozwiązanie pozwala na opis często skomplikowanych konstrukcji za pomocą kilku parametrów projektowych i stanowi pewien kompromis pomiędzy dążeniem do zaprojektowania konstrukcji optymalnej, a ograniczeniami natury obliczeniowej i wykonawczej.

W stworzonym w ramach pracy systemie optymalizacji niezawodnościowej OPTIREL grupowaniu podlegają parametry tego samego typu (pola przekrojów prętów, parametry materiałowe, parametry kształtu), wynikające z przyjętego modelu metody elementów skończonych. Grupa definiowana jest przez wskazanie parametru reprezentatywnego oraz parametrów zależnych. Wartość parametru zależnego obliczana jest jako funkcja liniowa wartości parametru reprezentatywnego. Przyjmując  $x_1$  jako parametr reprezentatywny oraz  $x_i = a_i x_1 + b_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , jako parametry zależne, wrażliwość zachowania konstrukcji  $\Psi(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$  na zmianę parametru  $x_1$ , gdzie  $\mathbf{q}$  jest wektorem przemieszczeń węzłowych o wymiarze  $m \times 1$ , oblicza się ze wzoru

$$\frac{d\Psi}{dx_1} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial\Psi}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dx_i} \right) \frac{dx_i}{dx_1}. \quad (3.1)$$

Należy podkreślić, że dla algorytmu optymalizacyjnego jedynie  $x_1$  jest parametrem decyzyjnym.

### 3.2. Zadanie optymalizacji niezawodnościowej

Zadanie optymalizacji niezawodnościowej formułowane może być na wiele sposobów. Poniżej przedstawione zostanie sformułowanie, które przyjęto w niniejszej pracy i które zaimplementowano w systemie OPTIREL. Dokładniejsze omówienie alternatywnych sformułowań zamieszczone zostanie w dalszej części tego podrozdziału.

Typowy problem niezawodnościowej optymalizacji wyrazić można jako minimalizację objętości / kosztu początkowego konstrukcji przy ograniczeniach nałożonych na jej niezawodność (zob. [34, 66, 114]):

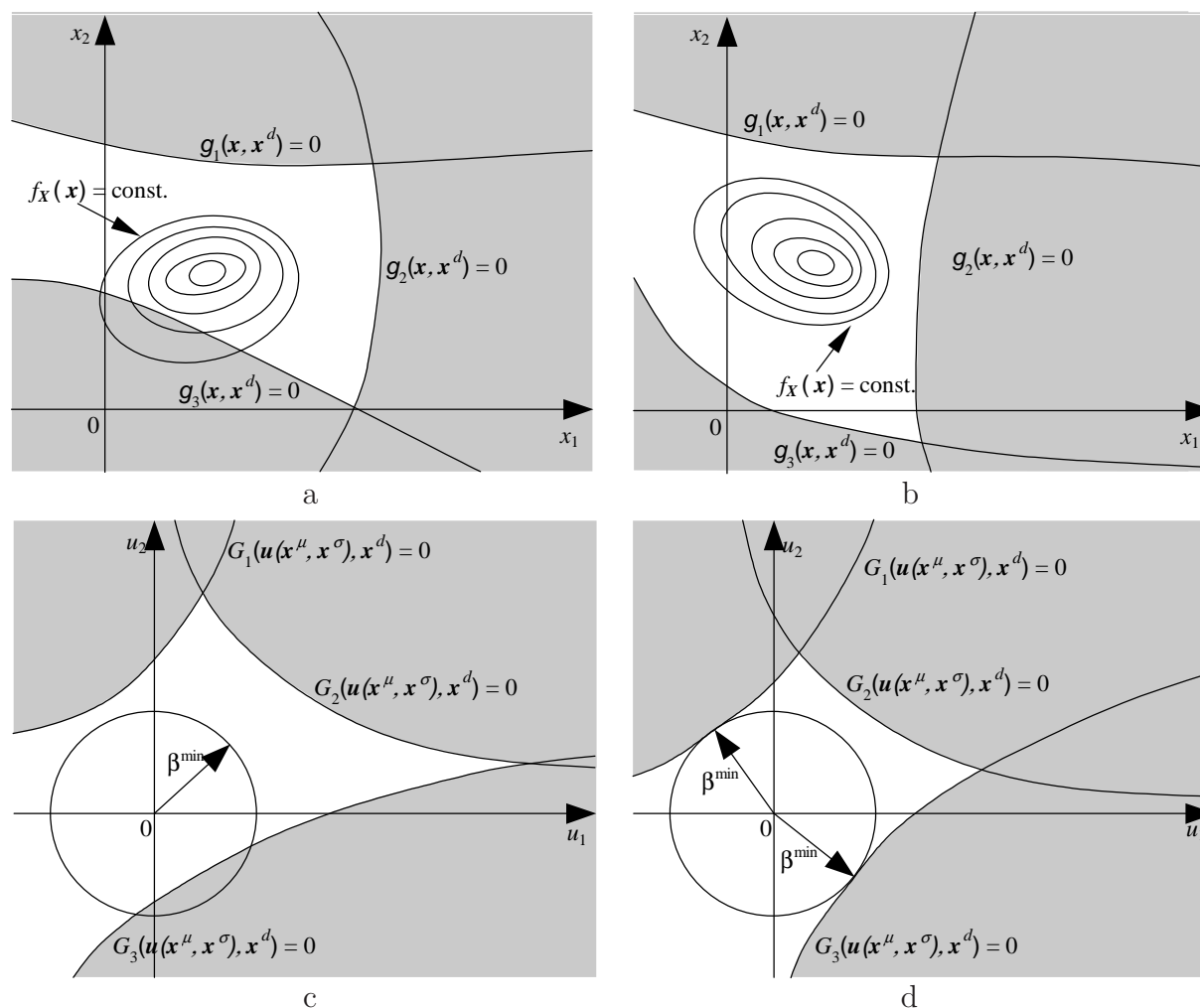
$$\begin{aligned} &\text{znaleźć} \quad \min C_1(\mathbf{x}^\alpha) && \alpha = \{d, \mu, \sigma\}, && (3.2) \\ &\text{przy ograniczeniach:} \end{aligned}$$

$$\beta_i(\mathbf{x}^\alpha) \geq \beta_i^{\min} \quad i = 1, \dots, m_r, \quad (3.3)$$

$$c_j(\mathbf{x}^\alpha) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m_d, \quad (3.4)$$

$${}^l x_k^\alpha \leq x_k^\alpha \leq {}^u x_k^\alpha \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

gdzie  $C_1$  oznacza koszt początkowy konstrukcji,  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, m_r$ , są wskaźnikami niezawodności dla odpowiednio zdefiniowanych funkcji granicznych,  $\beta_i^{\min}$  są minimalnymi, zadanymi przez projektanta, wartościami tych wskaźników,  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, m_d$  są ograniczeniami deterministycznymi, a  ${}^l x_k^\alpha$  i  ${}^u x_k^\alpha$ ,  $k = 1, \dots, n$ , odpowiednio, dolnymi i górnymi granicami zmienności zmiennych projektowych. W literaturze angielskiej takie sformułowanie zadania optymalizacji niezawodnościowej nazywane jest ‘elemental reliability-based optimization’ dla podkreślenia, że bierze się pod uwagę wiele wskaźników niezawodności elementów w odróżnieniu od optymalizacji niezawodnościowej z ograniczeniem nałożonym na wskaźnik systemowy.



RYŚ. 3.2. Zadanie optymalizacji niezawodnościowej; przestrzeń  $\mathbf{X}$ : a - projekt początkowy, b - projekt optymalny; przestrzeń  $\mathbf{U}$ : c - projekt początkowy, d - projekt optymalny

Ideę zadania optymalizacji niezawodnościowej zaprezentowano w sposób obrazowy na rysunku 3.2. Opis stochastyczny problemu stanowią dwie zmienne losowe  $X_1$  i  $X_2$ . Parametrami projektowymi są wartości średnie oraz odchylenia standardowe tych zmiennych, odpowiednio,  $\mathbf{x}^\mu$  i  $\mathbf{x}^\sigma$  jak również parametry deterministyczne  $\mathbf{x}^d$ . Wzięto pod uwagę trzy funkcje graniczne  $g_1(\mathbf{X})$ – $g_3(\mathbf{X})$ . Na rysunku 3.2a, dla parametrów projektu początkowego, pokazano warstwicę łącznej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , a także obszar bezpieczny i obszar awarii, wyznaczone przez powierzchnie graniczne  $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}^d) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . W sposób jawny zaznaczono zależność tych funkcji od deterministycznych parametrów projektowych  $\mathbf{x}^d$ . Kształt i położenie warstwic funkcji  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  zmieniają się bowiem w trakcie procesu optymalizacji na skutek zmian parametrów projektowych  $\mathbf{x}^\mu$  i  $\mathbf{x}^\sigma$  natomiast wielkość i położenie obszarów awarii może zmieniać się jedynie poprzez zmiany parametrów  $\mathbf{x}^d$ . Transformacja zmiennych  $\mathbf{X}$  do gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathbf{U}$  pociąga za sobą transformację funkcji granicznych,  $g_i[T^{-1}(\mathbf{u})] = G_i(\mathbf{u})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Na rysunku 3.2c przedstawiono układ powierzchni granicznych w przestrzeni

$\mathcal{U}$ , który odpowiada projektowi początkowemu. Przyjmując, że minimalne, dopuszczalne wartości wskaźników niezawodności,  $\beta_i^{\min}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są sobie równe oraz na podstawie geometrycznej interpretacji wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda (zob. punkt 2.2.3) można zauważyć, że ograniczenia 1 i 2 są spełnione w punkcie początkowym natomiast ograniczenie 3 nie jest spełnione. Oznaczając powierzchnie graniczne w przestrzeni standardowej podkreślono jawną zależność funkcji  $G_1$ – $G_3$  od wszystkich parametrów projektowych. Zależność od parametrów  $\mathbf{x}^\mu$  i  $\mathbf{x}^\sigma$  wynika bowiem z zastosowanej transformacji zmiennych. Rozwiązanie problemu optymalizacji z ograniczeniami charakteryzuje się zazwyczaj tym, iż w punkcie optymalnym wszystkie ograniczenia są spełnione i co najmniej jedno z nich jest aktywne. Rozpatrywane w naszym przykładzie powierzchnie graniczne w punkcie optymalnym mogą wyglądać tak jak na rysunku 3.2d, gdzie ograniczenia 1 i 3 są aktywne. Odpowiedni układ powierzchni granicznych w przestrzeni oryginalnej oraz warstwie funkcji  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  pokazano na rysunku 3.2b.

Funkcja kosztu początkowego, (3.2), zaimplementowana w systemie OPTIREL ma następującą postać:

$$C_1(\mathbf{x}^\alpha) = \sum_{i=1}^{n_e} A_i(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^d) l_i(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^d) [1 + \kappa_i(\mathbf{x}^\sigma)], \quad (3.6)$$

gdzie  $A_i$  oraz  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, n_e$ , są, odpowiednio, polami przekrojów i długościami elementów kratownicy, a  $n_e$  jest liczbą elementów. Funkcje  $\kappa_i(\mathbf{x}^\sigma)$ , będące bezwymiarowymi funkcjami odchyłeń standardowych granic plastyczności materiałów, z których zrobiono pręty, pozwalają na uwzględnienie w początkowym koszcie konstrukcji kosztów związanych z zastosowaniem materiałów różnej jakości. Przyjmując wszystkie  $\kappa_i \equiv 0$  otrzymujemy zadanie minimalizacji objętości konstrukcji.

W ramach pracy przyjęto, iż następujące parametry konstrukcji i obciążenia mogą być traktowane jako zmienne losowe:

- moduł Younga materiału poszczególnych prętów,
- granica plastyczności materiału poszczególnych prętów,
- pola przekroju poprzecznego prętów,
- współrzędne kartezjańskie węzłów kratownicy,
- mnożnik obciążenia.

Parametrami projektowymi zadania optymalizacji niezawodnościowej mogą być:

- wartości średnie (w przypadku zmiennych losowych) lub wartości charakterystyczne/obliczeniowe (w przypadku parametrów deterministycznych) pól przekrojów prętów,
- odchylenia standardowe losowych granic plastyczności materiału prętów,
- wartości średnie (w przypadku zmiennych losowych) lub wartości deterministyczne współrzędnych kartezjańskich węzłów kratownicy.

Ograniczenia niezawodnościowe zadania optymalizacji obliczane są dla odpowiednio zdefiniowanych stanów awaryjnych. W pracy przyjęto trzy rodzaje funkcji granicznych:



- funkcja graniczna przemieszczeniowa

$$g(\mathbf{q}(\mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha)) = 1 - \frac{|q_i(\mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha)|}{q^a}, \quad (3.7)$$

gdzie  $q_i$  jest wybranym przemieszczeniem węzłowym, a  $q^a$  pewną wartością dopuszczalną.

- funkcja graniczna naprężeniowa / stateczności lokalnej

$$g(\mathbf{q}(\mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha), \mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha) = 1 - \frac{|\sigma_i(\mathbf{q}(\mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha), \mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha)|}{\sigma_i^a(\mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha)}, \quad (3.8)$$

gdzie  $\sigma_i$  jest naprężeniem w  $i$ -tym elemencie kratownicy, a  $\sigma_i^a$  dopuszczalną wartością naprężenia. Wartość  $\sigma_i^a$  przyjmowana jest jako równa granicy plastyczności  $\sigma^0$  w przypadku prętów rozciąganych, a dla prętów ściskanych jako  $\min(\sigma_i^{cr}, \sigma^0)$ , gdzie  $\sigma_i^{cr}$  jest naprężeniem krytycznym postaci:  $\sigma_i^{cr} = \pi^2 E_i J_i / (A_i l_i^2)$ , gdzie  $E_i$  jest modułem sprężystości materiału  $i$ -tego pręta,  $l_i$  aktualną długością pręta, a  $J_i$  i  $A_i$  odpowiednio momentem bezwładności i polem przekroju poprzecznego. W przeciwieństwie do funkcji przemieszczeniowej, funkcja (3.8) jest zarówno jawną jak i niejawną (poprzez  $\mathbf{q}$ ) funkcją parametrów  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{x}^\alpha$ .

- funkcja graniczna stateczności globalnej

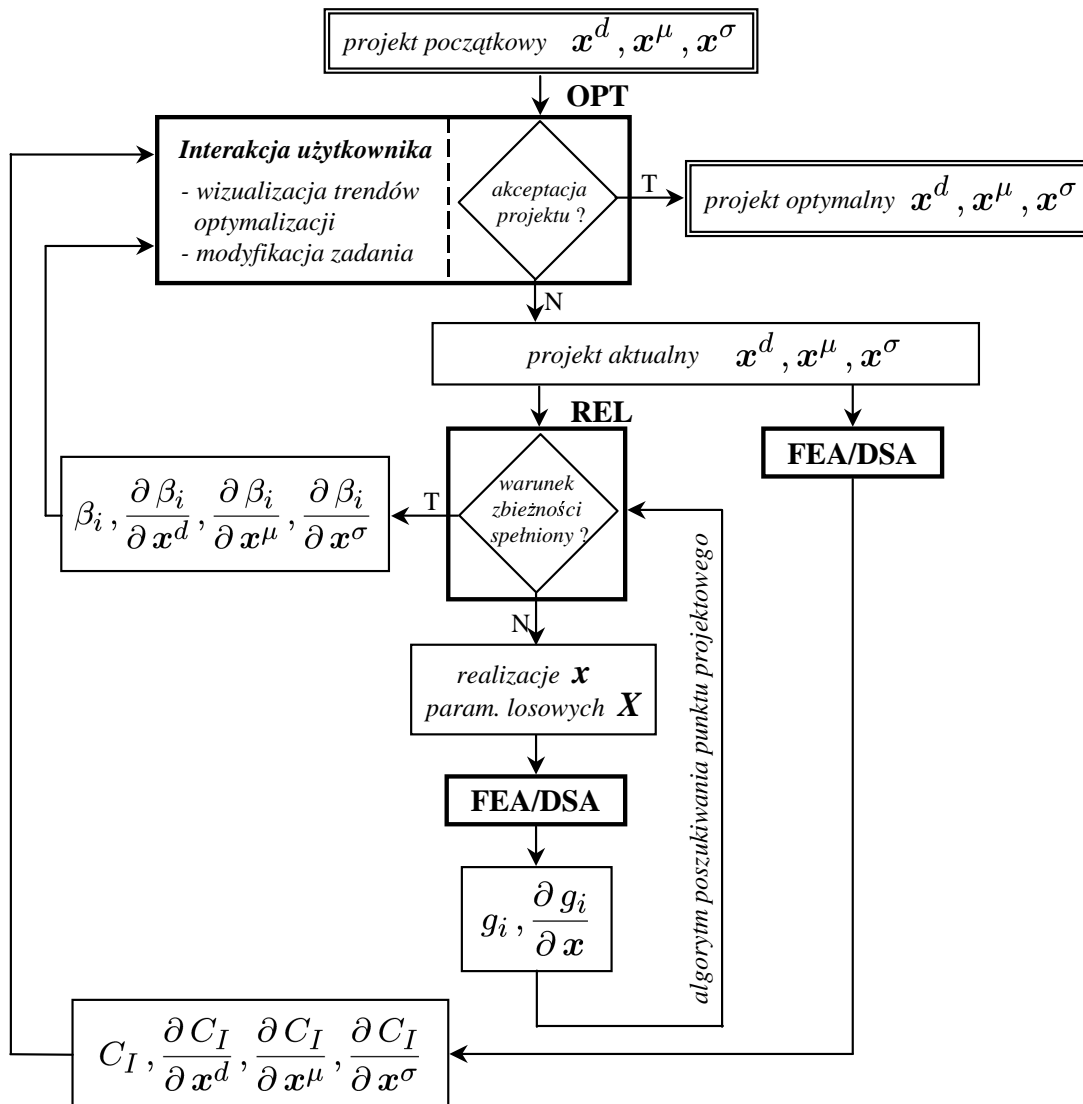
$$g(\lambda_{cr}(\mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha)) = \lambda_{cr}(\mathbf{X}, \mathbf{x}^\alpha) - 1, \quad (3.9)$$

gdzie  $\lambda_{cr}$  jest krytycznym mnożnikiem obciążenia odpowiadającym globalnej utracie stateczności konstrukcji na skutek bifurkacji położenia równowagi bądź przeskoku.

Efektywny system optymalizacji niezawodnościowej musi zawierać wydajny algorytm analizy wrażliwości powyższych funkcji granicznych na wszystkie rozpatrywane parametry losowe oraz projektowe. Dodatek B poświęcony jest omówieniu metod analizy wrażliwości liniowych oraz geometrycznie nieliniowych konstrukcji kratowych, ze szczególnym uwzględnieniem metod analitycznych.

### 3.2.1. Budowa systemu optymalizacji niezawodnościowej

W skład systemu optymalizacji niezawodnościowej umożliwiającego realizację zadania (3.2)–(3.5) wchodzi szereg wyspecjalizowanych modułów obliczeniowych. Są to: program optymalizacyjny (oznaczany dalej skrótem OPT), program do analizy niezawodności konstrukcji (REL) oraz program metody elementów skończonych, rozbudowany o moduł analizy wrażliwości (FEA/DSA). Ponadto, niezbędnymi składnikami efektywnego systemu są moduły interakcji z użytkownikiem oraz wizualizacji trendów procesu optymalizacji. Moduły te zostaną szczegółowo omówione w rozdziale dotyczącym poprawy efektywności procesu optymalizacji niezawodnościowej. Utworzony w niniejszej pracy system OPTIREL umożliwia zarówno optymalizację interaktywną, jak i automatyczną. Jego organizację oraz schemat działania pokazano na rysunku 3.3. Grubszą linią zaznaczono wymienione wyżej główne moduły.



RYS. 3.3. Schemat systemu optymalizacji niezawodnościowej - OPTIREL

Jako moduł OPT przyjęto, uznawany obecnie za jeden z najefektywniejszych, algorytm rekurencyjnego programowania kwadratowego NLPQL [106]. Zasada działania i charakterystyczne elementy tego algorytmu opisane zostały w punkcie A.1.3 dodatku poświęconego algorytmom optymalizacyjnym optymalizacji niezawodnościowej.

Moduł REL to komercyjny system analizy niezawodności COMREL [12]. Wartości oraz gradienty wskaźników niezawodności  $\beta$  obliczane są przy użyciu metod pierwszego i drugiego rzędu (por. punkty 2.3.3 i 2.3.4) oraz metody MVFO (por. punkt 2.3.5). W trakcie procesu optymalizacji odchylenia standardowe zmiennych losowych, których wartości średnie są parametrami projektowymi, mogą mieć wartość stałą (zazwyczaj jest tak w przypadku parametrów kształtu) bądź zmieniać się przy założeniu stałego współczynnika zmienności  $\nu$  (zazwyczaj w przypadku pól przekrojów prętów). W tym drugim przypadku, gdy  $\tilde{x}_i^\sigma = \nu x_i^\mu$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , wrażliwość wskaźnika niezawodności na zmianę  $x_i^\mu$

obliczać trzeba uwzględniając pochodną  $\beta$  względem  $\tilde{x}_i^\sigma$

$$\frac{d\beta}{dx_i^\mu} = \frac{\partial\beta}{\partial x_i^\mu} + \nu \frac{\partial\beta}{\partial \tilde{x}_i^\sigma}. \quad (3.10)$$

Występujące po prawej stronie znaku równości pochodne cząstkowe wskaźnika niezawodności wyliczane są ze wzoru (2.57) i nie wymagają dodatkowego nakładu obliczeniowego. Zmieniające się w procesie optymalizacji odchylenie standardowe  $\tilde{x}_i^\sigma$  jest biernym parametrem projektowym, mimo że w punkcie 3.1, dla przejrzystości, określono parametr bierny jako taki, którego wartość nie zmienia się w czasie optymalizacji. Definicję tę należy więc rozszerzyć o parametry, których wartość jest funkcją parametru czynnego.

Modułem FEA/DSA jest program metody elementów skończonych PSAP-T-NL. Jest to program oparty na rozwijanym w IPPT PAN systemie POLSAP [92], który wzbogacony został o procedury umożliwiające analizę konstrukcji w zakresie dużych przemieszczeń, m.in. metodę stałego promienia [15] umożliwiającą analizę numeryczną w otoczeniu punktu granicznego. W ramach części nieliniowej zaimplementowano moduł analizy wrażliwości. Istniejące już w POLSAP-ie procedury analizy wrażliwości konstrukcji liniowych uzupełniono o obliczanie wrażliwości krytycznego mnożnika obciążenia (zob. dodatek B).

Zadanie optymalizacji niezawodnościowej (3.2)–(3.5) nazywane jest czasem zadaniem optymalizacji zagnieżdżonej (nested) lub dwupoziomowej (two-level). Łatwo jest to zrozumieć analizując schemat na rysunku 3.3. Na każdym kroku optymalizacji należy obliczyć wartości ograniczeń niezawodnościowych, co wiąże się z obliczeniem wskaźników niezawodności. Wewnątrz zewnętrznej pętli optymalizacyjnej znajduje się zatem pętla zadania optymalizacji (2.38), lokalizacji punktu projektowego. Właśnie to zagnieżdżenie sprawia, że koszt obliczeń związany z optymalizacją niezawodnościową jest bardzo wysoki. Znajdujący się wewnątrz obydwu pętli program metody elementów skończonych oraz analizy wrażliwości konstrukcji nieliniowych wykonywany być musi w zależności od liczby parametrów projektowych i zmiennych losowych oraz liczby ograniczeń niezawodnościowych od kilkuset do kilkunastu tysięcy razy. Widać stąd, że kluczowym elementem efektywności systemu optymalizacji niezawodnościowej jest efektywna metoda analizy wrażliwości. Liczenie wrażliwości metodą różnic skończonych praktycznie przekreśla przydatność systemu (por. [64, 114]). Dlatego też w OPTIREL-u do analizy wrażliwości używa się analitycznej metody układu sprzężonego (zob. [63]), która w przypadku geometrycznie nieliniowych konstrukcji jest najefektywniejsza.

### 3.2.2. Inne sformułowania

Wykorzystywane w niniejszej pracy sformułowanie zadania optymalizacji niezawodnościowej (3.2)–(3.5) jest najczęściej stosowanym sformulowaniem tego problemu. W literaturze spotyka się także inne, alternatywne sformułowania.

Jednym z nich jest minimalizacja objętości / kosztu początkowego konstrukcji z uwzględ-

dnieniem jej niezawodności jako systemu:

$$\text{znaleźć } \min C_1(\mathbf{x}^\alpha) \quad \alpha = \{d, \mu, \sigma\}, \quad (3.11)$$

przy ograniczeniach:

$$\beta_{sys}(\mathbf{x}^\alpha) \geq \beta^{\min}, \quad (3.12)$$

$$c_i(\mathbf{x}^\alpha) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m_d, \quad (3.13)$$

$$x_j^l \leq x_j^\alpha \leq x_j^u \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.14)$$

gdzie  $\beta_{sys}$  jest systemowym wskaźnikiem niezawodności. W analizie niezawodności konstrukcji jako systemu rozpatruje się zazwyczaj dwa rodzaje zagadnień: (1) zagadnienie jednoczesnego uwzględnienia wielu funkcji granicznych oraz (2) zagadnienie wielu możliwych sekwencji awarii poszczególnych elementów prowadzących do zniszczenia całej konstrukcji. Oba te zagadnienia wymagają znajomości macierzy korelacji poszczególnych funkcji zniszczenia co w przypadku większości rzeczywistych konstrukcji jest bardzo trudne lub wręcz niewykonalne. Uwzględnienie wzajemnej zależności tych funkcji konieczne jest dla w miarę dokładnego oszacowania prawdopodobieństwa awarii systemu (zob. [95]). Rozpatrywanie niezawodności konstrukcji jako systemu w podejściu (2) wiąże się z koniecznością wygenerowania dominujących sekwencji zniszczenia co jest możliwe jedynie w przypadku niezbyt złożonych konstrukcji, przyjmując dość restrykcyjne założenia upraszczające dotyczące ich pracy.

W niektórych pracach zadanie optymalizacji niezawodnościowej formułuje się jako zadanie minimalizacji całkowitego kosztu budowy i użytkowania konstrukcji, zob. np. [116]. Na koszt ten składają się koszt początkowy (projektu, materiału i wykonania), koszty inspekcji i napraw, koszty awarii oraz koszt zdemontowania i usunięcia konstrukcji po zakończeniu okresu eksploatacji. Jeśli uwzględnić jedynie koszt materiału oraz koszty awarii (przyjmując, że pozostałe koszty są w przybliżeniu stałe), funkcja kosztu całkowitego może mieć postać

$$C_T(\mathbf{x}^\alpha) = C_I(\mathbf{x}^\alpha) + \sum_{i=1}^{m_r} C_F^i \Phi(-\beta_i(\mathbf{x}^\alpha)), \quad (3.15)$$

gdzie przez  $C_F^i$  oznaczono koszt związany z awarią odpowiadającą  $i$ -temu spośród  $m_r$  warunków granicznych. Wartości  $C_F^i$  przyjmowane być mogą zazwyczaj jedynie z pewnym przybliżeniem gdyż uwzględniać muszą trudno mierzalne, społeczne i etyczne aspekty awarii konstrukcji, związane nierzadko z określeniem ekonomicznych konsekwencji utraty ludzkiego życia. Ponadto, ponieważ prawdopodobieństwo awarii rzeczywistych konstrukcji inżynierskich jest bardzo małe (zazwyczaj rzędu  $10^{-7} \div 10^{-4}$ ), to istotne jest uwzględnienie jedynie takich potencjalnych awarii, dla których odpowiadające wartości  $C_F^i$  są o kilka rzędów wielkości większe od kosztu początkowego  $C_I$ .

Inną grupę stanowią sformułowania optymalizacji niezawodnościowej jako zadania optymalizacji wielokryterialnej (wektorowej). Sformułowania takie są naturalną konsekwencją wielokryterialnej postaci większości problemów projektowania konstrukcji. Ponieważ cele procesu projektowania są zazwyczaj konfliktowe, to nie można w przypadku optymalizacji

wielokryterialnej mówić o istnieniu jednego rozwiązania optymalnego. Rozwiązanie takie godzić musi np. dążenie do jednoczesnej minimalizacji kosztu i maksymalizacji niezawodności konstrukcji. Zadanie wielokryterialnej optymalizacji niezawodnościowej zapisać można w następującej postaci, (por. [43])

$$\text{znaleźć } \min \{C_1(\mathbf{x}^\alpha), -\beta_1(\mathbf{x}^\alpha), \dots, -\beta_m(\mathbf{x}^\alpha)\}, \quad (3.16)$$

przy ograniczeniach:

$$c_i(\mathbf{x}^\alpha) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m_d, \quad (3.17)$$

$$x_j^l \leq x_j^\alpha \leq x_j^u \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.18)$$

gdzie przez (3.16) oznaczono minimalizację wektora celów, zawierającego koszt początkowy oraz wskaźniki niezawodności elementów dane z ujemnym znakiem. Wskaźniki elementów, odpowiadające  $m$  warunkom granicznym zastąpić można jednym wskaźnikiem systemowym. Rozwiązanie,  $\hat{\mathbf{x}}^\alpha$ , powyższego zadania optymalizacji, charakteryzujące się tym, że wartość żadnej z funkcji celu nie może być już dalej zmniejszona (przy przejściu do punktu sąsiedniego) bez zwiększenia wartości pozostałych celów, nazywane jest rozwiązaniem kompromisowym (optymalnym w sensie Pareto). Jedną z metod wyznaczania zbioru punktów Pareto-optymalnych jest zamiana zadania wektorowego na szereg zadań skalarnych, konstruowanych przez zatrzymywanie jednej funkcji celu z wektora (3.16) i przenoszeniu pozostałych do ograniczeń typu równościowego. Rozwiązując następnie zadania optymalizacji skalarnej dla różnych wartości ograniczeń otrzymuje się kolejne rozwiązania kompromisowe. Każdy ze zbioru punktów kompromisowych może być rozwiązaniem optymalnym jeśli weźmie się pod uwagę dodatkowe preferencje przy wyborze rozwiązania. Jednym ze sposobów wyboru rozwiązania preferowanego jest maksymalizacja liniowej funkcji użyteczności postaci

$$W(\hat{\mathbf{x}}^\alpha) = -w_0 C_1(\hat{\mathbf{x}}^\alpha) + \sum_{i=1}^m w_i \beta_i(\hat{\mathbf{x}}^\alpha), \quad (3.19)$$

w której  $w_0, \dots, w_m$  są współczynnikami wagowymi.

Jak to zostało podkreślone przy omawianiu schematu organizacji systemu optymalizacji niezawodnościowej, (zob. rys. 3.3), dwupoziomowa natura tej optymalizacji wiąże się z bardzo dużym nakładem obliczeń numerycznych. Jednym z pomysłów na poprawę efektywności procesu obliczeniowego jest nowe, jednopoziomowe (one-level) sformułowanie zadania optymalizacji niezawodnościowej. W ciągu ostatnich kilku lat pojawiło się wiele prac, w których przedstawiono propozycje takich właśnie sformułowań, zob. np. [23, 37, 69, 70, 80]. W przeciwieństwie do sformułowania dwupoziomowego, proces poszukiwania projektu optymalnego oraz lokalizacji punktów projektowych odpowiadających ograniczeniom niezawodnościowym odbywa się jednocześnie w ramach jednej, wspólnej pętli optymalizacyjnej. Parametry projektowe zadania dwupoziomowego oraz zmienne losowe tworzą teraz jeden zbiór parametrów projektowych zadania jednopoziomowego. Poniżej przedstawiono jednopoziomowe sformułowanie optymalizacji niezawodnościowej

zaprezentowane w pracy Kuschela i Rackwitz [69], rozbudowane jednak o możliwość jednoczesnego uwzględnienia wielu ograniczeń niezawodnościowych. Funkcją celu jest tutaj funkcja kosztu całkowitego (3.15). Sformułowanie to ma następującą postać:

$$\text{znaleźć } \min C_T(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m_r}, \mathbf{x}^\alpha) = C_I(\mathbf{x}^\alpha) + \sum_{i=1}^{m_r} C_F^i \Phi(-\text{sign}[G^i(\mathbf{0})] \|\mathbf{u}^i\|), \quad (3.20)$$

przy ograniczeniach:

$$G^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{x}^\alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, m_r, \quad (3.21)$$

$$(\mathbf{u}^i)^T \nabla_{\mathbf{u}} G^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{x}^\alpha) + \|\mathbf{u}^i\| \|\nabla_{\mathbf{u}} G^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{x}^\alpha)\| = 0, \quad i = 1, \dots, m_r, \quad (3.22)$$

$$\text{sign}[G^i(\mathbf{0})] \|\mathbf{u}^i\| \geq \beta_i^{\min}, \quad i = 1, \dots, m_r, \quad (3.23)$$

$$c_j(\mathbf{x}^\alpha) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m_d, \quad (3.24)$$

$$l_k^\alpha \leq x_k^\alpha \leq u_k^\alpha \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.25)$$

$$l_r^i \leq T(u_r^i) \leq u_r^i \quad i = 1, \dots, m_r, \quad r = 1, \dots, n_s. \quad (3.26)$$

Jak widać, oprócz parametrów  $\mathbf{x}^\alpha$ , parametrami projektowymi powyższego zadania optymalizacji jest  $m_r$  realizacji wektora zmiennych losowych w gaussowskiej przestrzeni standardowej,  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m_r}$ . Rozwiązaniem tego zadania jest bowiem optymalny wektor  $\mathbf{x}^\alpha$ , a także punkty projektowe  $(\mathbf{u}^1)^*, \dots, (\mathbf{u}^{m_r})^*$  odpowiadające wskaźnikom niezawodności  $\beta_1, \dots, \beta_{m_r}$  dla konstrukcji optymalnej. Warto jest przyjrzeć się dokładniej funkcji celu i ograniczeniom. Konstruując funkcję (3.20) wykorzystano geometryczną interpretację wskaźnika niezawodności pierwszego rzędu jako najmniejszej odległości od powierzchni granicznej (por. (2.52)). Funkcje  $G^i(\mathbf{U}^i)$ ,  $i = 1, \dots, m_r$  są funkcjami granicznymi w przestrzeni  $\mathbf{U}$ . Ograniczenia (3.21) i (3.22) mają zapewnić zbieżność parametrów  $\mathbf{u}^i$  do odpowiednich punktów projektowych  $(\mathbf{u}^i)^*$  i wynikają z warunków Kuhna-Tuckera dla zadania (2.38). Można łatwo sprawdzić, że warunek (3.22) jest spełniony, gdy gradient powierzchni granicznej względem zmiennych losowych w punkcie  $\mathbf{u}^i$ ,  $\nabla_{\mathbf{u}} G^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{x}^\alpha)$ , jest współliniowy z wektorem  $\mathbf{u}^i$ , czyli gdy punkt ten jest punktem projektowym (zob. komentarz za wzorem (2.53)). Podobnie jak w funkcji celu, w ograniczeniach niezawodnościowych (3.23) wykorzystano definicję wskaźnika niezawodności (2.52). Ostatnie z ograniczeń, (3.26), wyrażają przedziały zmienności realizacji zmiennych losowych. Ponieważ przedziały te określa się zazwyczaj w przestrzeni oryginalnej, przez  $T(u_r^i)$  oznaczono transformacje do przestrzeni  $\mathcal{X}$   $r$ -tej spośród  $n_s$  zmiennych losowych wektora  $\mathbf{u}^i$ .

Niewątpliwą zaletą sformułowania jednopoziomowego jest możliwość stosowania standardowych algorytmów programowania nieliniowego bez konieczności budowy bardziej złożonych systemów optymalizacji dwupoziomowej. W cytowanych wcześniej pracach pokazano również, na przykładach prostych konstrukcji, zawierających kilka zmiennych losowych oraz funkcje graniczne będące jawnymi funkcjami tych zmiennych, że sformułowanie to jest bardziej efektywne obliczeniowo niż odpowiadające mu sformułowanie dwupoziomowe. Z zadaniem optymalizacji niezawodnościowej w postaci (3.20)–(3.26) wiąże się jednak kilka poważnych ograniczeń, które zdaniem autora uniemożliwiają zastosowanie tego podejścia w optymalizacji niezawodnościowej rzeczywistych, złożonych konstrukcji inżynier-



skich i które zadecydowały o wyborze i udoskonalaniu w niniejszej pracy sformułowania dwupoziomowego. Ograniczenia te są następujące:

- iteracyjne rozwiązanie zadania optymalizacji za pomocą efektywnych algorytmów gradientowych wymaga obliczania pochodnych funkcji celu oraz ograniczeń względem parametrów projektowych. Występujące w ograniczeniach (3.22) gradienty funkcji granicznych powodują zatem konieczność liczenia drugich pochodnych tych funkcji. Jest to najczęściej możliwe jedynie przy pomocy różnic skończonych, co wydłuża bardzo znacznie czas obliczeń oraz zmniejsza dokładność i utrudnia zbieżność procesu optymalizacji.
- znacznie zwiększa się wymiar zadania optymalizacji. Liczba parametrów projektowych zadania optymalizacji jednopoziomowej, które odpowiada zadaniu dwupoziomowemu o  $n$  parametrach projektowych,  $n_s$  zmiennych losowych i  $m_r$  ograniczeniach niezawodnościowych wynosi  $n + n_s \cdot m_r$ . Tak więc małe zadanie dwupoziomowe z 10 zmiennymi losowymi, których wartości średnie są parametrami projektowymi i z 10 ograniczeniami niezawodnościowymi ma w wersji jednopoziomowej 110 parametrów projektowych - zbyt wiele żeby zastosować efektywne gradientowe algorytmy SQP (zob. dodatek A).
- transformacja z przestrzeni  $\mathcal{U}$  do  $\mathcal{X}$  występuje w ograniczeniach w sposób jawny, co dodatkowo wydłuża czas obliczeń.

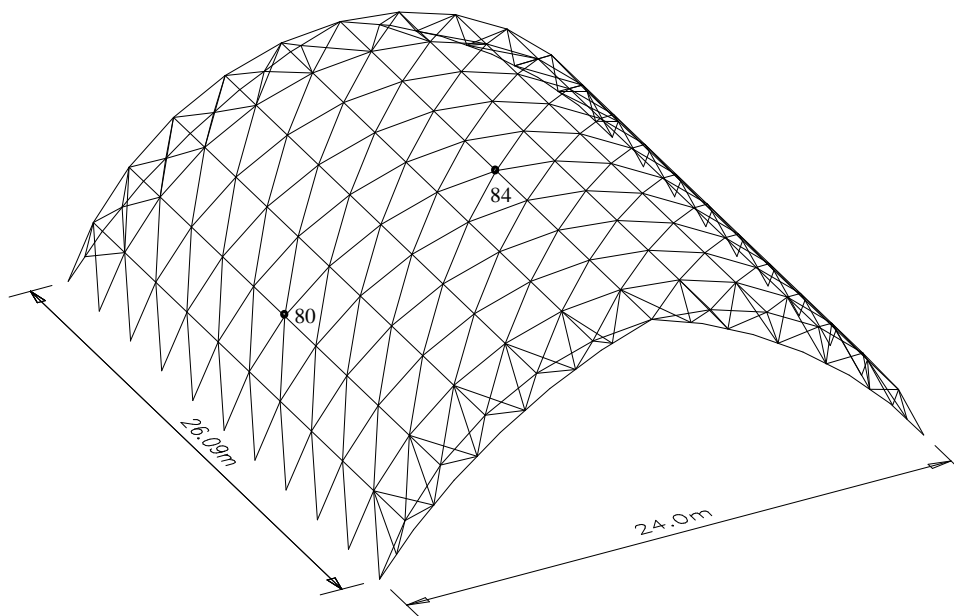
### 3.3. System optymalizacji niezawodnościowej jako narzędzie projektanta

Dominującą obecnie praktykę projektowania typowych konstrukcji inżynierskich określić można jako optymalizację deterministyczną w oparciu o ustalone na podstawie odpowiednich norm projektowych wielkości obciążeń, wytrzymałości i parametrów materiałowych. Termin “optymalizacja” nie wiąże się najczęściej z wykorzystywaniem numerycznych algorytmów optymalizacyjnych, lecz raczej z ‘ręcznym’, iteracyjnym modyfikowaniem projektu, aż do spełnienia wymogów nałożonych przez normę. Przyjęcie ‘normowego’ podejścia do zagadnień losowości parametrów konstrukcji oraz obciążeń (przyjęcie metod probabilistycznych pierwszego poziomu) jest pewnym kompromisem pomiędzy uwzględnieniem rzeczywistego, bardziej złożonego stochastycznego opisu problemu, a efektywnością procesu projektowania. Jednak rozwój teorii niezawodności konstrukcji, nieustanny wzrost mocy obliczeniowej współczesnych komputerów oraz ich ogólna dostępność, jak również rozwój wyspecjalizowanego oprogramowania, pozwalają mieć nadzieję na to, że w przyszłości podstawowym narzędziem projektanta będzie komputerowy system optymalizacji niezawodnościowej. W celu zilustrowania obu metod projektowania oraz porównania otrzymywanych wyników rozpatrzono przykład minimalizacji ciężaru przestrzennej konstrukcji kratowej w kształcie powłoki cylindrycznej, przedstawionej na rysunku 3.4. W następnym przykładzie zaprezentowano zadanie optymalizacji kosztu początkowego wspornika kratowego, w którym pokazano jak w ramach optymalizacji niezawodnościowej

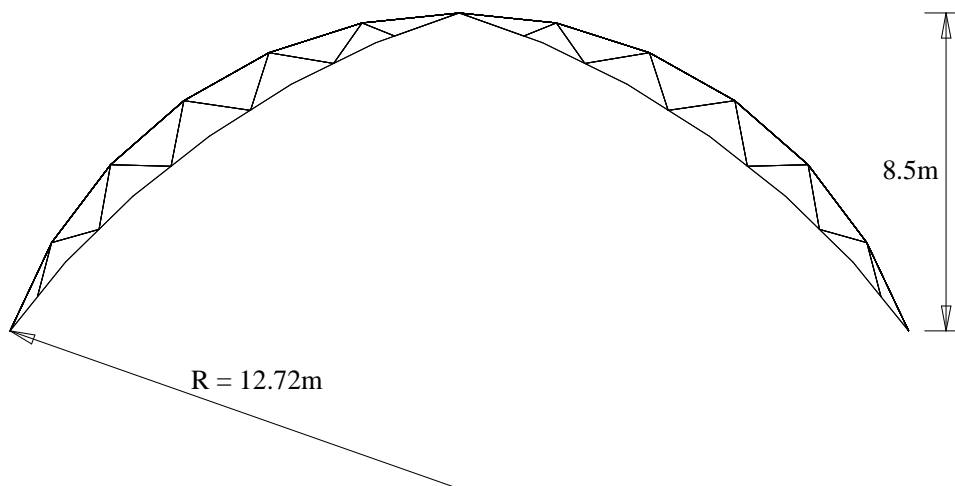


uwzględnić można koszt związany z jakością materiału.

### Przykład 3.1



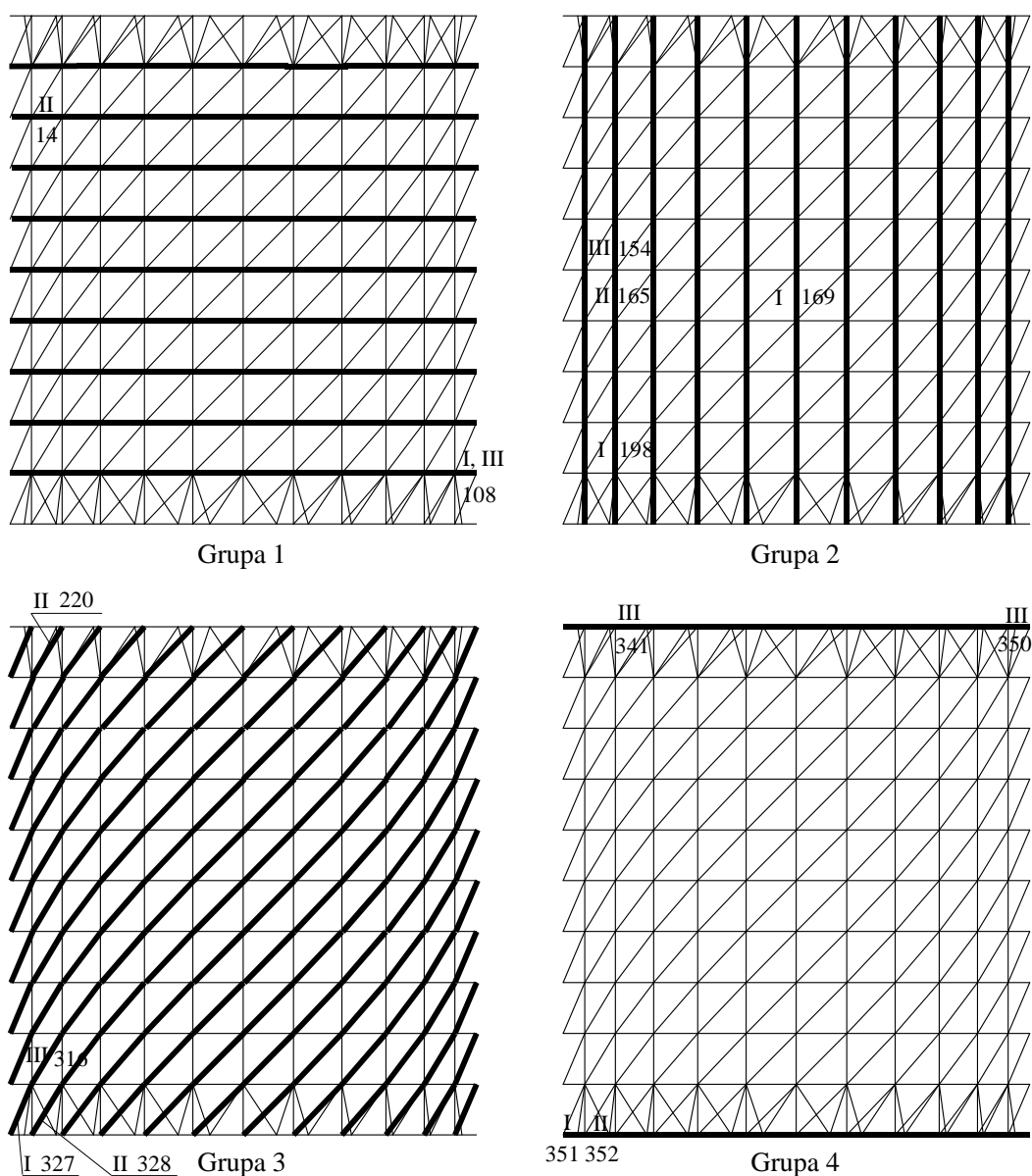
Rys. 3.4. 474-elementowa kratownica przestrzenna w kształcie powłoki cylindrycznej



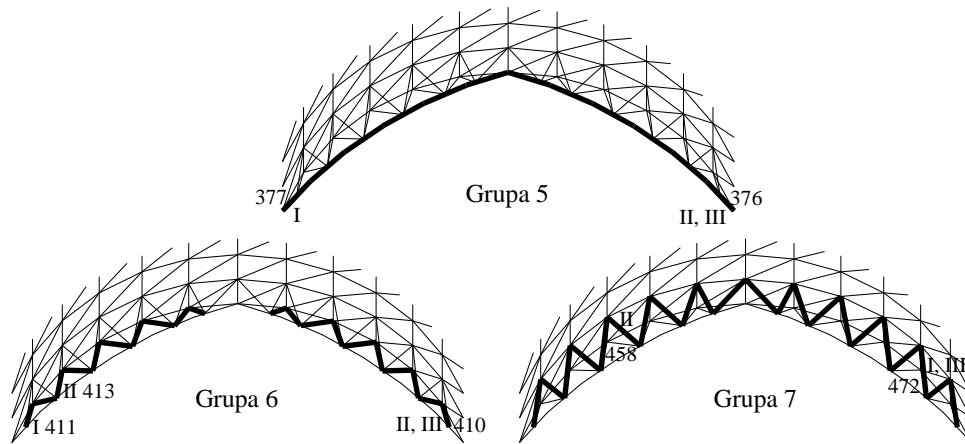
Rys. 3.5. Widok z przodu; stężenie w postaci łuku trójprzegubowego

Kratownica składa się z 474 prętów o przekroju rurowym połączonych ze sobą w 167 węzłach. Z przodu i z tyłu konstrukcja wzmocniona jest przeponami w postaci łuków trójprzegubowych (rys. 3.5). Dolne węzły zamocowane są przegubowo do podłoża. Parametrami projektowymi zadania optymalizacji są pola przekrojów 7 grup prętów, na które podzielono elementy konstrukcji. Grupy te zaznaczono na rysunkach 3.6 i 3.7. Przyjęto, że kratownica stanowić będzie konstrukcję nośną magazynu, który znajdować się

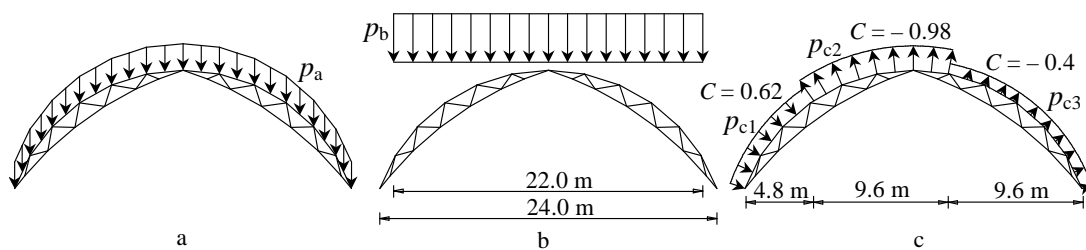
będzie w północno-wschodniej Polsce. Wyodrębniono trzy główne źródła obciążeń konstrukcji: obciążenie stałe od ciężaru własnego pokrycia magazynu, obciążenie śniegiem oraz obciążenie od parcia i ssania wiatru (zob. rys. 3.8). Konstrukcja analizowana jest przy założeniu liniowo-sprężystego modelu materiału oraz małych przemieszczeń. Poniżej wymieniono parametry losowe zadania optymalizacji niezawodnościowej oraz odpowiadające im wartości charakterystyczne oraz obliczeniowe, przyjęte w zadaniu optymalizacji deterministycznej. Na początek przyjęto, że pola przekrojów elementów są wielkościami deterministycznymi i równe są swoim wartościom średnim (norma PN-90/B-03200 dotycząca konstrukcji stalowych nie przewiduje częściowych współczynników bezpieczeństwa uwzględniających odchylenia wymiarów przekroju poprzecznego od założonych).



RYS. 3.6. Grupy elementów 1-4; zaznaczono pręty z ograniczeniami naprężeniowymi



RYS. 3.7. Grupy elementów 5-7; zaznaczono pręty z ograniczeniami naprężeniowymi



RYS. 3.8. Podstawowe schematy obciążenia: a - obciążenie stałe, b - obciążenie śniegiem, c - obciążenie wiatrem

#### • Granica plastyczności - $\sigma^0$

Przyjęto, że elementy konstrukcji wykonane są ze stali St3SX, której granica plastyczności jest zmienną losową o rozkładzie *logarytmiczno-normalnym* o wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym równym, odpowiednio,

$$\mathbb{E}[\sigma^0] = 300\,000 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_{\sigma^0} = 30\,000 \text{ kN/m}^2.$$

Na podstawie (2.105) i (2.106) oraz przyjmując  $\gamma_s = 1.1$  wartość charakterystyczna oraz wartość obliczeniowa granicy plastyczności wynoszą

$$\begin{aligned} \sigma_k^0 &= \mathbb{E}[\sigma^0] - 2\sigma_{\sigma^0} = 240\,000 \text{ kN/m}^2, \\ \sigma_d^0 &= \sigma_k^0/1.1 = 218\,000 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

#### • Moduł sprężystości - $E$

Przyjęto rozkład *logarytmiczno-normalny* o momentach

$$\mathbb{E}[E] = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_E = 5.0 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2.$$

W obliczeniach przeprowadzanych zgodnie z zaleceniami normy używa się jedynie wartości charakterystycznej modułu sprężystości

$$E_k = \mathbb{E}[E] - 2\sigma_E = 2.0 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2.$$

- **Obciążenie stałe** (rys. 3.8a), **mnożnik schematu obciążenia** -  $\lambda_a$

Przyjęto, że obciążenie od ciężaru własnego pokrycia magazynu oraz ciężaru własnego konstrukcji jest zmienną losową o rozkładzie *normalnym*. Zastosowano tu pewne uproszczenie przyjmując, iż zmiany obciążenia spowodowane zmieniającymi się w trakcie optymalizacji wymiarami przekrojów poprzecznych elementów są nieznaczne w porównaniu do obciążeń maksymalnych. Wartość średnia oraz odchylenie standardowe obciążenia stałego na m<sup>2</sup> powierzchni połączenia wynoszą

$$\mathbb{E}[p_a] = 0.4 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_{p_a} = 0.04 \text{ kN/m}^2,$$

a co za tym idzie wartość średnia i odchylenie standardowe mnożnika obciążenia są odpowiednio równe

$$\mathbb{E}[\lambda_a] = 1.0, \quad \sigma_{\lambda_a} = 0.1.$$

Wartość charakterystyczna i wartość obliczeniowa  $p_a$  po przyjęciu współczynnika obciążenia  $\gamma_f = 1.15$  wynoszą

$$p_a^k = \mathbb{E}[p_a] + 2\sigma_{p_a} = 0.48 \text{ kN/m}^2, \\ p_a^d = p_a^k \cdot 1.15 = 0.55 \text{ kN/m}^2.$$

- **Obciążenie śniegiem** (rys. 3.8b), **mnożnik schematu obciążenia** -  $\lambda_b$

Obciążenie śniegiem ustalane jest na podstawie normy PN-80/B-02010 jako iloczyn obciążenia śniegiem gruntu,  $Q$ , i współczynnika kształtu dachu  $C$ . Przyjęto, że rozkład prawdopodobieństwa obciążenia śniegiem gruntu jest rozkładem Frecheta o wartości średniej i odchyleniu standardowym, równym dla III strefy obciążenia śniegiem

$$\mathbb{E}[Q] = 0.7 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_Q = 0.14 \text{ kN/m}^2.$$

Wartość charakterystyczną  $Q^k$  przyjęto jako kwantyl na poziomie 98%. Wynosi ona  $Q^k = 1.1 \text{ kN/m}^2$ . Współczynnik  $C$  dla dachu walcowego równy jest 0.8. Ostatecznie dla zadania optymalizacji niezawodnościowej

$$\mathbb{E}[p_b] = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_{p_b} = \sqrt{0.8^2 \cdot 0.14^2} = 0.11 \text{ kN/m}^2, \\ \mathbb{E}[\lambda_b] = 1.0, \quad \sigma_{\lambda_b} = 0.2,$$

natomiast wartość charakterystyczna i obliczeniowa obciążenia w ‘normowej’ optymalizacji deterministycznej (przyjmując częściowy współczynnik obciążenia śniegiem  $\gamma_f = 1.4$ ) wynoszą, odpowiednio,

$$p_b^k = 0.8 \cdot 1.1 = 0.88 \text{ kN/m}^2, \\ p_b^d = p_b^k \cdot 1.4 = 1.23 \text{ kN/m}^2.$$

- **Obciążenie wiatrem** (rys. 3.8c), **mnożnik schematu obciążenia** -  $\lambda_c$

Według normy PN-77/B-02011 wartość siły parcia oraz ssania wiatru oblicza się ze wzoru

$$p = q C_e C \delta, \tag{3.27}$$

gdzie  $q$  jest ciśnieniem prędkości wiatru,  $C_e$  jest współczynnikiem ekspozycji, który dla terenu otwartego wynosi 1.0,  $C$  jest współczynnikiem aerodynamicznym przyjmowanym w zależności od kierunku wiania wiatru i kształtu budynku, a  $\delta$  jest współczynnikiem działania porywów wiatru, który w przypadku rozpatrywanej konstrukcji wynosi 1.8 (budowla niepodatna na działanie porywów wiatru). Dla dachu walcowego, w zależności od części dachu (zob. rys. 3.8c), współczynnik aerodynamiczny przybiera wartości: 0.62, -0.98 i -0.4, gdzie wartość ujemna oznacza ssanie. Przyjęto, iż ciśnienie  $q$  dla budynku umiejscowionego w I strefie obciążenia wiatrem jest zmienną losową o rozkładzie *Gumbela* o wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym równym

$$\mathbb{E}[q] = 0.17 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_q = 0.034 \text{ kN/m}^2.$$

Wartość charakterystyczna  $q^k$ , przyjęta jako kwantyl na poziomie 98%, oraz wartość obliczeniowa  $q^d$  wynoszą

$$q^k = 0.25 \text{ kN/m}^2, \quad q^d = q^k \gamma_f = 0.25 \cdot 1.3 = 0.33 \text{ kN/m}^2.$$

Na podstawie wzoru (3.27) obliczyć można charakterystyczne i obliczeniowe wartości obciążenia wiatrem dla poszczególnych części połaci dachowej

$$\begin{aligned} p_{c1}^k &= 0.25 \cdot 1.0 \cdot 0.62 \cdot 1.8 = 0.28 \text{ kN/m}^2, & p_{c1}^d &= 0.28 \cdot 1.3 = 0.36 \text{ kN/m}^2, \\ p_{c2}^k &= -0.25 \cdot 1.0 \cdot 0.98 \cdot 1.8 = -0.44 \text{ kN/m}^2, & p_{c2}^d &= -0.44 \cdot 1.3 = -0.57 \text{ kN/m}^2, \\ p_{c3}^k &= -0.25 \cdot 1.0 \cdot 0.4 \cdot 1.8 = -0.18 \text{ kN/m}^2, & p_{c3}^d &= -0.18 \cdot 1.3 = -0.23 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

Wartości średnie obciążenia wiatrem, używane w zadaniu optymalizacji niezawodnościowej, dla poszczególnych części dachu wynoszą, odpowiednio,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p_{c1}] &= 0.17 \cdot 1.0 \cdot 0.62 \cdot 1.8 = 0.19 \text{ kN/m}^2, \\ \mathbb{E}[p_{c2}] &= -0.17 \cdot 1.0 \cdot 0.98 \cdot 1.8 = -0.30 \text{ kN/m}^2, \\ \mathbb{E}[p_{c3}] &= -0.17 \cdot 1.0 \cdot 0.4 \cdot 1.8 = -0.12 \text{ kN/m}^2, \end{aligned}$$

natomiast mnożnik schematu obciążenia,  $\lambda_c$ , jest zmienną losową o rozkładzie *Gumbela* i następujących momentach statystycznych

$$\mathbb{E}[\lambda_c] = 1.0, \quad \sigma_{\lambda_c} = 0.2.$$

Zadanie optymalizacji przeprowadzono dla 3 kombinacji obciążeń podstawowych:

- kombinacja I - obciążenie stałe + obciążenie śniegiem,
- kombinacja II - obciążenie stałe + obciążenie wiatrem,
- kombinacja III - obciążenie stałe + obciążenie śniegiem + obciążenie wiatrem.

Ograniczeniami procesu optymalizacji są ograniczenia przemieszczeniowe typu (3.7) oraz ograniczenia typu naprężeniowego/stateczności lokalnej (3.8). W tabeli 3.1 przedstawiono opis ograniczeń, które dla poszczególnych kombinacji obciążeń nałożono na maksymalne

nr	Ogr. przem.	Ograniczenia naprężeniowe/stateczności lokalnej								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	węzeł 84 $q^a = 5\text{cm}$	el. 108 gr. 1	el. 198 gr. 2	el. 169 gr. 2	el. 327 gr. 3	el. 351 gr. 4	el. 377 gr. 5	el. 411 gr. 6	el. 472 gr. 7	
II	węzeł 80 $q^a = 5\text{cm}$	el. 14 gr. 1	el. 165 gr. 2	el. 328 gr. 3	el. 220 gr. 3	el. 352 gr. 4	el. 376 gr. 5	el. 413 gr. 6	el. 410 gr. 6	el. 458 gr. 7
III	węzeł 80 $q^a = 5\text{cm}$	el. 108 gr. 1	el. 154 gr. 2	el. 316 gr. 3	el. 350 gr. 4	el. 341 gr. 4	el. 376 gr. 5	el. 410 gr. 6	el. 472 gr. 7	

TABLICA 3.1. Ograniczenia projektowe

przemieszczenia pionowe wybranych węzłów (rys. 3.4) oraz naprężenia w najbardziej wytężonych prętach (rysunki 3.6 i 3.7). Ponadto, na zakres zmian pól przekrojów prętów nałożone są ograniczenia wynikające z przesłanek konstrukcyjnych. Przyjęto również, że stosunek średnicy wewnętrznej przekrojów rurowych do ich średnicy zewnętrznej jest stały i równy 0.8. Założenie takie potrzebne jest do obliczania momentów bezwładności przekrojów prętów na podstawie znajomości jedynie ich pól przekrojów.

Po zgromadzeniu wszystkich potrzebnych danych, zadania optymalizacji sformułować można następująco:

### Zadanie ‘normowej’ optymalizacji deterministycznej

$$\text{znaleźć } \min C(x_1, \dots, x_7) = C(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^7 x_i l_i, \quad (3.28)$$

przy ograniczeniach:

$$g_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{|q_k(\mathbf{x})|}{q^a} \geq 0, \quad (3.29)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 1 - \frac{|\sigma_i(\mathbf{x})|}{\sigma_i^a(\mathbf{x})} \geq 0, \quad i = 2, \dots, m_s + 1, \quad (3.30)$$

$$5\text{cm}^2 \leq x_j \leq 35\text{cm}^2, \quad j = 1, \dots, 7, \quad (3.31)$$

gdzie zmiennymi projektowymi  $x_1, \dots, x_7$  są pola przekrojów grup prętów zaznaczonych na rysunkach 3.6 i 3.7, przez  $l_i$  oznaczono sumę długości prętów  $i$ -tej grupy,  $q_k(\mathbf{x})$  jest wybranym przemieszczeniem węzła konstrukcji, a  $q^a$  przemieszczeniem dopuszczalnym, które wyspecyfikowano w tabeli 3.1,  $\sigma_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 2, \dots, m_s + 1$ , jest naprężeniem w elemencie, któremu odpowiada ograniczenie naprężeniowe/stateczności lokalnej o numerze  $i$ ,  $m_s$  jest liczbą ograniczeń tego typu rozpatrywanych dla danej kombinacji obciążeń, a  $\sigma_i^a(\mathbf{x})$  jest naprężeniem dopuszczalnym równym wartości obliczeniowej granicy plastyczności,  $\sigma_k^0$ , dla prętów rozciąganych oraz krępych prętów ściskanych lub eulerowskiemu naprężeniu krytycznemu w przypadkach prętów ściskanych gdy  $\sigma_k^0 > \sigma_i^{cr}$ . Jako punkt startowy procesu optymalizacji wybrano wektor

$$\mathbf{x}^{(0)} = [20\text{cm}^2, 20\text{cm}^2, 20\text{cm}^2, 20\text{cm}^2, 20\text{cm}^2, 20\text{cm}^2, 20\text{cm}^2]^T. \quad (3.32)$$

Zgodnie z zaleceniami normy PN-90/B-03200 wartość warunku przemieszczeniowego (3.29) obliczana jest dla obciążeń charakterystycznych (por. (2.110)).

Par.	Opis	Typ rozkładu prawdopodob.	Typ par. projektow.	Wartość początkowa
$x_1$	Pole przekroju prętów grupy 1	determinist.	$x_1^d$	20.0 cm <sup>2</sup>
$x_2$	Pole przekroju prętów grupy 2	determinist.	$x_2^d$	20.0 cm <sup>2</sup>
$x_3$	Pole przekroju prętów grupy 3	determinist.	$x_3^d$	20.0 cm <sup>2</sup>
$x_4$	Pole przekroju prętów grupy 4	determinist.	$x_4^d$	20.0 cm <sup>2</sup>
$x_5$	Pole przekroju prętów grupy 5	determinist.	$x_5^d$	20.0 cm <sup>2</sup>
$x_6$	Pole przekroju prętów grupy 6	determinist.	$x_6^d$	20.0 cm <sup>2</sup>
$x_7$	Pole przekroju prętów grupy 7	determinist.	$x_7^d$	20.0 cm <sup>2</sup>
$X_8$	Granica plastyczności stali prętów grupy 1	log-normalny	$\tilde{x}_8^\mu$	$3.0 \cdot 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_8^\sigma$	$3.0 \cdot 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
$X_9$	Granica plastyczności stali prętów grupy 2	log-normalny	$\tilde{x}_9^\mu$	$3.0 \cdot 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_9^\sigma$	$3.0 \cdot 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
$X_{10}$	Granica plastyczności stali prętów grupy 3	log-normalny	$\tilde{x}_{10}^\mu$	$3.0 \cdot 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{10}^\sigma$	$3.0 \cdot 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
$X_{11}$	Granica plastyczności stali prętów grupy 4	log-normalny	$\tilde{x}_{11}^\mu$	$3.0 \cdot 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{11}^\sigma$	$3.0 \cdot 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
$X_{12}$	Granica plastyczności stali prętów grupy 5	log-normalny	$\tilde{x}_{12}^\mu$	$3.0 \cdot 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{12}^\sigma$	$3.0 \cdot 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
$X_{13}$	Granica plastyczności stali prętów grupy 6	log-normalny	$\tilde{x}_{13}^\mu$	$3.0 \cdot 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{13}^\sigma$	$3.0 \cdot 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
$X_{14}$	Granica plastyczności stali prętów grupy 7	log-normalny	$\tilde{x}_{14}^\mu$	$3.0 \cdot 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{14}^\sigma$	$3.0 \cdot 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
$X_{15}$	Moduł sprężystości	log-normalny	$\tilde{x}_{15}^\mu$	$2.1 \cdot 10^8$ kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{15}^\sigma$	$5.0 \cdot 10^6$ kN/m <sup>2</sup>
$X_{16}$	Mnożnik obciążenia stałego $\lambda_1$	normalny	$\tilde{x}_{16}^\mu$	1.0
			$\tilde{x}_{16}^\sigma$	0.1
$X_{17}$	Mnożnik obciążenia śniegiem $\lambda_2$ (nie występuje w opt. z komb. obc. II)	Frecheta	$\tilde{x}_{17}^\mu$	1.0
			$\tilde{x}_{17}^\sigma$	0.2
$X_{18}$	Mnożnik obciążenia wiatrem $\lambda_3$ (dla opt. z komb. obc. II jest to $X_{17}$ )	Gumbela	$\tilde{x}_{18}^\mu$	1.0
			$\tilde{x}_{18}^\sigma$	0.2

TABLICA 3.2. Parametry zadania optymalizacji niezawodnościowej

### Zadanie optymalizacji niezawodnościowej

$$\text{znaleźć} \quad \min C(x_1^d, \dots, x_7^d) = C(\mathbf{x}^d) = \sum_{i=1}^7 x_i^d l_i, \quad (3.33)$$

przy ograniczeniach:

$$\beta_1(\mathbf{x}^d) \geq 3.7, \quad (3.34)$$

$$\beta_i(\mathbf{x}^d) \geq 3.7, \quad i = 2, \dots, m_s + 1, \quad (3.35)$$

$$5\text{cm}^2 \leq x_j^d \leq 35\text{cm}^2, \quad j = 1, \dots, 7, \quad (3.36)$$

gdzie  $\beta_1(\mathbf{x}^d)$  jest wskaźnikiem niezawodności odpowiadającym przemieszczeniowemu wa-



runkowi granicznemu (3.29),  $\beta_i(\mathbf{x}^d)$ ,  $i = 2, \dots, m_s + 1$ , wskaźnikami odpowiadającymi warunkom naprężeniowym (3.30), a  $\mathbf{X}$  jest wektorem parametrów losowych. Minimalna wartość wskaźnika  $\beta$ , którą we wszystkich ograniczeniach niezawodnościowych przyjęto równą 3.7 odpowiada prawdopodobieństwu awarii  $P_f = 1.1 \cdot 10^{-4}$  (por. tabela na stronie 19) i można przyjąć, że odpowiada nieznacznym konsekwencjom awarii konstrukcji magazynowej (współczynnik konsekwencji zniszczenia  $\gamma_n = 1.0$  w podejściu ‘normowym’). Punkt startowy procesu optymalizacji dany jest, podobnie jak w przypadku optymalizacji deterministycznej, przez wektor (3.32). W tabeli 3.2, zgodnie z wprowadzoną w punkcie 3.1 konwencją oznaczeń, zebrano wszystkie parametry zadania optymalizacji niezawodnościowej. Początkowa objętość materiału elementów konstrukcji wynosi  $2.659 \text{ m}^3$ .

Optymalizacja deterministyczna					
	Wartość początk.	Projekt optymalny			Wybrany projekt optymalny
		kombinacja I	kombinacja II	kombinacja III	
	1	2	3	4	5
$x_1$	20.00 cm <sup>2</sup>	9.98 cm <sup>2</sup>	6.63 cm <sup>2</sup>	9.34 cm <sup>2</sup>	<b>9.98</b> cm <sup>2</sup>
$x_2$	20.00 cm <sup>2</sup>	7.67 cm <sup>2</sup>	18.50 cm <sup>2</sup>	18.78 cm <sup>2</sup>	<b>18.78</b> cm <sup>2</sup>
$x_3$	20.00 cm <sup>2</sup>	14.95 cm <sup>2</sup>	10.60 cm <sup>2</sup>	13.71 cm <sup>2</sup>	<b>14.95</b> cm <sup>2</sup>
$x_4$	20.00 cm <sup>2</sup>	5.94 cm <sup>2</sup>	9.18 cm <sup>2</sup>	8.00 cm <sup>2</sup>	<b>9.18</b> cm <sup>2</sup>
$x_5$	20.00 cm <sup>2</sup>	12.87 cm <sup>2</sup>	11.76 cm <sup>2</sup>	10.60 cm <sup>2</sup>	<b>12.87</b> cm <sup>2</sup>
$x_6$	20.00 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>	<b>5.00</b> cm <sup>2</sup>
$x_7$	20.00 cm <sup>2</sup>	8.30 cm <sup>2</sup>	6.45 cm <sup>2</sup>	8.11 cm <sup>2</sup>	<b>8.30</b> cm <sup>2</sup>
$C(\mathbf{x})$	2.659 m <sup>3</sup>	1.416 m <sup>3</sup>	1.435 m <sup>3</sup>	1.664 m <sup>3</sup>	<b>1.760</b> m <sup>3</sup>
		start → stop	start → stop	start → stop	I/II/III
$g_1(\mathbf{x})$		0.4970 → <b>0.0000</b>	0.3711 → <b>0.0000</b>	0.2827 → <b>0.0000</b>	0.2082/0.1681/0.0483
$g_2(\mathbf{x})$		0.7420 → <b>0.0000</b>	0.9057 → 0.1462	0.7545 → <b>0.0000</b>	0.0700/0.6202/0.1207
$g_3(\mathbf{x})$		0.8513 → 0.6326	0.7763 → 0.7036	0.7536 → 0.6963	0.8389/0.7266/0.7014
$g_4(\mathbf{x})$		0.8505 → <b>0.0000</b>	0.8581 → 0.7857	0.5275 → <b>0.0000</b>	0.8307/0.8309/0.1546
$g_5(\mathbf{x})$		0.5337 → <b>0.0000</b>	0.7539 → 0.2882	0.8528 → 0.6707	0.2107/0.5784/0.7086
$g_6(\mathbf{x})$		0.8303 → 0.4356	0.8423 → 0.3457	0.8811 → 0.3433	0.6581/0.3091/0.4777
$g_7(\mathbf{x})$		0.3891 → 0.0450	0.8886 → 0.8027	0.4644 → <b>0.0000</b>	0.0552/0.8239/0.1679
$g_8(\mathbf{x})$		0.9213 → 0.5727	0.9672 → 0.8746	0.9310 → 0.6316	0.5773/0.8698/0.6277
$g_9(\mathbf{x})$		0.8233 → <b>0.0000</b>	0.9857 → 0.9193	0.8179 → <b>0.0000</b>	0.0683/0.9212/0.0437
$g_{10}(\mathbf{x})$		–	0.8783 → <b>0.0000</b>	–	–/0.3690/–

TABLICA 3.3. Wyniki optymalizacji deterministycznej

Wyniki zadania optymalizacji deterministycznej zamieszczone zostały w tabeli 3.3. W kolumnach 2, 3 i 4, w górnej części tabeli, wypisano wartości parametrów projektowych odpowiadających projektom optymalnym, odpowiednio dla kombinacji obciążeń 1, 2 i 3. W tych samych kolumnach, w dolnej części tabeli, przedstawiono początkowe wartości ograniczeń (3.29) i (3.30) oraz ich wartości w punkcie optymalnym. Ograniczenia aktywne wyróżnione zostały wytłuszczonym drukiem. Zadaniem projektanta jest teraz wybranie takiego projektu, który byłby bezpieczny dla wszystkich rozpatrywanych kombinacji obciążeń. Ponieważ w naszym przykładzie parametrami projektowymi są jedynie pola przekrojów poprzecznych grup prętów, najprostszym (choć na pewno nie optymal-

nym) możliwym rozwiązaniem jest przyjęcie największych wartości parametrów spośród projektów optymalnych odpowiadających poszczególnym kombinacjom obciążeń. Parametry te wypisane zostały w kolumnie 5. Należało jednak sprawdzić, czy tak wybrany projekt optymalny spełnia ograniczenia wymienione w tabeli 3.1. Obliczone wartości tych ograniczeń przedstawiono w dolnej części kolumny 5. Jak widać, wszystkie ograniczenia są spełnione, a zatem projekt można uznać jako bezpieczny.

Optymalizacja niezawodnościowa					
	Wartość początk.	Projekt optymalny			Wybrany projekt optymalny
		kombinacja I	kombinacja II	kombinacja III	
	1	2	3	4	5
$x_1^d$	20.00 cm <sup>2</sup>	10.71 cm <sup>2</sup>	9.27 cm <sup>2</sup>	10.59 cm <sup>2</sup>	<b>10.71</b> cm <sup>2</sup>
$x_2^d$	20.00 cm <sup>2</sup>	10.02 cm <sup>2</sup>	27.74 cm <sup>2</sup>	28.81 cm <sup>2</sup>	<b>28.81</b> cm <sup>2</sup>
$x_3^d$	20.00 cm <sup>2</sup>	16.13 cm <sup>2</sup>	14.97 cm <sup>2</sup>	16.81 cm <sup>2</sup>	<b>16.81</b> cm <sup>2</sup>
$x_4^d$	20.00 cm <sup>2</sup>	12.96 cm <sup>2</sup>	13.90 cm <sup>2</sup>	13.77 cm <sup>2</sup>	<b>13.90</b> cm <sup>2</sup>
$x_5^d$	20.00 cm <sup>2</sup>	26.70 cm <sup>2</sup>	19.33 cm <sup>2</sup>	16.72 cm <sup>2</sup>	<b>26.70</b> cm <sup>2</sup>
$x_6^d$	20.00 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>	<b>5.00</b> cm <sup>2</sup>
$x_7^d$	20.00 cm <sup>2</sup>	8.95 cm <sup>2</sup>	7.27 cm <sup>2</sup>	8.57 cm <sup>2</sup>	<b>8.95</b> cm <sup>2</sup>
$C(\mathbf{x})$	2.659 m <sup>3</sup>	1.695 m <sup>3</sup>	2.051 m <sup>3</sup>	2.201 m <sup>3</sup>	<b>2.270</b> m <sup>3</sup>
		start → stop	start → stop	start → stop	I/II/III
$\beta_1(\mathbf{X})$		4.23 → <b>3.70</b>	4.03 → <b>3.70</b>	3.82 → <b>3.70</b>	4.16/ 4.09/3.79
$\beta_2(\mathbf{X})$		5.70 → <b>3.70</b>	27.95 → 11.37	5.70 → 3.93	3.93/13.86/3.98
$\beta_3(\mathbf{X})$		6.63 → 5.81	9.79 → 10.98	7.54 → 8.23	6.99/11.25/8.27
$\beta_4(\mathbf{X})$		6.39 → 4.49	12.07 → 11.42	4.85 → 4.21	7.07/12.00/4.18
$\beta_5(\mathbf{X})$		4.84 → <b>3.70</b>	9.86 → 7.63	6.46 → 6.13	4.48/ 8.67/6.08
$\beta_6(\mathbf{X})$		6.49 → 5.85	10.72 → 7.60	12.52 → 9.16	6.07/ 7.54/9.21
$\beta_7(\mathbf{X})$		4.77 → 5.10	16.99 → 16.49	4.82 → 4.50	5.16/18.66/5.22
$\beta_8(\mathbf{X})$		7.31 → 4.89	14.43 → 10.69	6.57 → 5.01	4.93/10.76/4.98
$\beta_9(\mathbf{X})$		6.17 → <b>3.70</b>	26.33 → 23.45	6.20 → <b>3.70</b>	3.93/23.41/3.91
$\beta_{10}(\mathbf{X})$		–	11.80 → <b>3.70</b>	–	– /5.01/ –

TABLICA 3.4. Wyniki optymalizacji niezawodnościowej

W tabeli 3.4 przedstawione są wyniki zadania optymalizacji niezawodnościowej. Podobnie jak w tabeli 3.3, zamieszczono wartości parametrów projektowych odpowiadające projektom optymalnym, a także wartości wskaźników niezawodności na początku i końcu procesu optymalizacji. Analogicznie jak w przypadku optymalizacji deterministycznej wybrany został projekt bezpieczny. Odpowiadające mu wartości wskaźników  $\beta$  przedstawiono w dolnej części kolumny 5.

Z porównania wyników obu optymalizacji widać, że objętość optymalnej konstrukcji z optymalizacji niezawodnościowej jest o ponad 0.5 m<sup>3</sup> większa niż w przypadku optymalizacji deterministycznej. Warto jest więc dla optymalnej konstrukcji ‘deterministycznej’ sprawdzić wartości wskaźników niezawodności odpowiadające rozpatrywanym w przykładzie warunkom granicznym. Wartości te zebrane zostały w tabeli 3.5. Jak widać, w kilku przypadkach są one znacznie mniejsze od minimalnej wartości 3.7 z optymalizacji niezawodnościowej. Największa różnica występuje w przypadku ograniczenia przemieszcze-

	Pola przekrojów deterministyczne			Pola przekrojów losowe		
	komb. I	komb. II	komb. III	komb. I	komb. II	komb. III
$\beta_1(\mathbf{X})$	3.21	2.93	2.65	3.20	2.91	2.62
$\beta_2(\mathbf{X})$	3.50	12.62	3.55	3.40	9.78	3.46
$\beta_3(\mathbf{X})$	6.54	8.69	9.01	6.53	7.92	8.15
$\beta_4(\mathbf{X})$	6.22	10.97	3.73	6.17	10.77	3.63
$\beta_5(\mathbf{X})$	3.87	6.76	5.62	3.80	6.32	5.61
$\beta_6(\mathbf{X})$	5.59	4.11	5.19	5.58	3.89	4.86
$\beta_7(\mathbf{X})$	3.96	14.01	4.06	3.94	13.33	4.04
$\beta_8(\mathbf{X})$	4.99	10.75	5.03	4.92	10.47	4.96
$\beta_9(\mathbf{X})$	3.49	23.84	3.46	3.40	17.40	3.36
$\beta_{10}(\mathbf{X})$	–	4.27	–	–	4.08	–

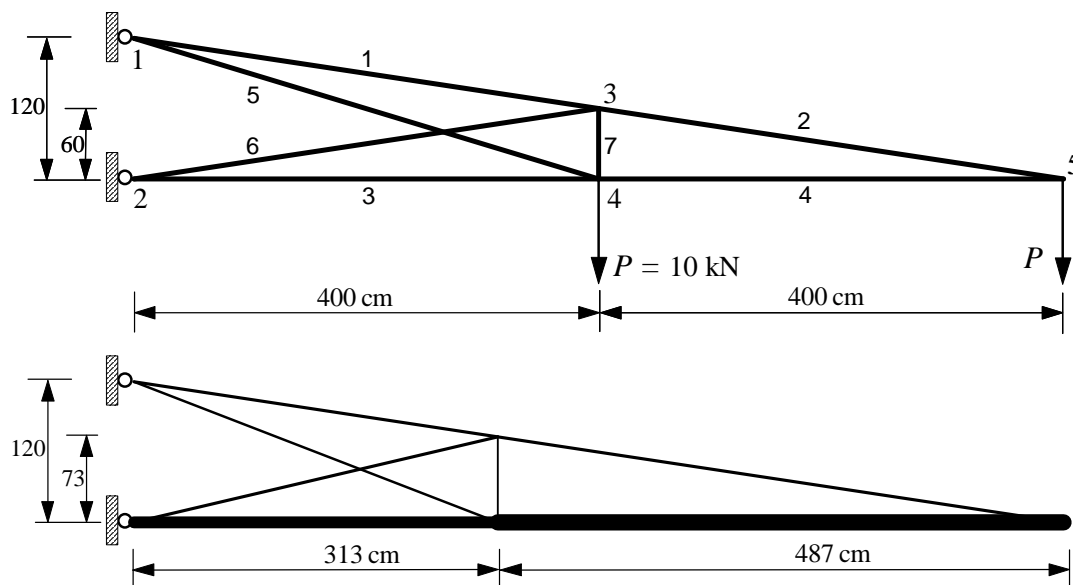
TABLICA 3.5. Wskaźniki  $\beta$  dla konstrukcji optymalnej z optymalizacji deterministycznej

niowego dla trzeciej kombinacji obciążeń, gdzie  $\beta = 2.65$ . W tej samej tabeli przedstawiono także wartości wskaźników  $\beta$  obliczonych przy założeniu losowości pól przekrojów poprzecznych grup prętów. Przyjęto, że są to zmienne losowe o rozkładzie logarytmiczno-normalnym, wartościach średnich równych optymalnym wartościom z optymalizacji deterministycznej i współczynnikach zmienności 5%. Tak policzone wskaźniki niezawodności nie różnią się dużo od tych obliczonych przy założeniu pól przekrojów jako wartości deterministycznych, co świadczy, iż uwzględnienie niewielkiej losowości tych parametrów nie wpływa w znaczący sposób na bezpieczeństwo konstrukcji.  $\diamond$

### Przykład 3.2

W poprzednim punkcie rozdziału przedstawiona została propozycja rozszerzonej funkcji kosztu początkowego, umożliwiającej uwzględnienie kosztu związanego z zastosowaniem materiałów różnej jakości (por. (3.6)). W zadaniu optymalizacji niezawodnościowej, w którym minimalizowana jest taka właśnie funkcja, parametrami projektowymi oprócz wartości średnich wybranych zmiennych losowych oraz parametrów deterministycznych są także odchylenia standardowe losowych granic plastyczności materiałów, z których zrobione są pręty kratownicy. Wartość odchylenia standardowego granicy plastyczności przyjęta została na potrzeby pracy jako miara jakości materiału, decydująca o jego koszcie.

W niniejszym przykładzie zaprezentowano optymalizację kosztu początkowego wspornika kratowego używanego już w rozdziale 2 do ilustracji różnych metod analizy niezawodności. Konstrukcja oraz działające na nią obciążenie pokazane zostały na rysunku 3.9. Trochę inny niż w rozdziale 2 jest stochastyczny opis parametrów konstrukcji. Zebrało je wszystkie w tabeli 3.6. Przyjęto, że pola przekrojów elementów kratownicy są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie logarytmiczno-normalnym. Parametrami projektowymi są ich wartości średnie natomiast odchylenia standardowe na poszczególnych iteracjach procesu optymalizacji obliczane są przy założeniu stałego współczynnika zmienności,  $\nu = 5\%$ . Przyjęto, że konstrukcja składa się z kątowników równoramiennych.



Rys. 3.9. Wspornik kratowy, optymalizacja kosztu początkowego: u góry - konstrukcja początkowa, u dołu - konstrukcja optymalna

Ponieważ w celu obliczania wartości funkcji granicznej stateczności lokalnej potrzebna jest znajomość wartości minimalnego momentu bezwładności przekroju, na podstawie tabel [6] skonstruowano przybliżoną zależność  $J(A)$ , (zob. rys. 3.10). Oprócz wartości średnich pól przekrojów prętów,  $x_1^\mu - x_7^\mu$ , parametrami projektowymi zadania optymalizacji są odchylenia standardowe granicy plastyczności stali dla poszczególnych prętów,  $x_{14}^\sigma - x_{20}^\sigma$ . Na rysunku 3.11 przedstawiono wykres funkcji  $\kappa(x_i^\sigma)$ , która we wzorze (3.6) 'odpowiada' za dodatkowy koszt związany z użyciem stali lepszej jakości. Przyjęto, że odchylenie standardowe granicy plastyczności może zmieniać się w granicach od 1.0 kN/cm<sup>2</sup> do 4.0 kN/cm<sup>2</sup>, a zastosowanie stali najlepszej jakości jest o 10% droższe niż stali najslabszej. Dodatkowym parametrem projektowym jest odległość elementu nr 5, od podpór. Ograniczeniami procesu optymalizacji są ograniczenia naprężeniowe/stateczności lokalnej we wszystkich prętach konstrukcji. Zadanie optymalizacji niezawodnościowej wspornika kratowego sformułować można więc następująco:

$$\begin{aligned} \text{znaleźć} \quad \min C(x_1^\mu, \dots, x_8^\mu, x_{14}^\sigma, \dots, x_{20}^\sigma) = \\ = \sum_{i=1}^7 x_i^\mu l_i(x_8^\mu) [1 + \kappa(x_{i+13}^\sigma)], \end{aligned} \quad (3.37)$$

przy ograniczeniach:

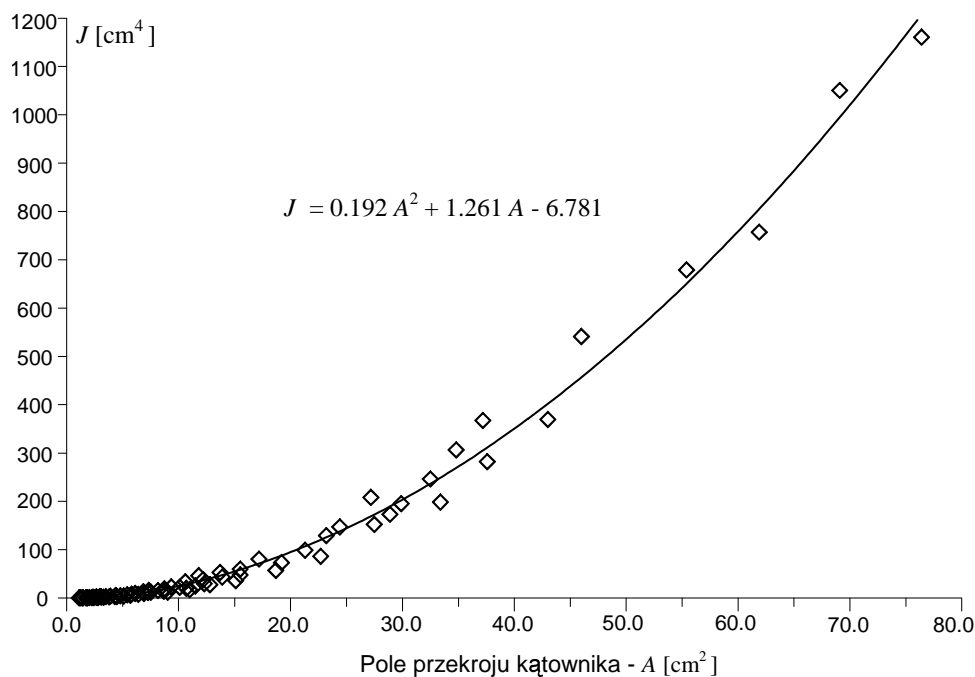
$$\beta_i(\mathbf{x}^\alpha) \geq 4.2, \quad i = 1, \dots, 7, \quad (3.38)$$

$$4 \text{ cm}^2 \leq x_j^\mu \leq 35 \text{ cm}^2, \quad j = 1, \dots, 7, \quad (3.39)$$

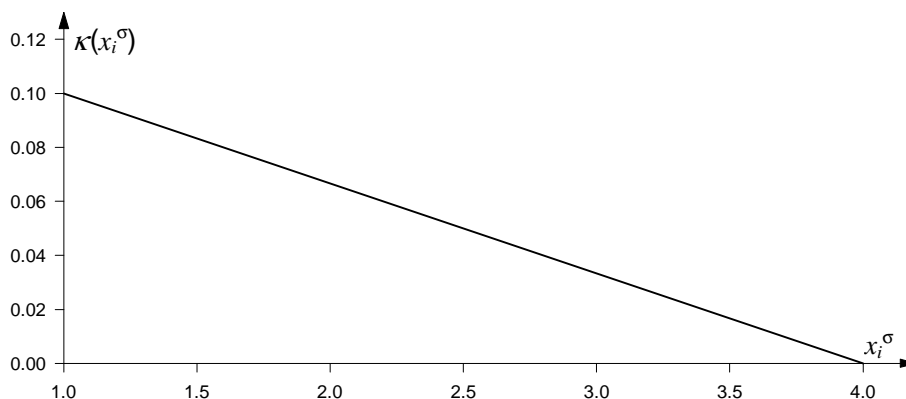
$$300 \text{ cm} \leq x_8^\mu \leq 500 \text{ cm}, \quad (3.40)$$

$$1 \text{ kN/cm}^2 \leq x_k^\sigma \leq 4 \text{ kN/cm}^2, \quad k = 14, \dots, 20, \quad (3.41)$$

gdzie  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , są długościami elementów. Wskaźniki niezawodności odpowiadają-



RYS. 3.10. Zależność między polem przekroju poprzecznego, a momentem bezwładności kątowników równoramiennych



RYS. 3.11. Funkcja  $\kappa(x_i^\sigma)$

ce projektowi początkowemu wynoszą, odpowiednio:  $\beta_1 = 4.96$ ,  $\beta_2 = 5.64$ ,  $\beta_3 = -5.18$ ,  $\beta_4 = -3.58$ ,  $\beta_5 = 10.63$ ,  $\beta_6 = 2.55$ ,  $\beta_7 = 16.83$ . Jak widać jest to projekt niebezpieczny, szczególnie ze względu na możliwość utraty stateczności prętów pasa dolnego. Początkowy koszt konstrukcji, mierzony tu w jednostkach objętości materiału, wynosi  $25741 \text{ cm}^3$ . W wyniku przeprowadzonej optymalizacji niezawodnościowej koszt początkowy wzrósł do  $31637 \text{ cm}^3$  natomiast wartości wskaźników  $\beta$  odpowiadające projektowi optymalnemu wynoszą, odpowiednio:  $\beta_1 = 4.20$ ,  $\beta_2 = 4.20$ ,  $\beta_3 = 4.20$ ,  $\beta_4 = 4.20$ ,  $\beta_5 = 5.52$ ,  $\beta_6 = 4.20$ ,  $\beta_7 = 15.69$ . Konfiguracja optymalna konstrukcji przedstawiona jest na rysunku 3.9. Grubościami linii podkreślono wielkości pól przekrojów prętów. W ostatniej kolumnie tabeli 3.6 umieszczono wartości parametrów projektowych w punkcie optymalnym. Wynika

stąd, że pręty pasa górnego (elementy 1 i 2) powinny być wykonane z materiału wyższej jakości natomiast pozostałe pręty mogą być wykonane z najtańszej stali.  $\diamond$

Par.	Opis	Typ rozkładu prawdopodob.	Typ par. projektow.	Wartość początkowa	Wartość optymalna
$X_1$	Pole przekroju elementu 1 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_1^\mu$	10.0 cm <sup>2</sup>	6.19 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_1^\sigma$	0.5 cm <sup>2</sup>	
$X_2$	Pole przekroju elementu 2 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_2^\mu$	10.0 cm <sup>2</sup>	6.31 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_2^\sigma$	0.5 cm <sup>2</sup>	
$X_3$	Pole przekroju elementu 3 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_3^\mu$	10.0 cm <sup>2</sup>	23.33 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_3^\sigma$	0.5 cm <sup>2</sup>	
$X_4$	Pole przekroju elementu 4 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_4^\mu$	10.0 cm <sup>2</sup>	31.56 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_4^\sigma$	0.5 cm <sup>2</sup>	
$X_5$	Pole przekroju elementu 5 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_5^\mu$	10.0 cm <sup>2</sup>	4.17 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_5^\sigma$	0.5 cm <sup>2</sup>	
$X_6$	Pole przekroju elementu 6 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_6^\mu$	10.0 cm <sup>2</sup>	5.53 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_6^\sigma$	0.5 cm <sup>2</sup>	
$X_7$	Pole przekroju elementu 7 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_7^\mu$	10.0 cm <sup>2</sup>	4.0 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_7^\sigma$	0.5 cm <sup>2</sup>	
$X_8$	Położenie elementu 7 <i>odległość od węzła nr 2</i>	normalny	$x_8^\mu$	400.0 cm	313.2 cm
			$\tilde{x}_8^\sigma$	2.0 cm	
$X_9$	Współrzędna $y$ węzła nr 4	normalny	$\tilde{x}_9^\mu$	0.0 cm	
			$\tilde{x}_9^\sigma$	2.0 cm	
$X_{10}$	Współrzędna $y$ węzła nr 5	normalny	$\tilde{x}_{10}^\mu$	0.0 cm	
			$\tilde{x}_{10}^\sigma$	2.0 cm	
$X_{11}$	Współrzędna $x$ węzła nr 5	normalny	$\tilde{x}_{11}^\mu$	800.0 cm	
			$\tilde{x}_{11}^\sigma$	2.0 cm	
$X_{12}$	Moduł sprężystości	log-normalny	$\tilde{x}_{12}^\mu$	21000.0 kN/cm <sup>2</sup>	
			$\tilde{x}_{12}^\sigma$	1050.0 kN/cm <sup>2</sup>	
$X_{13}$	Mnożnik obciążenia $\lambda$	Gumbela	$\tilde{x}_{13}^\mu$	1.0	
			$\tilde{x}_{13}^\sigma$	0.2	
$X_{14}$	Granica plast. materiału el. 1	log-normalny	$\tilde{x}_{14}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	1.0 kN/cm <sup>2</sup>
			$x_{14}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	
$X_{15}$	Granica plast. materiału el. 2	log-normalny	$\tilde{x}_{15}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	1.71 kN/cm <sup>2</sup>
			$x_{15}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	
$X_{16}$	Granica plast. materiału el. 3	log-normalny	$\tilde{x}_{16}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	4.0 kN/cm <sup>2</sup>
			$x_{16}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	
$X_{17}$	Granica plast. materiału el. 4	log-normalny	$\tilde{x}_{17}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	4.0 kN/cm <sup>2</sup>
			$x_{17}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	
$X_{18}$	Granica plast. materiału el. 5	log-normalny	$\tilde{x}_{18}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	4.0 kN/cm <sup>2</sup>
			$x_{18}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	
$X_{19}$	Granica plast. materiału el. 6	log-normalny	$\tilde{x}_{19}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	4.0 kN/cm <sup>2</sup>
			$x_{19}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	
$X_{20}$	Granica plast. materiału el. 7	log-normalny	$\tilde{x}_{20}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	4.0 kN/cm <sup>2</sup>
			$x_{20}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	

TABLICA 3.6. Parametry zadania optymalizacji niezawodnościowej wspornika kratowego





---

## Metody poprawy efektywności optymalizacji niezawodnościowej

---

Proces zagnieżdżonej optymalizacji niezawodnościowej dużych konstrukcji inżynierskich jest zazwyczaj bardzo czasochłonny i wymaga użycia komputerów o znacznej mocy obliczeniowej. Jednak z zebranych przez autora doświadczeń wynika, że zastosowanie nawet bardzo szybkich komputerów może nie mieć tak dużego wpływu na efektywność obliczeń jak implementacja w systemie optymalizacji niezawodnościowej szeregu metod umożliwiających aktywne sterowanie parametrami procesu, a także strategii optymalizacji interaktywnej, ze szczególnym uwzględnieniem zmiany statusu ograniczeń.

### 4.1. Redukcja liczby parametrów i ograniczeń

Przed bardziej szczegółowym omówieniem wzmiankowanych sposobów poprawy efektywności procesu optymalizacji niezawodnościowej należy wspomnieć o metodach redukcji liczby zmiennych losowych i parametrów projektowych. Zredukowany, optymalny obliczeniowo model optymalizacyjny i stochastyczny może znacznie polepszyć zbieżność procesu oraz skrócić czas obliczeń. Jeśli to możliwe, parametry opisujące geometrię, materiał oraz działające na konstrukcje obciążenia powinny być pogrupowane zgodnie z zasadami przedstawionymi w podrozdziale 3.1. Następnie należy zdecydować, które z parametrów reprezentatywnych będzie się traktować jako losowe, a które można uznać za deterministyczne. Mówiąc inaczej, ważne jest aby rozpatrywać jedynie te zmienne losowe, które

w istotny sposób wpływają na ocenę bezpieczeństwa konstrukcji. Tak jak to zostało pokazane w punkcie 2.3.3.1, ważną informację na temat wpływu losowości danej zmiennej stanowi wektor normalny do powierzchni granicznej w punkcie projektowym,  $\alpha$ , a także znajomość elastyczności wskaźników niezawodności ze względu na odchylenia standardowe zmiennych. Porównanie tych wielkości dla wszystkich zmiennych losowych pozwala podjąć decyzję o zmianie statusu zmiennej z losowej na deterministyczną (zob. przykład w punkcie 2.3.3.1).

Zbadanie wpływu zmienności poszczególnych parametrów należy przeprowadzić dla wszystkich ograniczeń niezawodnościowych występujących w zadaniu optymalizacji. Liczba tych właśnie ograniczeń, decyduje w największym stopniu o wielkości i czasochłonności zadania. Jest niesłychanie ważne aby na podstawie wstępnych analiz wybrać minimalną liczbę warunków granicznych, wystarczającą do zapewnienia odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa w całej konstrukcji. Ponieważ po zakończeniu procesu optymalizacji, ograniczenia nałożone na np. najbardziej wytężone pręty konstrukcji początkowej mogą nie odpowiadać już analogicznym prętom konstrukcji optymalnej, dlatego też należy dokonać sprawdzenia niezawodności tej konstrukcji dla innych, niż uprzednio zakładane, funkcji granicznych.

Kolejnym czynnikiem, który wpływa na efektywność każdego procesu optymalizacji, a optymalizacji niezawodnościowej w szczególności, jest normalizacja wartości funkcji celu oraz ograniczeń tak aby były one wielkościami tego samego rzędu. Poprawia to zbieżność procesu oraz pozwala uniknąć błędów zaokrągleń.

## 4.2. Sterowanie algorytmem lokalizacji punktu projektowego

Omówione poniżej metody poprawy efektywności optymalizacji niezawodnościowej bazują przede wszystkim na modyfikowaniu parametru zbieżności oraz punktu startowego algorytmu poszukiwania punktu projektowego, będącego podstawą procedury obliczania wartości ograniczeń niezawodnościowych. Szczegóły używanego w niniejszej pracy algorytmu Abdo-Rackwitz-Fiesslera [1] przedstawiono w dodatku A.2. Metody te porównane zostaną następnie w przykładzie optymalizacji konstrukcji wsporczej platformy wiertniczej (zob. 4.4). Redukcja czasu obliczeń uzyskana dzięki zastosowaniu poszczególnych metod odnosi się do nakładu obliczeniowego standardowej optymalizacji niezawodnościowej, oznaczanej dalej jako STD. Przez STD rozumie się automatyczną optymalizację niezawodnościową, w której wskaźniki niezawodności występujące w ograniczeniach (3.3) obliczane są przy następujących założeniach:

- parametr zbieżności algorytmu lokalizacji punktu projektowego  $\epsilon$  (zob. warunek (A.80) w dodatku A.2) pozostaje stały w ciągu wszystkich iteracji zewnętrznego algorytmu optymalizacyjnego,
- algorytm lokalizacji punktu projektowego startuje zawsze z punktu odpowiadającego wartościom średnim w gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathcal{U}$ .

Najłatwiejszym w realizacji sposobem przyspieszenia procesu optymalizacji niezawodnościowej jest odpowiednie sterowanie parametrem zbieżności  $\epsilon$  (metodę tę oznaczać będziemy dalej jako SPZ). Zazwyczaj w początkowych iteracjach algorytmu optymalizacyjnego zmiany parametrów projektowych są dość znaczne i nie jest konieczne obliczanie wartości ograniczeń niezawodnościowych z dużą precyzją. Z drugiej strony, pod koniec procesu optymalizacji, kiedy projekt jest już ustabilizowany i zmiany parametrów projektowych są bardzo małe, pożądane jest zwiększenie precyzji obliczania wskaźników niezawodności (zmniejszenie wartości  $\epsilon$ ) w celu zapewnienia zbieżności. Strategię zmian wartości parametru  $\epsilon$  można zaplanować z góry i zapisać w zbiorze danych. Takie postępowanie wskazane jest wtedy, gdy posiada się już pewne doświadczenia z rozwiązywania podobnych przykładów i można przewidzieć przebieg procesu optymalizacji. Poniżej przedstawiono fragment zbioru z danymi dla systemu OPTIREL, w którym zaprogramowano 4 modyfikacje parametru  $\epsilon$ , na 1, 3, 5, i 7 iteracji.

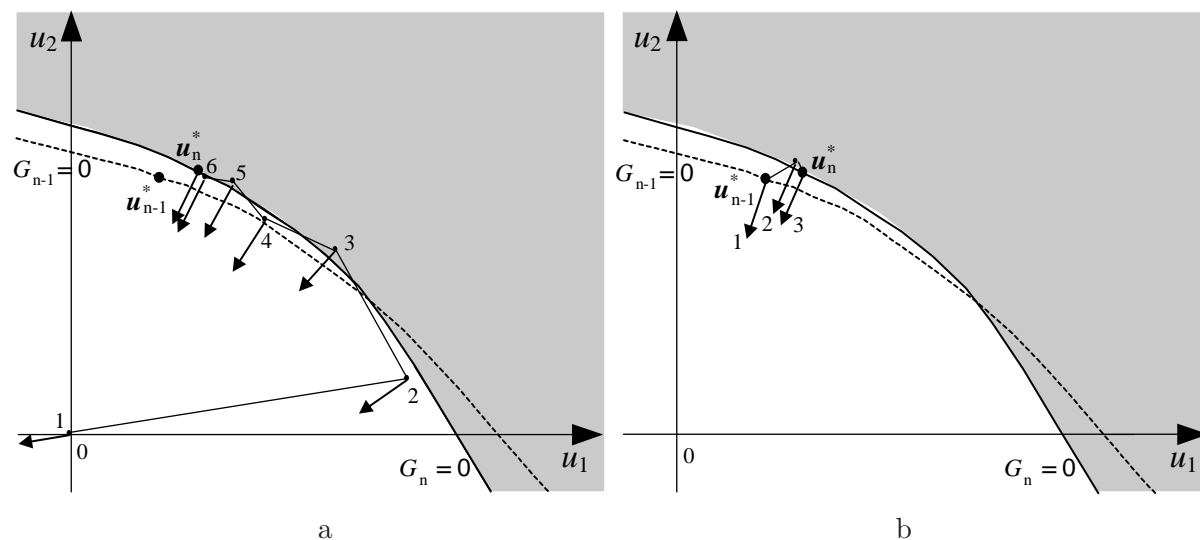
```

=====
* Number of compact file modifications - IEPSLEVELS (i5)
  4
=====
* Iteration number, epscon value, reliability computation method: ' ' - FORM,
* 's' - SORM, 'm' - MVFO (i5,d10.0,a1)
  1      0.01
  3      0.001
  5      0.0001
  7      0.00001
=====

```

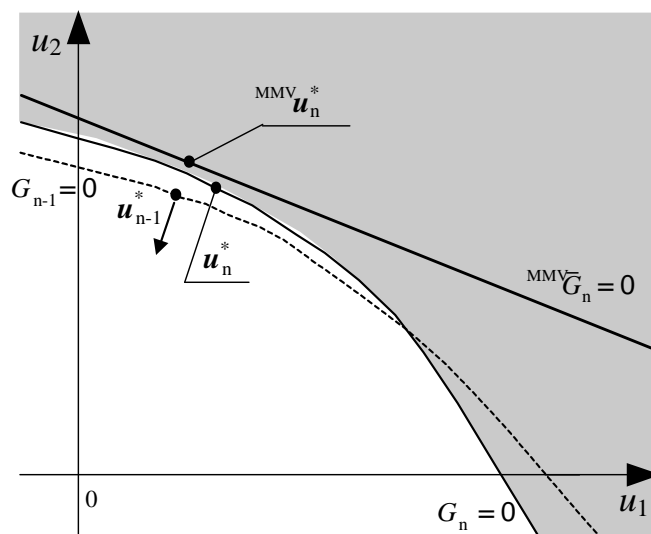
Lepszą kontrolę procesu optymalizacji daje sterowanie parametrem  $\epsilon$  w sposób interaktywny, kiedy decyzja co do momentu i wielkości zmiany tego parametru może być podjęta na podstawie obserwacji zmian wartości funkcji celu, ograniczeń i parametrów projektowych.

Innym rozwiązaniem znacznie poprawiającym efektywność procesu optymalizacji niezawodnościowej jest odpowiedni dobór punktu startowego w algorytmie poszukiwania punktu projektowego. Startując, tak jak to jest w podejściu STD, za każdym razem z wartości średnich zmiennych losowych traci się wszelkie informacje z iteracji poprzedniej. Naturalnym jest jednak założenie, iż szczególnie w ostatniej fazie procesu optymalizacji powierzchnie graniczne odpowiadające ograniczeniom niezawodnościowym (3.3) zmieniają się nieznacznie, a co za tym idzie aktualny punkt projektowy leży w pobliżu punktu projektowego z ostatniej iteracji. W metodzie PPP (Poprzedni Punkt Projektowy) współrzędne punktów projektowych przechowywane są do następnej iteracji, gdzie używa się ich jako punktów startowych. Idea metody PPP przedstawiona została obrazowo na rysunku 4.1, gdzie przez  $G_n(\mathbf{u}) = 0$  oznaczono powierzchnię graniczną odpowiadającą wybranemu ograniczeniu niezawodnościowemu na  $n$ -tym kroku optymalizacji, a przez  $G_{n-1}(\mathbf{u}) = 0$  (linia przerywana) powierzchnię graniczną na kroku  $n - 1$ . Punkty projektowe, aktualny oraz poprzedni, oznaczono odpowiednio przez  $\mathbf{u}_n^*$  i  $\mathbf{u}_{n-1}^*$ . Strzałki symbolizują obliczanie gradientu funkcji granicznej. Jak już wspomniano, metoda PPP daje najlepsze rezultaty gdy zmiany położenia powierzchni granicznej są niewielkie. W systemie OPTIREL może



Rys. 4.1. a - algorytm poszukiwania punktu projektowego startuje z punktu  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , b - metoda PPP, algorytm startuje z poprzedniego punktu projektowego,  $\mathbf{u}_{n-1}^*$

być ona uaktywniana przez użytkownika w ramach optymalizacji interaktywnej lub też w zbiorze z danymi można zapisać warunek jej włączenia w zależności od maksymalnej zmiany parametru projektowego.



Rys. 4.2. Metoda MMV; powierzchnia graniczna linearyzowana jest w poprzednim punkcie projektowym  $\mathbf{u}_{n-1}^*$

Metodę, która bazuje na strategii PPP oraz na koncepcji opisanego w punkcie 2.3.5 wskaźnika niezawodności  $\beta^{MMVFO}$  (por. (2.80)) przyjęto oznaczać w niniejszej pracy skrótem MMV (od Modified Mean Value). W odróżnieniu od PPP w metodzie tej nie poszukuje się dokładnego położenia punktu projektowego, lecz funkcja graniczna  $G_n(\mathbf{U})$  linearyzowana jest w poprzednim punkcie projektowym  $\mathbf{u}_{n-1}^*$ . Jak to pokazano na rysunku 4.2, metoda MMV wymaga jedynie jednokrotnego obliczenia wartości oraz gradientu

funkcji granicznej. Oczywiście jest, że obliczony w ten sposób wskaźnik niezawodności jest tym lepszą aproksymacją dokładnej wartości wskaźnika z metody FORM, im mniejsze są zmiany projektu oraz im bliżej siebie leżą powierzchnie graniczne  $G_{n-1}(\mathbf{u}) = 0$  i  $G_n(\mathbf{u}) = 0$ . O ile metoda PPP stosowana być może przy dowolnych zmianach parametrów projektowych, a jedynie jej efektywność wzrasta gdy zmiany te są małe, to metoda MMV zastosowana w zbyt wczesnej fazie procesu optymalizacji prowadzić może do dużych niedokładności, a nawet do braku zbieżności procesu.

Dlatego zaleca się stosowanie tej metody jedynie na kilku ostatnich krokach iteracyjnych gdy maksymalna zmiana parametru projektowego jest mniejsza niż np. 2% i gdy koszt obliczenia wartości funkcji granicznej jest wysoki.

### 4.3. Metody optymalizacji interaktywnej

Wszystkie wymienione w poprzednim punkcie metody mogą być użyte zarówno w ramach procesu optymalizacji automatycznej, jak i optymalizacji interaktywnej. To drugie podejście, ma jednak tę niewątpliwą zaletę, iż pozwala użytkownikowi w sposób elastyczny reagować na zmieniające się trendy procesu optymalizacji, które trudno czasem przewidzieć programując np. strategię zmian parametru zbieżności  $\epsilon$  w zbiorze danych wejściowych.

Rola interaktywnych systemów oraz algorytmów obliczeniowych, a optymalizacyjnych w szczególności, jest obecnie powszechnie znana oraz doceniana (zob. np. [2,103,105,111]). Coraz częściej dochodzi się do wniosku, że jedynie zintegrowane systemy obliczeniowe, łączące w sobie nowoczesne algorytmy optymalizacyjne, szybkość współczesnych komputerów oraz pozwalające na interwencje użytkownika (eksperta), poprzez przyjazny w obsłudze interfejs, są zdolne do efektywnej realizacji dużych i złożonych problemów optymalizacji. W swojej doskonałej książce, [2], w rozdziale poświęconym optymalizacji interaktywnej, J. Arora tak definiuje pojęcie algorytmu interaktywnej optymalizacji: *Istotą algorytmu interaktywnej optymalizacji jest wykorzystywanie zmian wprowadzanych przez użytkownika w trakcie procesu iteracyjnego. Piszemy on również: Algorytmy te muszą być zaimplementowane w systemach umożliwiającym przerwanie procesu iteracyjnego i dostarczenie użytkownikowi wszelkich informacji o aktualnym stanie projektu.*

Jak wiadomo, największy wpływ na wielkość zadania optymalizacji niezawodnościowej, oprócz złożoności modelu samej konstrukcji, ma liczba ograniczeń nałożonych na wskaźniki niezawodności elementów. Dąży się zatem do tego, aby obliczać jedynie wartości aktywnych ograniczeń niezawodnościowych. Wiele współczesnych algorytmów optymalizacyjnych przystosowanych jest do realizacji tzw. strategii aktywnych ograniczeń. Jak można zauważyć analizując sformułowanie podproblemu programowania kwadratowego programu NLPQL, (A.58)–(A.63), ‘oszczędności’ wynikające ze stosowania tej strategii sprowadzają się jedynie do nieobliczania gradientów ograniczeń nierównościowych. Wartości samych ograniczeń muszą być jednak w dalszym ciągu obliczane. Podejście takie jest niewątpliwie efektywne w przypadku automatycznej optymalizacji deterministycznej,

gdy gradienty ograniczeń liczone są metodą różnic skończonych. Nie stanowi ono niestety żadnego usprawnienia procesu optymalizacji niezawodnościowej, w którym wskaźniki niezawodności liczone są metodą FORM i których gradienty dostępne są jako ‘produkt uboczny’ tej analizy, bez konieczności dodatkowych obliczeń. Poprawę efektywności niesie dopiero takie rozwiązanie, gdzie pomija się zupełnie wewnętrzną pętlę lokalizacji punktu projektowego (por. rys. 3.3), a wartość wskaźnika niezawodności dla zmiennych projektowych  ${}^{(k+1)}\mathbf{x}^\alpha$ , gdzie  $k + 1$  jest numerem iteracji, oblicza się na podstawie linearyzacji w punkcie  ${}^{(k)}\mathbf{x}^\alpha$

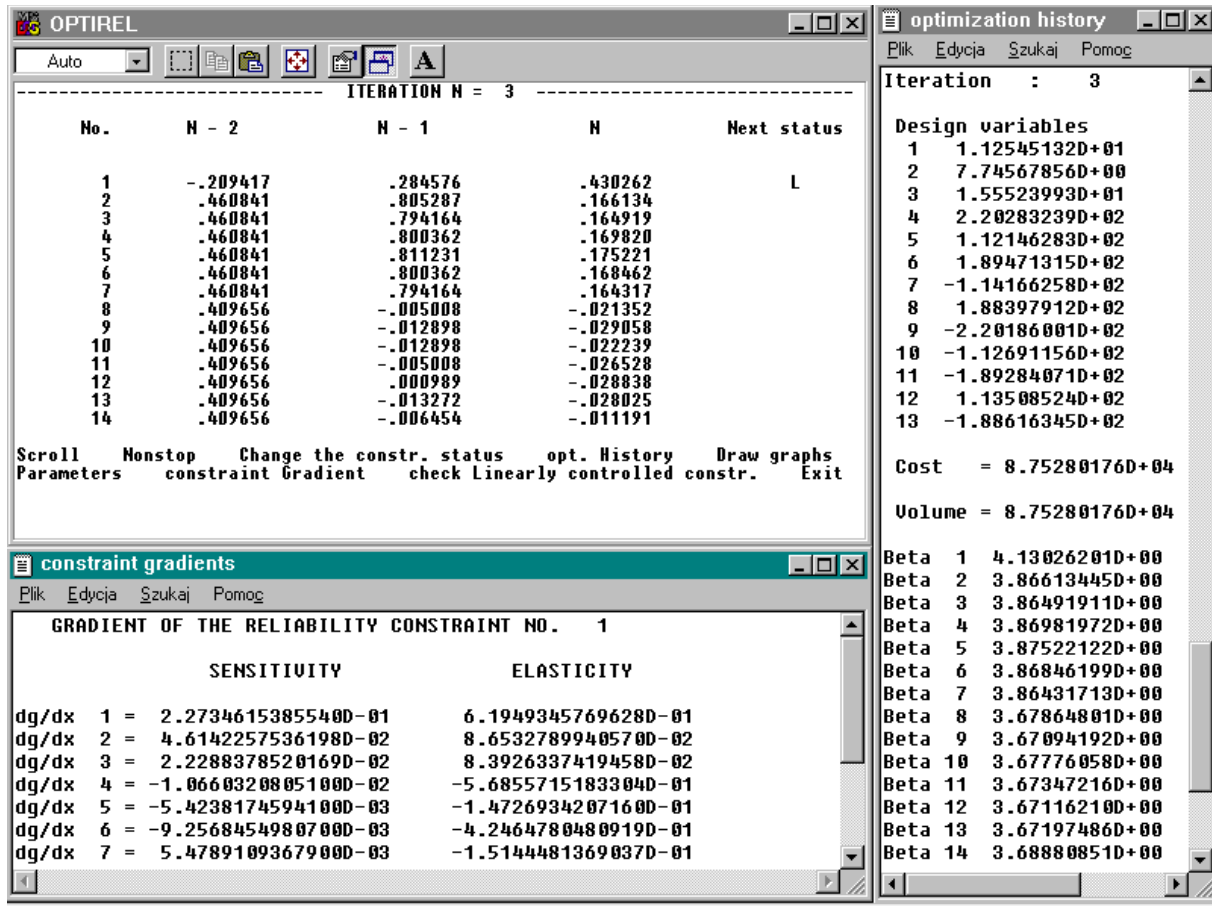
$$\beta({}^{(k+1)}\mathbf{x}^\alpha) = \beta({}^{(k)}\mathbf{x}^\alpha + \Delta\mathbf{x}^\alpha) = \beta({}^{(k)}\mathbf{x}^\alpha) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\beta(\mathbf{x}^\alpha)}{\partial x_i^\alpha} \Big|_{\mathbf{x}^\alpha = {}^{(k)}\mathbf{x}^\alpha} \Delta x_i^\alpha. \quad (4.1)$$

Metoda ta, oznaczana dalej skrótem AON (od Aproksymacja Ograniczeń Niezawodnościowych), nadaje się doskonale do implementacji w systemie optymalizacji interaktywnej, takim jak OPTIREL. Decyzję o aproksymacji wartości danego ograniczenia podejmuje użytkownik na podstawie obserwacji trendów procesu optymalizacji. Po każdej iteracji, wyświetlane są wartości ograniczeń niezawodnościowych dla trzech ostatnich kroków iteracyjnych. Ponadto użytkownik może zapoznać się, w formie tekstowej lub też analizując odpowiednie wykresy, z całą historią zmian parametrów projektowych, ograniczeń oraz funkcji celu. Można także wyświetlić wartości wrażliwości wybranych wskaźników niezawodności na zmianę parametrów projektowych. Rysunek 4.3 przedstawia przykładową sesję interaktywną systemu OPTIREL. Oprócz wymienionych już możliwości pozwala ona na uaktywnienie lub wyłączenie omawianych w poprzednim punkcie metod PPP i MMV, kontrolę parametru zbieżności zadania lokalizacji punktu projektowego,  $\epsilon$ , a także parametrów sterujących algorytmem SQP. Ograniczenia niezawodnościowe obliczane w sposób przybliżony zaznaczane są na ekranie przez dodanie litery L przy ich wartości. W przypadku gdy aproksymowane ograniczenie staje się aktywne, jego wartość zmniejszyła się znacznie lub też zmiany projektu od momentu podjęcia decyzji o aproksymacji są duże, strategia AON powinna zostać wyłączona. Podobnie, po zakończeniu procesu optymalizacji, powinno sprawdzić się rzeczywiste wartości ograniczeń niezawodnościowych aproksymowanych w punkcie optymalnym.

Podejmowanie decyzji w ramach procesu optymalizacji interaktywnej wymaga pewnego doświadczenia. Nie bez znaczenia jest też wiedza na temat zachowania optymalizowanej konstrukcji. Może się zdarzyć, iż niewłaściwa decyzja dotycząca aproksymacji ograniczenia, zastosowania strategii MMV lub przyjęcie zbyt małej wartości  $\epsilon$  spowoduje problemy ze zbieżnością. W takich przypadkach nieoceniona jest możliwość naprawienia skutków błędnie podjętej decyzji, co sprowadza się najczęściej do restartu algorytmu z jednej z poprzednich iteracji lub w przypadku braku zbieżności w obliczaniu wskaźnika niezawodności do ponownego wystartowania algorytmu poszukiwania punktu projektowego, np. ze złagodzonego warunkiem zbieżności.

Omawiając niezbędne składniki efektywnego systemu optymalizacji interaktywnej należy wspomnieć o wchodzącym w skład OPTIREL-a programie wizualizacji trendów optymalizacyjnych Optiview (zob. rys. 4.4). Przy pomocy pokazanego na rysunku 4.5 okna



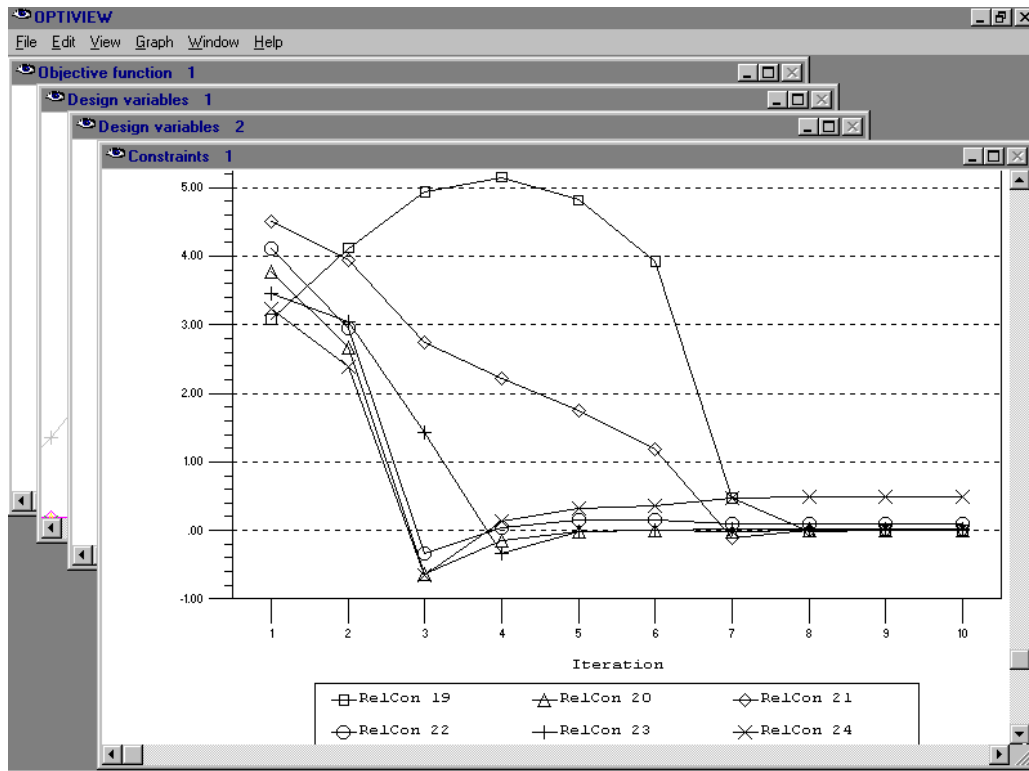


Rys. 4.3. OPTIREL - interaktywna sesja po zakończeniu iteracji

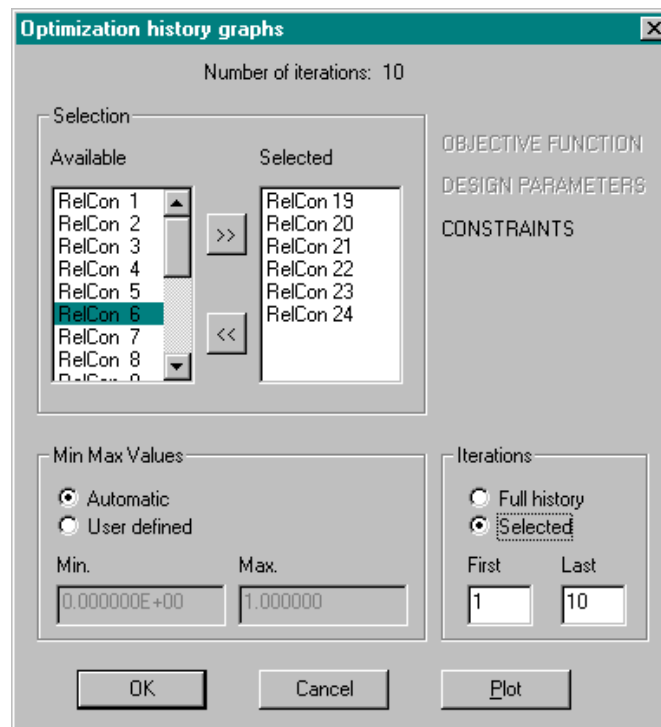
dialogowego użytkownik ma możliwość wyboru typu oraz parametrów wykresów, takich jak zakres iteracji oraz zakres wyświetlanych wartości funkcji. Optiview napisany został jako aplikacja systemu operacyjnego Windows 95 co w znacznym stopniu ułatwia szybki wybór i prezentację interesujących użytkownika wykresów.

OPTIREL umożliwia również śledzenie zmian kształtu optymalizowanej konstrukcji przy użyciu programu AutoCAD. Konfiguracja konstrukcji jest po każdej iteracji zapisywana w postaci zbioru poleceń AutoCAD-a z wykorzystaniem oferowanego przez ten program systemu tzw. kalek. Taka organizacja zapisu pozwala następnie po kolei lub jednocześnie wyświetlać konfiguracje odpowiadające wybranym iteracjom procesu optymalizacji.



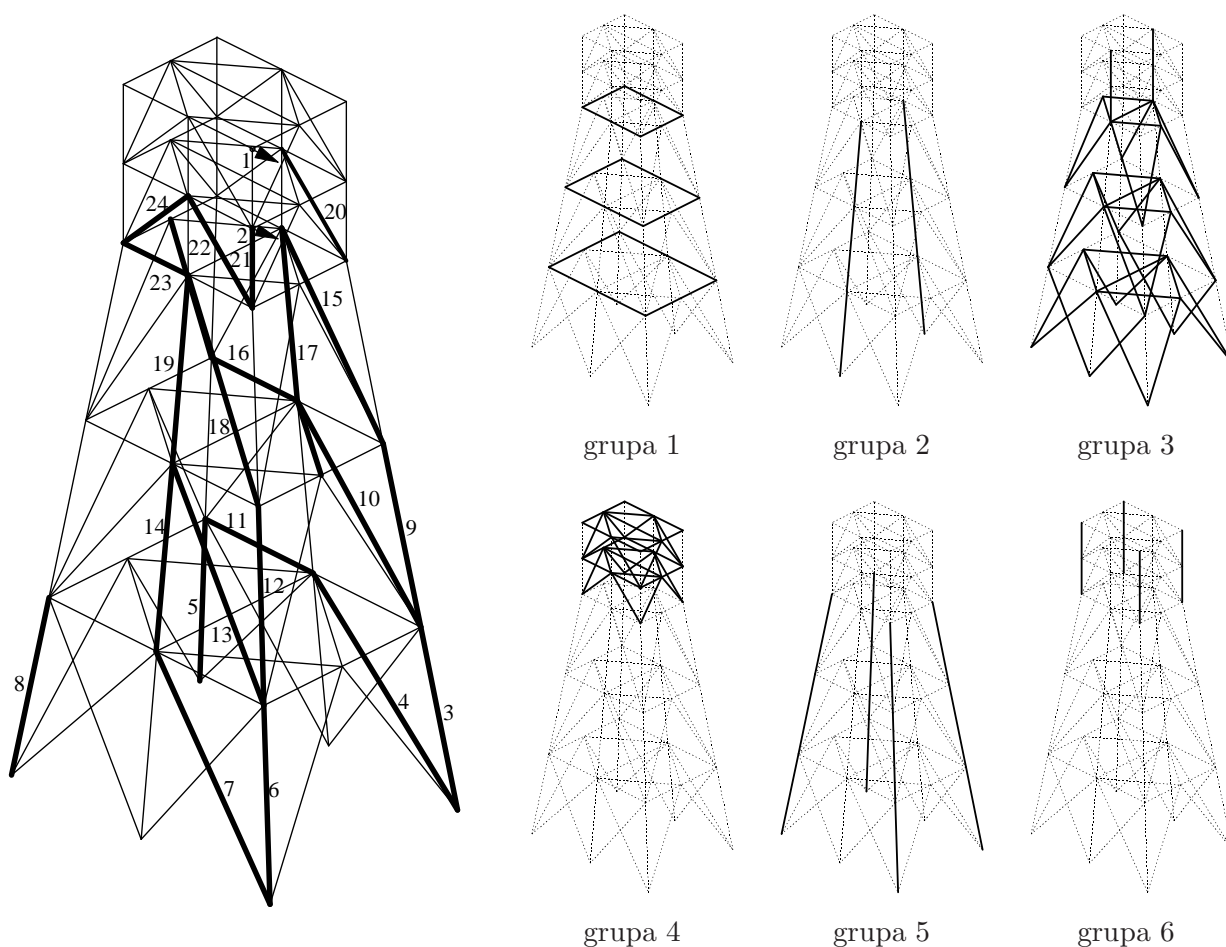


RYS. 4.4. Optview - program wizualizacji trendów procesu optymalizacji



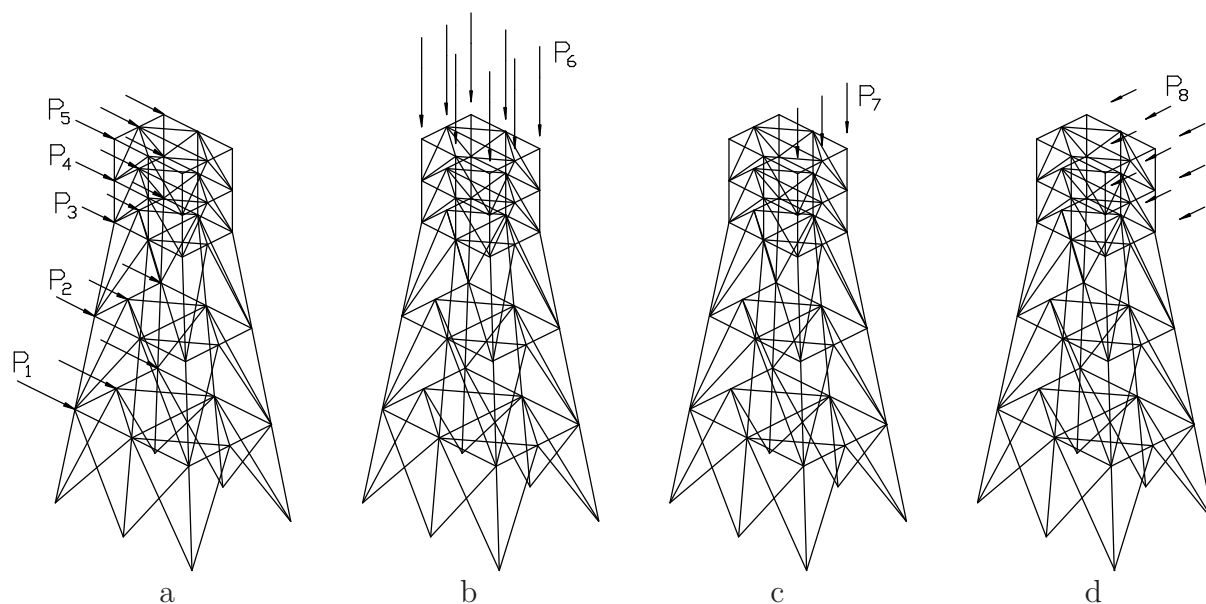
RYS. 4.5. Optview - okno wyboru typu oraz parametrów wykresu

#### 4.4. Porównanie metod realizacji zadania optymalizacji niezawodnościowej



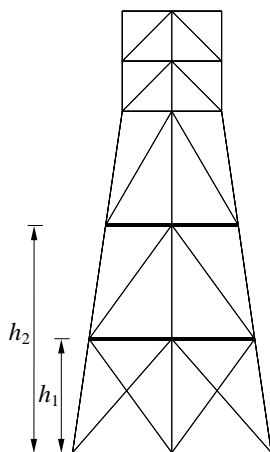
RYS. 4.6. Konstrukcja wsporcza platformy wiertniczej, 1, 2 - warunki przemieszczeniowe, 3-24 - warunki naprężeniowe; grupy elementów

W celu porównania różnych strategii usprawnienia procesu optymalizacji niezawodnościowej rozpatrzony został przykład minimalizacji ciężaru konstrukcji wsporczej platformy wiertniczej. Konstrukcja modelowana jest jako liniowo-sprężysta kratownica przestrzenna wykonana ze stali. Składa się ona ze 139 elementów rurowych połączonych w 46 węzłach. Dolne węzły są zamocowane. Wymiary rzutu konstrukcji na poziomie zamocowania oraz na poziomie platformy wynoszą, odpowiednio,  $22\text{ m} \times 16\text{ m}$  i  $11\text{ m} \times 8\text{ m}$ . Całkowita wysokość konstrukcji wynosi 97 m. Każdy z trzech dolnych segmentów ma po 25 m wysokości natomiast dwa górne mają po 11 m. Elementy konstrukcji podzielone są na 6 grup, które zaznaczono na rysunku 4.6. Aby zamodelować usztywniające działanie konstrukcji platformy na znajdujące się bezpośrednio pod nią poziome pręty kratownicy przyjęto dla nich sztucznie zawyżony moduł sprężystości. Moduł Younga materiału pozostałych elementów wynosi  $2.1 \cdot 10^8\text{ kN/m}^2$ .



RYS. 4.7. Schematy obciążenia

Przyjęto, że na konstrukcję działają cztery rodzaje obciążeń, zaznaczone na rysunku 4.7. Pierwszy schemat obciążenia odpowiada działaniu prądu oraz fal morskich i składa się z sił skupionych przyłożonych tak jak to pokazano na rysunku 4.7a. Wartości sił wynoszą, odpowiednio,  $P_1 = 4500$  kN,  $P_3 = 2500$  kN,  $P_2 = P_4 = P_5 = 3000$  kN. Drugi schemat (rys. 4.7b) modeluje obciążenie ciężarem platformy. Wartość każdej spośród sił skupionych tego schematu wynosi  $P_6 = 5500$  kN. Trzeci schemat odpowiada dodatkowemu obciążeniu platformy wiertniczej i składa się z trzech sił pionowych  $P_6 = 5500$  kN działających jak pokazano na rysunku rys. 4.7c. Czwarty schemat (rys. 4.7d) odpowiada obciążeniu wywołanemu parciem wiatru. Wartości sił wynoszą  $P_8 = 1000$  kN.



RYS. 4.8. Parametry kształtu - położenie dwóch dolnych pokładów

W zadaniu analizy niezawodności przyjęto 11 następujących zmiennych losowych:

- moduł sprężystości materiału prętów za wyjątkiem prętów poziomych, leżących bezpośrednio pod platformą,

- pola przekrojów grup elementów,
- mnożniki schematów obciążenia.

Parametrami projektowymi zadania optymalizacji niezawodnościowej są:

- wartości średnie pól przekrojów elementów,
- wysokości, na których położone są dwa dolne pokłady stanowiące stężenia poziome konstrukcji (zob. rys. 4.8).

Zgodnie z przyjętą w punkcie 3.1 konwencją oznaczeń wszystkie parametry rozpatrywanego zadania optymalizacji niezawodnościowej zgromadzono w tabeli 4.1.

Par.	Opis	Typ rozkładu prawdopodob.	Typ par. projektow.	Wartość początkowa
$X_1$	Pole przekroju prętów grupy 1 <i>stały wsp. zmienności: 10%</i>	log-normalny	$x_1^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_1^\sigma$	113.39 cm <sup>2</sup>
$X_2$	Pole przekroju prętów grupy 2 <i>stały wsp. zmienności: 10%</i>	log-normalny	$x_2^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_2^\sigma$	113.39 cm <sup>2</sup>
$X_3$	Pole przekroju prętów grupy 3 <i>stały wsp. zmienności: 10%</i>	log-normalny	$x_3^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_3^\sigma$	113.39 cm <sup>2</sup>
$X_4$	Pole przekroju prętów grupy 4 <i>stały wsp. zmienności: 10%</i>	log-normalny	$x_4^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_4^\sigma$	113.39 cm <sup>2</sup>
$X_5$	Pole przekroju prętów grupy 5 <i>stały wsp. zmienności: 10%</i>	log-normalny	$x_5^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_5^\sigma$	113.39 cm <sup>2</sup>
$X_6$	Pole przekroju prętów grupy 6 <i>stały wsp. zmienności: 10%</i>	log-normalny	$x_6^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_6^\sigma$	113.39 cm <sup>2</sup>
$x_7$	Położenie pionowe pierwszego pokładu	determinist.	$x_7^d$	25 m
$x_8$	Położenie pionowe drugiego pokładu	determinist.	$x_8^d$	50 m
$X_9$	Mnożnik pierwszego schematu obciążenia $\lambda_1$	Gumbela	$\tilde{x}_9^\mu$	1.0
			$\tilde{x}_9^\sigma$	0.15
$X_{10}$	Mnożnik pierwszego schematu obciążenia $\lambda_2$	log-normalny	$\tilde{x}_{10}^\mu$	1.0
			$\tilde{x}_{10}^\sigma$	0.1
$X_{11}$	Mnożnik pierwszego schematu obciążenia $\lambda_3$	log-normalny	$\tilde{x}_{11}^\mu$	1.0
			$\tilde{x}_{11}^\sigma$	0.2
$X_{12}$	Mnożnik pierwszego schematu obciążenia $\lambda_4$	Gumbela	$\tilde{x}_{12}^\mu$	1.0
			$\tilde{x}_{12}^\sigma$	0.15
$X_{13}$	Moduł sprężystości	log-normalny	$\tilde{x}_{13}^\mu$	2.10 10 <sup>8</sup> kN/m <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{13}^\sigma$	1.05 10 <sup>7</sup> kN/m <sup>2</sup>

TABLICA 4.1. Parametry zadania optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji wsporczej platformy wiertniczej

Po wstępnej analizie konstrukcji zdefiniowano 24 funkcje graniczne: 2 funkcje przemieszczeniowe typu (3.7) i 22 funkcje naprężeniowe / stateczności lokalnej typu (3.8). Z odpowiadającymi tym funkcjom warunkami granicznymi stowarzyszone są ograniczenia niezawodnościowe zadania optymalizacji. Węzły oraz elementy odpowiadające poszczególnym ograniczeniom zaznaczono na rysunku 4.6. Dopuszczalne wartości przemieszczeń dla

funkcji 1 i 2 wynoszą, odpowiednio,  $q^a = 35$  cm i  $q^a = 30$  cm. Naprężenie odpowiadające granicy plastyczności (traktowanej w tym zadaniu jako wartość deterministyczna) wynosi  $\sigma^0 = 300000$  kN/m<sup>2</sup>. Ostatecznie, zadanie optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji wsporczej platformy wiertniczej sformułowano następująco:

$$\text{znaleźć} \quad \min C(x_1^\mu, \dots, x_6^\mu, x_7^d, x_8^d) = \sum_{i=1}^6 x_i^\mu l_i(x_7^d, x_8^d), \quad (4.2)$$

przy ograniczeniach:

$$\beta_i(\mathbf{x}^\alpha) \geq 3.7, \quad \alpha = \{\mu, d\}, \quad i = 1, \dots, 24, \quad (4.3)$$

$$0.04082 \text{ m}^2 \leq x_j^\mu \leq 0.70869 \text{ m}^2, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (4.4)$$

$$15 \text{ m} \leq x_7^d \leq 35 \text{ m}, \quad (4.5)$$

$$40 \text{ m} \leq x_8^d \leq 60 \text{ m}, \quad (4.6)$$

$$x_8^d - x_7^d \geq 15 \text{ m}, \quad (4.7)$$

gdzie  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , są łącznymi długościami prętów  $i$ -tej grupy,  $\beta_i$  są wskaźnikami niezawodności odpowiadającymi poszczególnym warunkom granicznym, a ograniczenie deterministyczne (4.7) ma zapewnić nieprzekroczenie minimalnej odległości pomiędzy dolnymi pokładami. Przyjęto, że stosunek średnicy zewnętrznej przekrojów rurowych do średnicy wewnętrznej jest stały i wynosi 1.081.

Początkowa objętość konstrukcji wynosi  $289.606 \text{ m}^3$ , natomiast wskaźniki niezawodności, obliczone metodą pierwszego rzędu dla konstrukcji początkowej, zmieniają się w zależności od funkcji granicznej od -0.87 do 10.58 (por. kolumna 1 tabeli 4.2). Porównano następujące strategie rozwiązywania tego zadania optymalizacji niezawodnościowej:

- *podejście standardowe* - (STD) (wyniki w kolumnie 2 tabeli 4.2)  
Podejście to zostało scharakteryzowane w podrozdziale 4.2. Przyjęto stały parametr zbieżności  $\epsilon = 0.001$ . Na wykresach 4.9–4.16 przedstawiono historię zmian wartości funkcji celu, parametrów projektowych oraz wskaźników niezawodności występujących w ograniczeniach (4.3). Z analizy wykresów wynika, że projekt stabilizuje się po ósmej iteracji, zmiany położenia pokładów są bardzo nieznaczne, a najistotniejsze w spełnieniu ograniczeń niezawodnościowych było prawie dwu i pół krotne zwiększenie przekroju elementów grupy 5 (narożnych nóg konstrukcji). Aktywnych w punkcie optymalnym było jedynie 8 ograniczeń typu naprężeniowego/stateczności lokalnej. W tabeli 4.2 zaznaczono je pogrubionym drukiem. Projekt optymalny znaleziony został po 10 iteracjach algorytmu SQP (zewnętrznego algorytmu optymalizacyjnego). Wartości oraz gradienty funkcji granicznych musiały być w tym celu obliczone, odpowiednio, 2961 i 1774 razy. Pozostałe testowane w tym przykładzie strategie rozwiązania porównywane są w tabeli 4.2 z podejściem STD przyjmując odpowiadający mu, porównawczy czas obliczeń jako 1.
- *sterowanie parametrem zbieżności* - (SPZ) (kolumna 3 tabeli 4.2)  
Modyfikacje parametru  $\epsilon$  dokonywane były w sposób interaktywny. Zaczynając od bardzo zgrubnego kryterium zbieżności ( $\epsilon = 0.05$ ) na trzech pierwszych iteracjach

procesu optymalizacji, obserwując trendy zmian parametrów projektowych, ograniczeń i funkcji celu, wartość parametru zbieżności była stopniowo zmniejszana aż do wartości 0.001 na ósmej iteracji. Oszczędności czasu trwania obliczeń wynikające z zastosowania strategii SPZ, wynoszą ponad 20%.

- *wykorzystanie współrzędnych punktu projektowego z poprzedniej iteracji* - (PPP) (kolumna 4 tabeli 4.2)

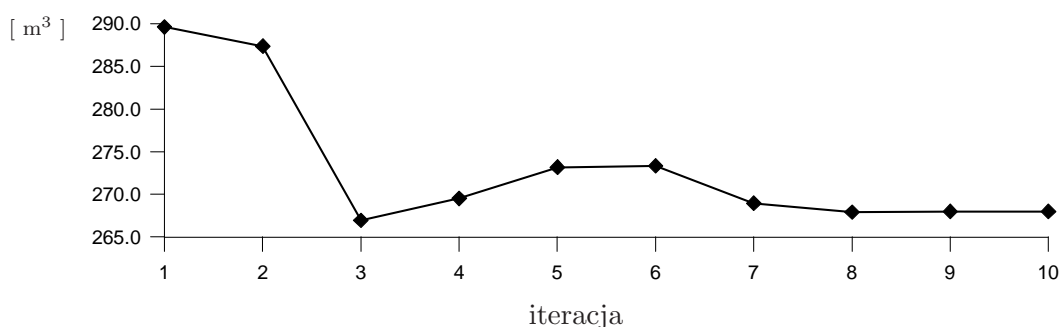
Strategia SPZ uzupełniona została o omawianą wcześniej strategię PPP, która włączana tu była w sposób automatyczny, niezależnie od wielkości zmian parametrów projektowych. Zastosowanie tej nieskomplikowanej w implementacji metody pozwoliło na redukcję czasu obliczeniowego o blisko 50%, co skłania do konkluzji, iż podejście standardowe nie powinno być nigdy stosowane.

- *aproksymacja ograniczeń niezawodnościowych* - (AON) (kolumna 5 tabeli 4.2)

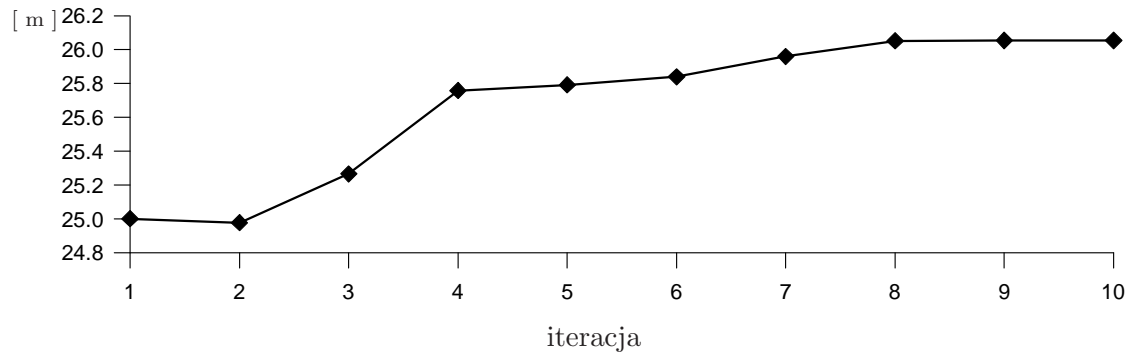
W połączeniu z metodami SPZ i PPP, zastosowano omawianą w punkcie 4.3 interaktywną metodę aproksymacji wartości ograniczeń niezawodnościowych. Wyboru ograniczeń, które będą aproksymowane dokonywano kierując się następującą, ‘bezpieczną’ strategią:

1. Wskaźnik niezawodności odpowiadający danemu ograniczeniu jest aproksymowany zgodnie ze wzorem (4.1) jeśli ograniczenie to nie jest aktywne (w rozpatrywanym przykładzie przyjęto ‘z zapasem’  $\beta_i > 3.72$ ) i jeśli jego wartość jest większa od wartości z poprzedniej iteracji.
2. Aproksymacja jest wyłączana jeśli wartość aproksymowanego ograniczenia jest mniejsza niż w poprzedniej iteracji.

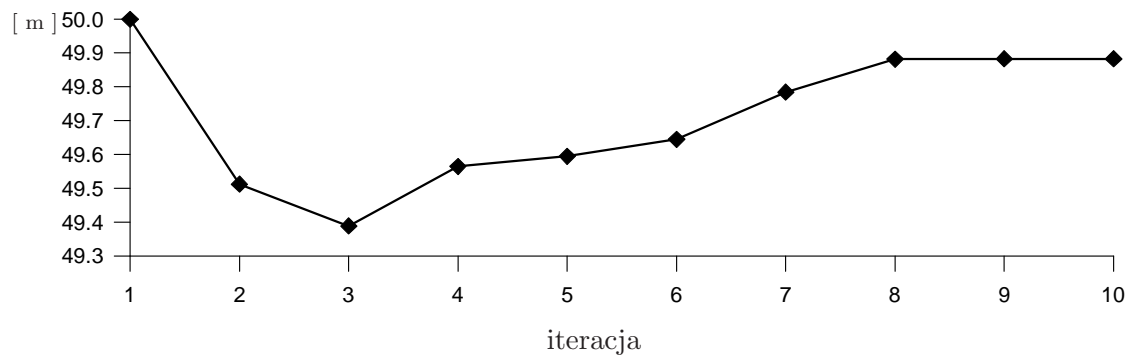
Szczególnie to ostatnie założenie czyni takie postępowanie dość bezpiecznym, gdyż aproksymacja wyłączana jest niezależnie od wartości ograniczenia, jeśli tylko wykres historii zmian tego ograniczenia zaczyna opadać. Wykresy zmian wskaźników niezawodności dla optymalizacji interaktywnej pokazano na rysunkach 4.17–4.20. Miejsca włączenia strategii AON zaznaczone zostały flagą z literą A i zmianą linii na przerywaną, a iteracje gdzie aproksymację ograniczenia wyłączano oznaczono przekreśloną literą A. Wartości ograniczeń, które w punkcie optymalnym były aproksymowane zostały po zakończeniu optymalizacji sprawdzone. Jak to widać w tabeli 4.2 wszystkie wartości  $\beta$  są większe od 3.7, co pozwala zaakceptować otrzymany projekt optymalny. Czas obliczeń został zredukowany o 65% w stosunku do metody STD!



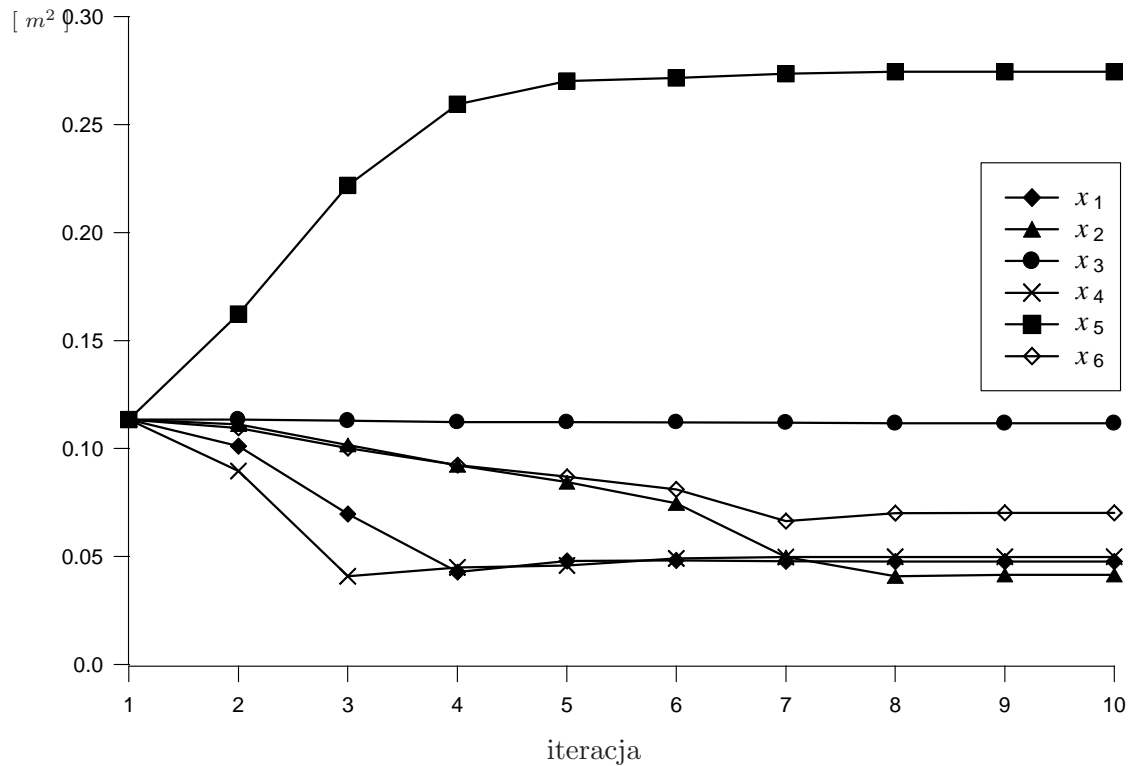
Rys. 4.9. Objętość materiału konstrukcji



Rys. 4.10. Parametr kształtu – położenie pierwszego pokładu

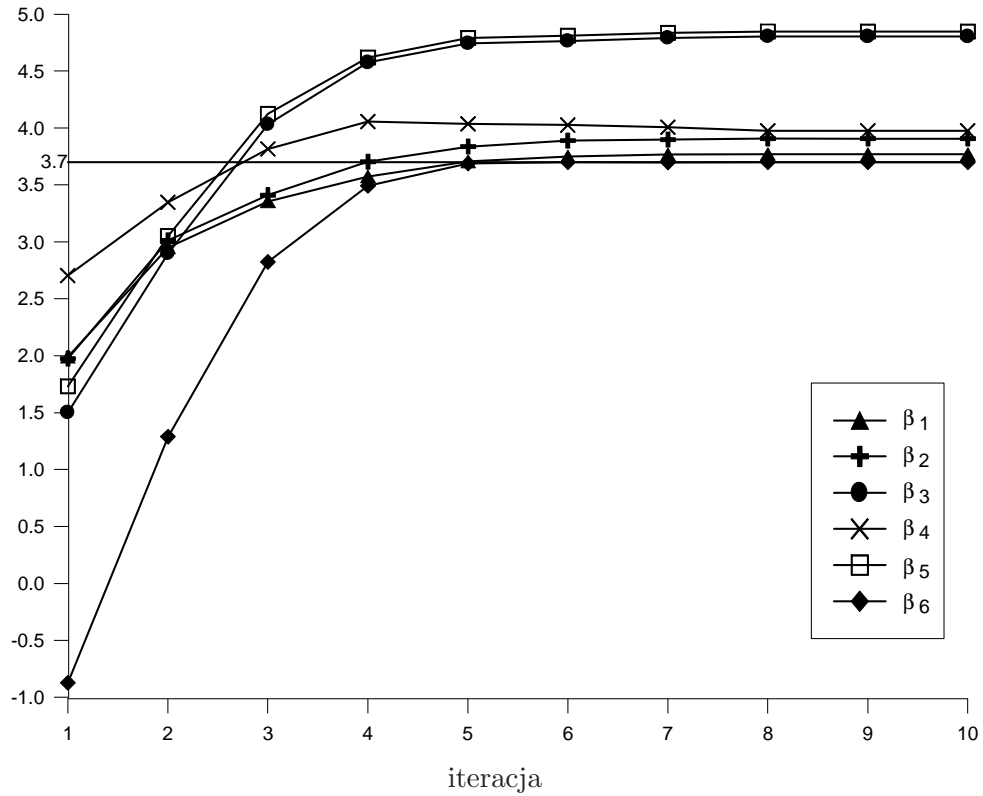


Rys. 4.11. Parametr kształtu – położenie drugiego pokładu

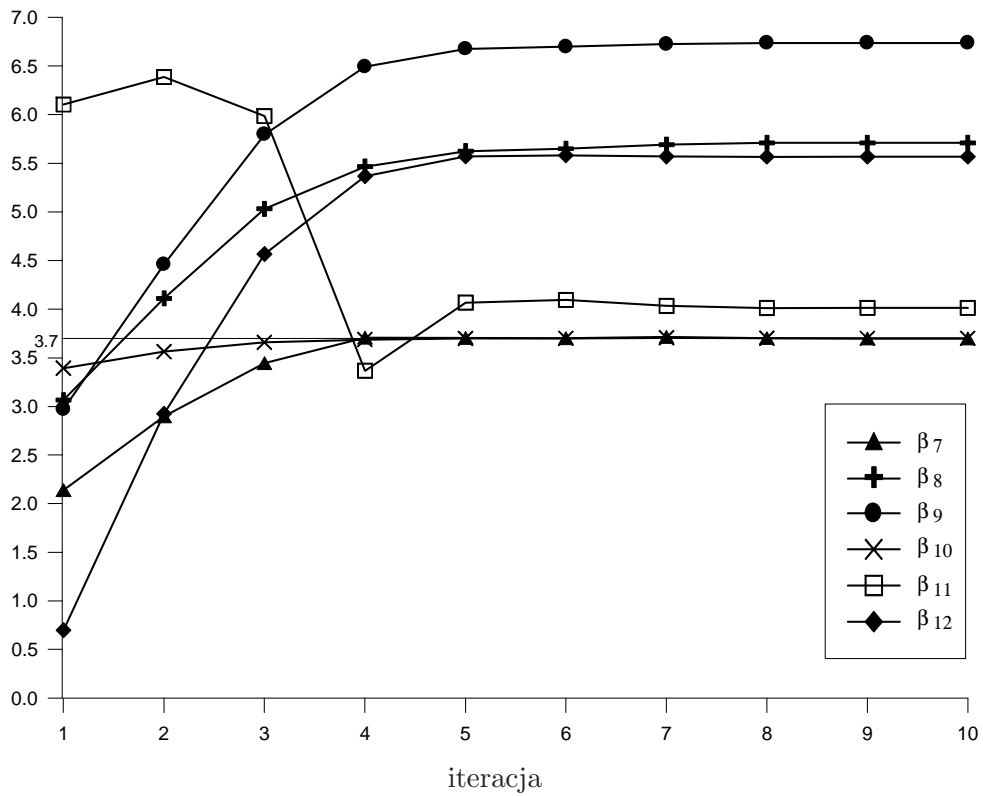


Rys. 4.12. Pola przekrojów grup elementów

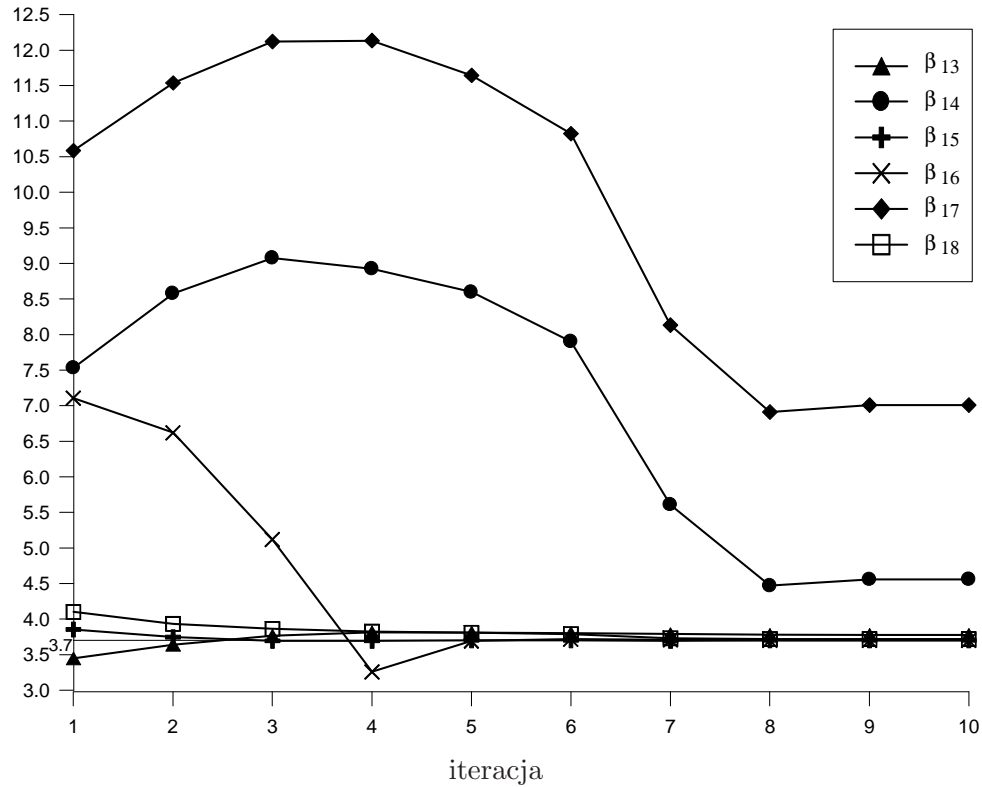
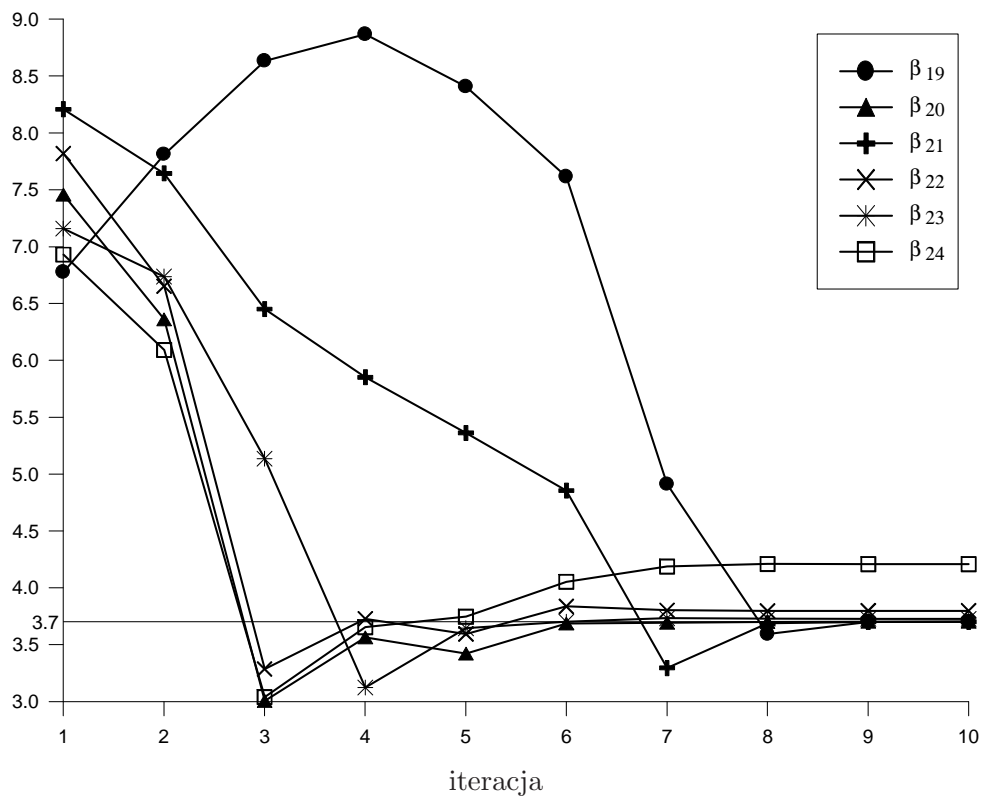


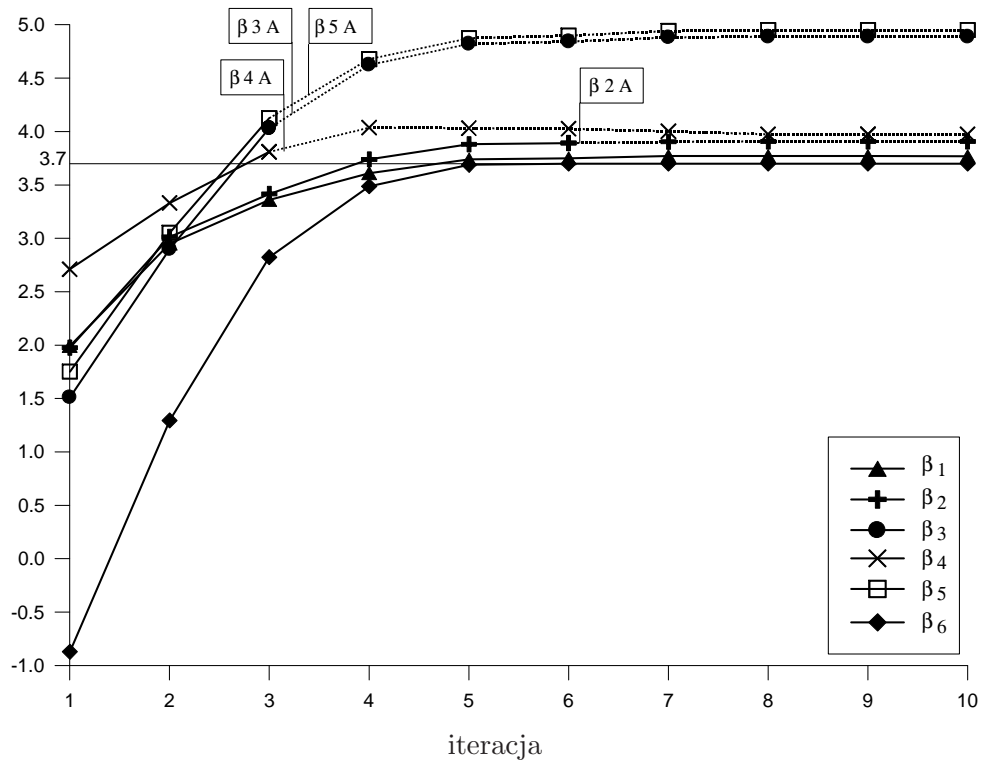


RYS. 4.13. Podejście standardowe. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 1-6

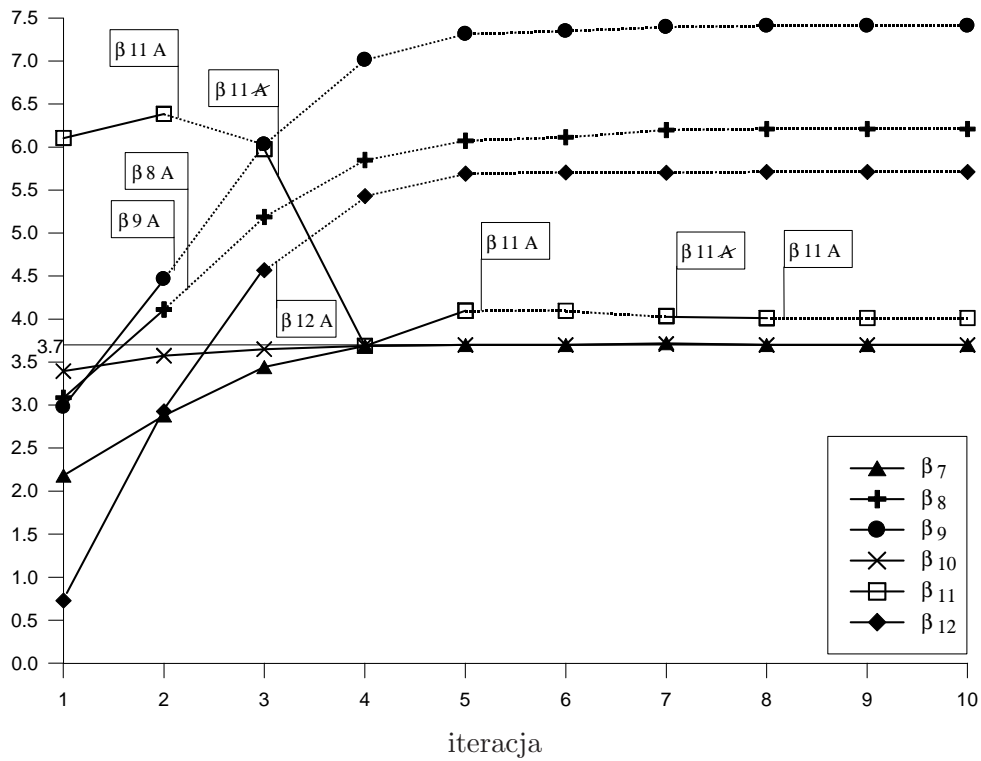


RYS. 4.14. Podejście standardowe. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 7-12

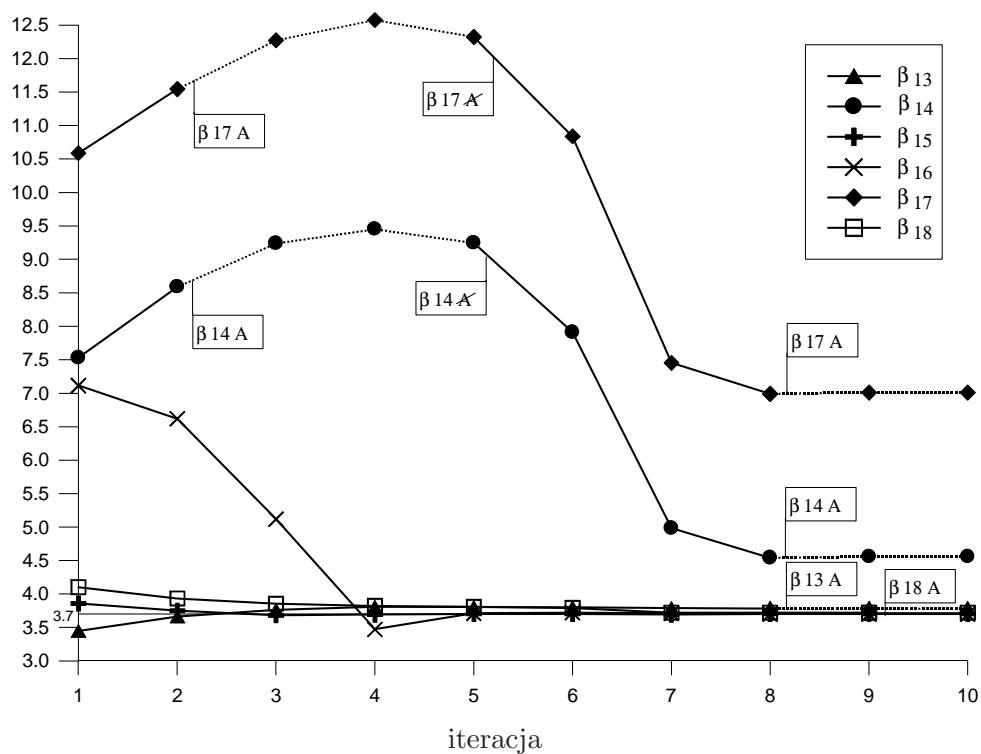
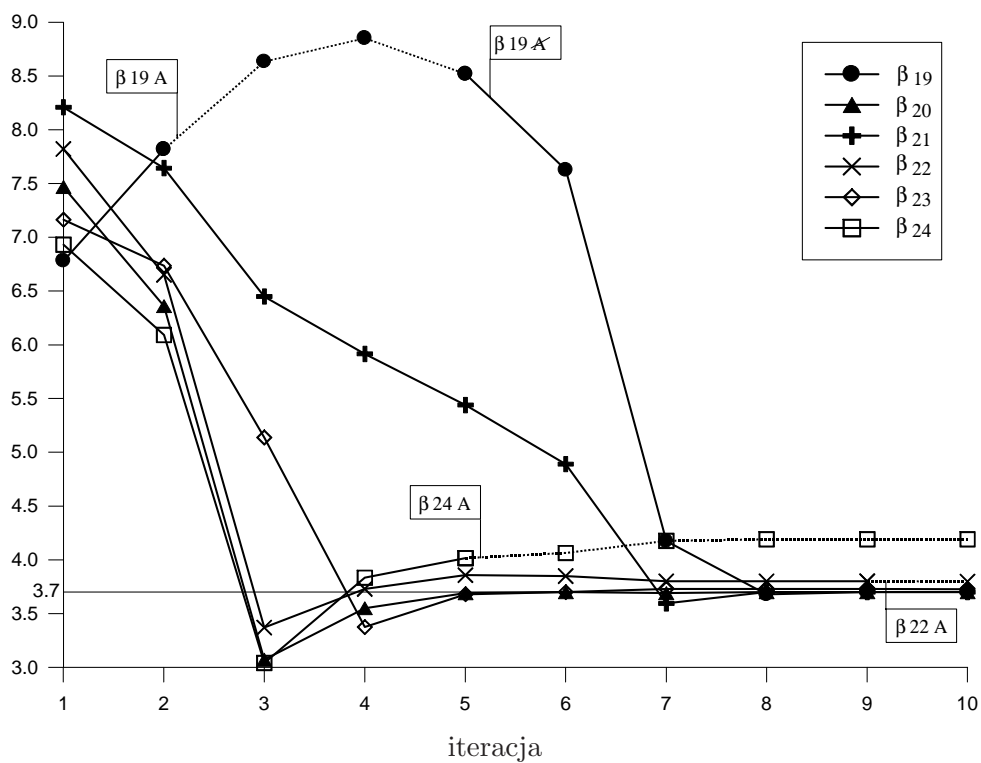
RYS. 4.15. Podejście standardowe. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 13-18RYS. 4.16. Podejście standardowe. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 19-24



Rys. 4.17. Optymalizacja interaktywna. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 1-6



Rys. 4.18. Optymalizacja interaktywna. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 7-12

RYS. 4.19. Optimalizacja interaktywna. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 13-18RYS. 4.20. Optimalizacja interaktywna. Wskaźniki  $\beta$  odpowiadające ograniczeniom 19-24

	Wartość początkowa 1	Wyniki optymalizacji			
		STD 2	SPZ 3	SPZ+PPP 4	SPZ+PPP+AON 5
Objętość	289.606 m <sup>3</sup>	268.000 m <sup>3</sup>	268.000 m <sup>3</sup>	268.000 m <sup>3</sup>	268.000 m <sup>3</sup>
$x_1^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>	476.47 cm <sup>2</sup>	476.47 cm <sup>2</sup>	476.47 cm <sup>2</sup>	476.47 cm <sup>2</sup>
$x_2^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>	414.46 cm <sup>2</sup>	414.46 cm <sup>2</sup>	414.46 cm <sup>2</sup>	414.46 cm <sup>2</sup>
$x_3^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>	1116.70 cm <sup>2</sup>	1116.70 cm <sup>2</sup>	1116.70 cm <sup>2</sup>	1116.70 cm <sup>2</sup>
$x_4^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>	498.28 cm <sup>2</sup>	498.28 cm <sup>2</sup>	498.28 cm <sup>2</sup>	498.28 cm <sup>2</sup>
$x_5^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>	2745.40 cm <sup>2</sup>	2745.40 cm <sup>2</sup>	2745.40 cm <sup>2</sup>	2745.40 cm <sup>2</sup>
$x_6^\mu$	1133.91 cm <sup>2</sup>	701.94 cm <sup>2</sup>	701.94 cm <sup>2</sup>	701.94 cm <sup>2</sup>	701.94 cm <sup>2</sup>
$x_7^d$	25.00 m	26.05 m	26.05 m	26.05 m	26.05 m
$x_8^d$	50.00 m	49.88 m	49.88 m	49.88 m	49.88 m
$\beta_1$	1.99	3.77	3.77	3.77	3.77
$\beta_2$	1.98	3.91	3.91	3.91	3.91 / 3.91
$\beta_3$	1.50	4.80	4.80	4.80	4.89 / 4.80
$\beta_4$	2.70	3.97	3.97	3.97	3.97 / 3.97
$\beta_5$	1.73	4.85	4.85	4.85	4.95 / 4.85
$\beta_6$	-0.87	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_7$	2.14	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_8$	3.07	5.71	5.71	5.71	6.21 / 5.71
$\beta_9$	2.97	6.74	6.74	6.74	7.41 / 6.74
$\beta_{10}$	3.39	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_{11}$	6.10	4.01	4.01	4.01	4.01 / 4.01
$\beta_{12}$	0.70	5.57	5.57	5.57	5.71 / 5.57
$\beta_{13}$	3.45	3.78	3.78	3.78	3.78 / 3.78
$\beta_{14}$	7.53	4.56	4.56	4.56	4.56 / 4.56
$\beta_{15}$	3.85	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_{16}$	7.10	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_{17}$	10.58	7.01	7.01	7.01	7.01 / 7.01
$\beta_{18}$	4.10	3.72	3.72	3.72	3.72
$\beta_{19}$	6.78	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_{20}$	7.46	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_{21}$	8.21	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>	<b>3.70</b>
$\beta_{22}$	7.82	3.80	3.80	3.80	3.80
$\beta_{23}$	7.16	3.73	3.73	3.73	3.73
$\beta_{24}$	6.93	4.21	4.21	4.21	4.19 / 4.21

OPT war. f. celu	10	10	10	10
OPT grad. f. celu	10	10	10	10
REL war. f. granicz.	2961	2325	1577	1039
REL grad. f. granicz.	1774	1450	804	608
Porównawczy czas	1.0	0.79	0.53	0.35

TABLICA 4.2. Porównanie różnych strategii optymalizacji niezawodnościowej



---

## Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji geometrycznie nieliniowych

---

Przy projektowaniu takich konstrukcji prętowych jak: maszty radiowe, słupy trakcji wysokiego napięcia, powłoki siatkowe czy przekrycia strukturalne konieczne często jest uwzględnienie możliwości wystąpienia dużych przemieszczeń konstrukcji oraz utraty stateczności. Ponadto zdarza się (zob. np. [99]), że otrzymywane w procesie optymalizacji deterministycznej konstrukcje optymalne są bardzo wrażliwe na imperfekcje geometrii i odmienne od założonych parametry materiału, prowadzące do lokalnej lub globalnej utraty stateczności. Dlatego też racjonalnym rozwiązaniem w optymalizacji konstrukcji geometrycznie nieliniowych wydaje się zastosowanie aparatu optymalizacji niezawodnościowej, w której uwzględniono funkcje graniczne typu (3.9).

W niniejszej pracy do nieliniowej analizy zagadnienia statyki konstrukcji używane są: metoda Newtona-Raphsona i metoda stałego promienia (stałej długości łuku) (zob. [15]), umożliwiające numeryczną analizę stanu równowagi w otoczeniu punktów granicznych. Pomimo, że w przypadku analizy sprężystych konstrukcji geometrycznie nieliniowych nie jest to konieczne, w celu poprawy zbieżności algorytmu iteracyjnego realizowany jest on często jako przyrostowo-iteracyjny. W programie PSAP-T-NL zaimplementowano metodę automatycznych przyrostów, która wylicza wielkość przyrostu obciążenia w zależności od tego jaki charakter ma w danej chwili zachowanie konstrukcji.

Ponieważ w przypadku zagadnień geometrycznie nieliniowych odpowiedź konstrukcji nie zależy od historii obciążenia, to do analizy wrażliwości użyto dyskretnej metody układu



sprężonego (zob. dodatek B.2). Podstawową zaletą tej metody jest to, iż jej efektywność praktycznie nie zależy od liczby parametrów projektowych, co jest niesłychanie istotne w kontekście zadania analizy niezawodności.

Poza omówionymi już w podrozdziale 4.3 składnikami efektywnego interaktywnego systemu optymalizacji niezawodnościowej, system przystosowany do optymalizacji konstrukcji nieliniowych wyposażony musi być w szereg rozwiązań zapobiegających przerwaniu procesu optymalizacji w przypadku braku zbieżności w zadaniu analizy konstrukcji. W programie PSAP-T-NL w razie wystąpienia problemów ze zbieżnością algorytmu iteracyjnego, użytkownik w sposób interaktywny może zmienić wartości parametrów algorytmu, takich jak:

- liczba przyrostów obciążenia,
- rodzaj algorytmu iteracyjnego (Newton-Raphson, zmodyfikowany Newton-Raphson, metoda stałego promienia),
- maksymalna liczba iteracji na kroku przyrostowym,
- tolerancja (parametr zbieżności),
- parametry sterujące zmianami długości promienia.

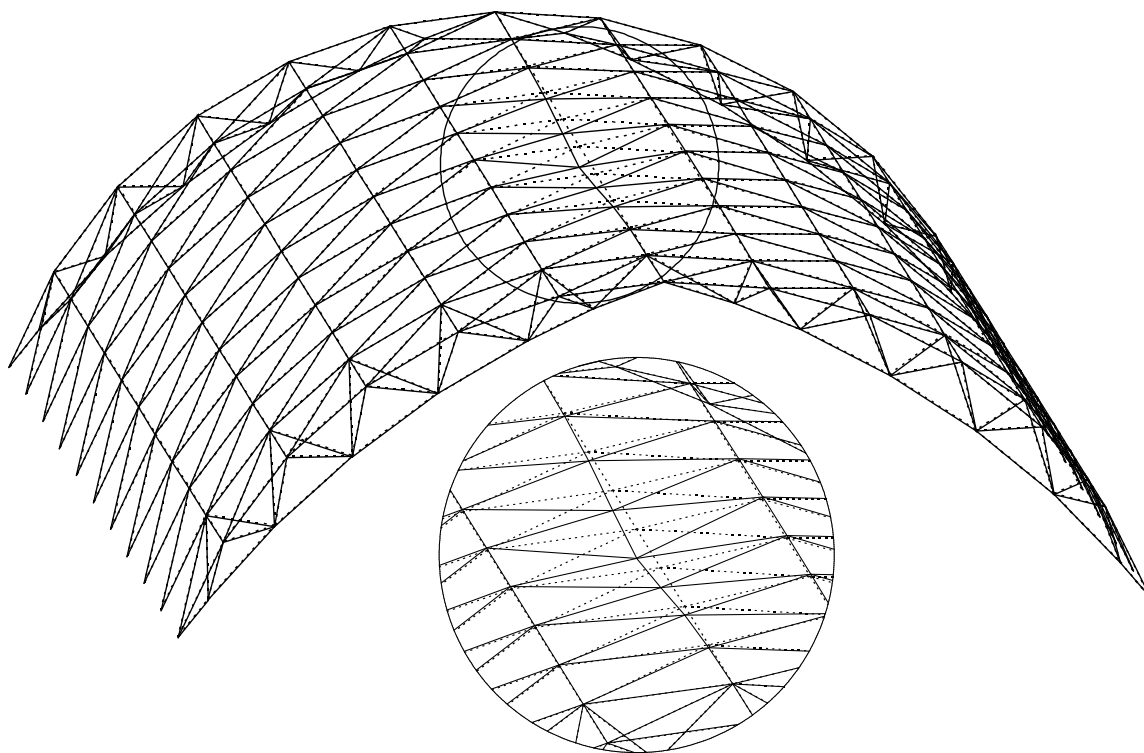
Po zmianie parametrów analiza może być kontynuowana lub może nastąpić restart.

Poniżej przedstawione zostaną trzy przykłady analizy niezawodności oraz optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji geometrycznie nieliniowych, narażonych na globalną utratę stateczności. Podkreślone zostaną trudności związane z ich numeryczną realizacją oraz metody ich przewyciężenia.

### Przykład 5.1

Do klasy konstrukcji, przy ocenie bezpieczeństwa których istotne jest uwzględnienie dużych przemieszczeń oraz możliwości wystąpienia awarii w postaci przeskoku węzłów należy analizowana już w podrozdziale 3.3 kratownica przestrzenna w kształcie powłoki cylindrycznej (zob. rysunki 3.4 i 3.5). W niniejszym przykładzie zbadano wpływ losowych imperfekcji położenia węzłów tej konstrukcji na prawdopodobieństwo globalnej utraty stateczności (na rys. 5.1 przedstawiono przykładową postać pokrytyczną). Podobnie jak w przykładzie 3.1, elementy konstrukcji podzielone są na 7 grup (por. rysunki 3.6 i 3.7). Schemat obciążenia konstrukcji pokazano na rysunku 3.8b. Przyjęto intensywność obciążenia  $p = 0.28 \text{ kN/m}^2$ . Rozpatrywane w przykładzie zmienne losowe wymienione zostały w tabeli 5.1. Funkcja graniczna dana jest wzorem (3.9). Występujący w tej funkcji krytyczny mnożnik obciążenia  $\lambda_{cr}$  jest mnożnikiem schematu obciążenia o intensywności  $\lambda p$ , gdzie  $\lambda$  jest losowym mnożnikiem obciążenia i dlatego utrata stateczności konstrukcji następuje gdy,  $\lambda_{cr} \leq 1$ . Zadanie analizy niezawodności przeprowadzono dla dwóch przypadków:

1. losowe są jedynie pola przekrojów prętów, moduł sprężystości materiału oraz mnożnik obciążenia - zmienne  $X_1$ – $X_9$ ,



RYS. 5.1. Kratowa powłoka cylindryczna - utrata stateczności w postaci przeskoku węzłów; linia przerywana - konfiguracja początkowa, linia ciągła - konfiguracja pokrytyczna

- uwzględniono także imperfekcje położenia węzłów konstrukcji, modelując współrzędne węzłów niepodporowych jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym i odchyleniu standardowym od założonego położenia równym 1.5 cm - zmienne  $X_{10}-X_{444}$ .

Otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \text{przypadek 1:} \quad & \beta = 4.137, \quad P_f = 1.76 \cdot 10^{-5}, \\ \text{przypadek 2:} \quad & \beta = 2.167, \quad P_f = 1.51 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

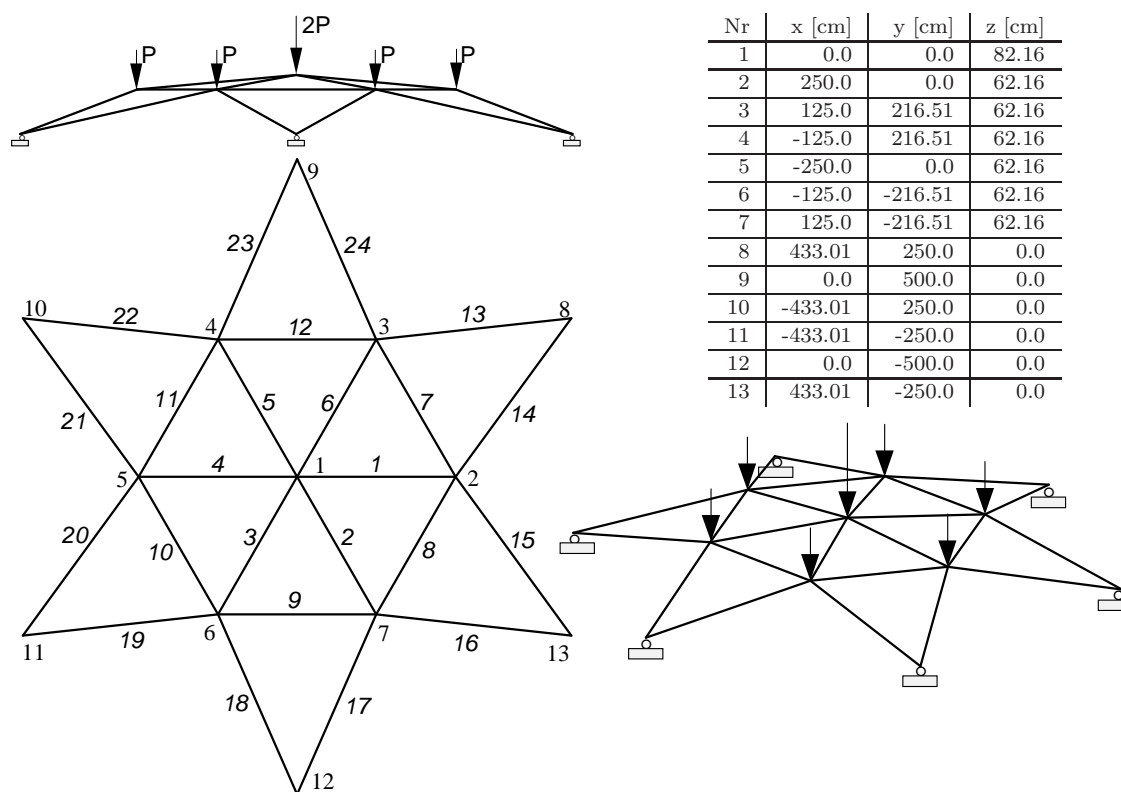
Jak widać, uwzględnienie losowości położenia węzłów spowodowało ponad 850-krotne zwiększenie prawdopodobieństwa awarii.

Znalezienie punktu projektowego dla przypadku nr 2 przy pomocy algorytmu ARF, przyjmując bardzo zgrubny warunek zbieżności, wymagało 14-krotnego obliczenia wartości funkcji granicznej (obliczenia wartości  $\lambda_{cr}$ ) oraz 7-krotnego obliczenia gradientu. Należy tu podkreślić, że tylko dzięki zastosowaniu analitycznych metod analizy wrażliwości zadanie to można było rozwiązać w stosunkowo krótkim czasie (około 10 min na komputerze PC z procesorem Pentium II 300 MHz). Policzenie gradientów funkcji granicznej metodą różnic skończonych wymagałoby co najmniej 3122-krotnego obliczenia wartości krytycznego mnożnika obciążenia, co zajęłoby ponad 1.5 doby.  $\diamond$

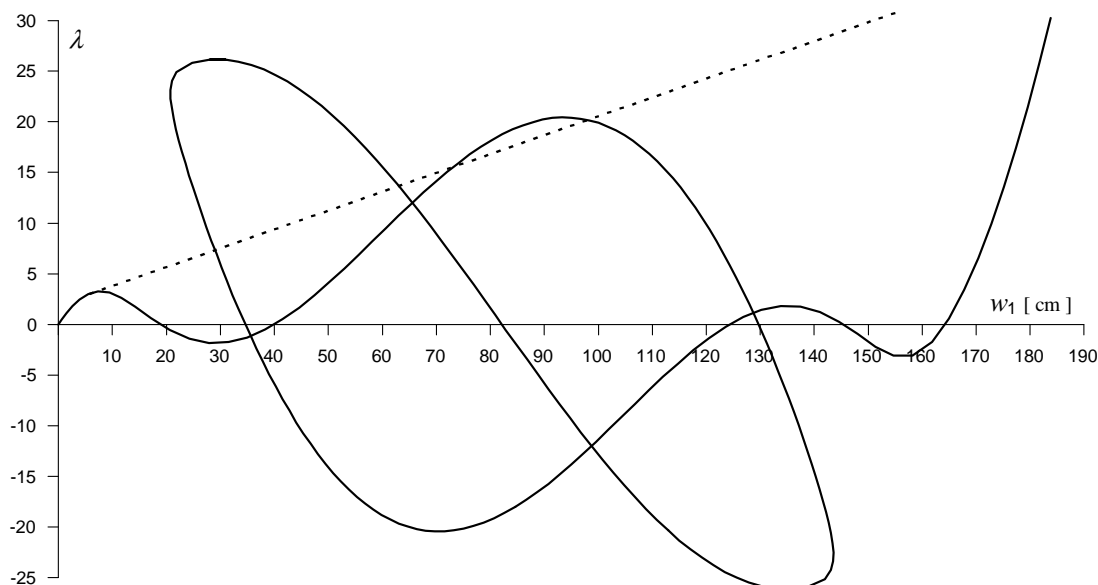
Zmienna	Typ rozkładu	Wartość średnia	Odch. stand.	Opis
$X_1$	log-normalny	30.0 cm <sup>2</sup>	1.5 cm <sup>2</sup>	Pole przekroju prętów grupy 1
$X_2$	log-normalny	35.0 cm <sup>2</sup>	1.75 cm <sup>2</sup>	Pole przekroju prętów grupy 2
$X_3$	log-normalny	30.0 cm <sup>2</sup>	1.5 cm <sup>2</sup>	Pole przekroju prętów grupy 3
$X_4$	log-normalny	25.0 cm <sup>2</sup>	1.25 cm <sup>2</sup>	Pole przekroju prętów grupy 4
$X_5$	log-normalny	30.0 cm <sup>2</sup>	1.5 cm <sup>2</sup>	Pole przekroju prętów grupy 5
$X_6$	log-normalny	15.0 cm <sup>2</sup>	0.75 cm <sup>2</sup>	Pole przekroju prętów grupy 6
$X_7$	log-normalny	15.0 cm <sup>2</sup>	0.75 cm <sup>2</sup>	Pole przekroju prętów grupy 7
$X_8$	log-normalny	21000.0 kN/cm <sup>2</sup>	500.0 kN/cm <sup>2</sup>	Moduł sprężystości
$X_9$	Gumbela	1.0	0.1	Mnożnik obciążenia
$X_{10}$	normalny	0.0 m	1.5 cm	Wsp. $x$ - pierw. niepodpartego węzła
$X_{11}$	normalny	-11.26 m	1.5 cm	Wsp. $y$ - pierw. niepodpartego węzła
$X_{12}$	normalny	0.92 m	1.5 cm	Wsp. $z$ - pierw. niepodpartego węzła
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$X_{442}$	normalny	26.09 m	1.5 cm	Wsp. $x$ - ost. niepodpartego węzła
$X_{443}$	normalny	11.26 m	1.5 cm	Wsp. $y$ - ost. niepodpartego węzła
$X_{444}$	normalny	0.92 m	1.5 cm	Wsp. $z$ - ost. niepodpartego węzła

TABLICA 5.1. Zmienne losowe

## Przykład 5.2

Rys. 5.2. Kopia kratowa: geometria i obciążenie ( $P=20$  kN)

W niniejszym przykładzie rozpatrzono zadanie optymalizacji niezawodnościowej mało-wyniosłej kopuły kratowej, której geometrię oraz schemat obciążenia pokazano na ry-



Rys. 5.3. Kopała kratowa: linia ciągła - podstawowa ścieżka równowagi, linia przerywana - uproszczona ścieżka równowagi pokrytycznej

sunku 5.2. Ze względu na bardzo silnie nieliniowe zachowanie, konstrukcja ta analizowana była w wielu pracach poświęconych mechanice nieliniowej oraz stateczności (zob. np. [67, 123, 126]). Na rysunku 5.3 linią ciągłą zaznaczono podstawową ścieżkę równowagi konstrukcji. Na osiach wykresu  $\lambda$  i  $w_1$  odłożono, odpowiednio, mnożnik obciążenia i przemieszczenie pionowe węzła nr 1 (dodatnia wartość gdy przemieszczenie do dołu). Ścieżka ta posiada wiele punktów granicznych oraz, nie zaznaczonych na wykresie, punktów bifurkacji. Kopała składa się z 24 elementów o przekroju rurowym (przyjęto, że stosunek średnicy zewnętrznej do wewnętrznej wynosi 1.25), które podzielono na 3 grupy. Pierwszą grupę stanowią pręty o numerach 1–6, drugą pręty 7–12, a trzecią pręty 13–24. Losowe właściwości materiału i geometrii konstrukcji oraz obciążenia modelowane są przez 27 niezależnych zmiennych losowych, których opis zamieszczono w tabeli 5.2. Przyjęto, że pola przekrojów grup elementów są zmiennymi o rozkładzie logarytmiczno-normalnym natomiast imperfekcje wykonania uwzględniono modelując współrzędne węzłów 1–7 jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym. Ponadto jako zmienne losowe traktowane są moduł Younga i granica plastyczności materiału oraz mnożnik obciążenia. Zmiennymi projektowymi zadania optymalizacji są pola przekrojów grup prętów, a także współrzędne  $x$ ,  $y$  węzłów 2–7, co pozwala na zmianę długości prętów bez zmiany wysokości położenia węzłów. Zdefiniowano 20 warunków granicznych:

- warunek nr 1 - warunek oparty na przemieszczeniowej funkcji granicznej typu (3.7) nałożony na przemieszczenie pionowe węzła 1; przyjęto przemieszczenie dopuszczalne  $q^a = 3.5$  cm,
- warunki 2–19 - warunki oparte na funkcjach granicznych naprężeniowych / stateczności lokalnej typu (3.8) nałożone na naprężenia w prętach 1–6 i 13–24,
- warunek nr 20 - warunek oparty na funkcji granicznej stateczności globalnej typu (3.9).

Powyższym warunkom odpowiadają ograniczenia niezawodnościowe zadania optymalizacji. Na podstawie wstępnych obliczeń stwierdzono, że naprężenia rozciągające w prętach drugiej grupy są niewielkie i dlatego odpowiedni poziom bezpieczeństwa zapewniony zostanie przez ograniczenia konstrukcyjne, nałożone na minimalną wielkość pól przekrojów prętów. Sformułowanie zadania optymalizacji niezawodnościowej dane jest zatem następująco:

$$\text{znaleźć } \min C(\mathbf{x}^\mu) = \sum_{i=1}^3 x_i^\mu l_i(\mathbf{x}^\mu), \quad (5.1)$$

przy ograniczeniach:

$$\beta_i(\mathbf{x}^\mu) \geq 3.7, \quad i = 1, \dots, 19, \quad (5.2)$$

$$\beta_{20}(\mathbf{x}^\mu) \geq 4.7, \quad (5.3)$$

$$4\text{cm}^2 \leq x_j^\mu \leq 30\text{cm}^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.4)$$

$$150\text{cm} \leq x_8^\mu \leq 350\text{cm}, \quad (5.5)$$

$$75\text{cm} \leq x_{11}^\mu \leq 175\text{cm}, \quad (5.6)$$

$$130\text{cm} \leq x_{12}^\mu \leq 303\text{cm}, \quad (5.7)$$

$$-175\text{cm} \leq x_{14}^\mu \leq -75\text{cm}, \quad (5.8)$$

$$130\text{cm} \leq x_{15}^\mu \leq 303\text{cm}, \quad (5.9)$$

$$-350\text{cm} \leq x_{17}^\mu \leq -150\text{cm}, \quad (5.10)$$

$$-175\text{cm} \leq x_{20}^\mu \leq -75\text{cm}, \quad (5.11)$$

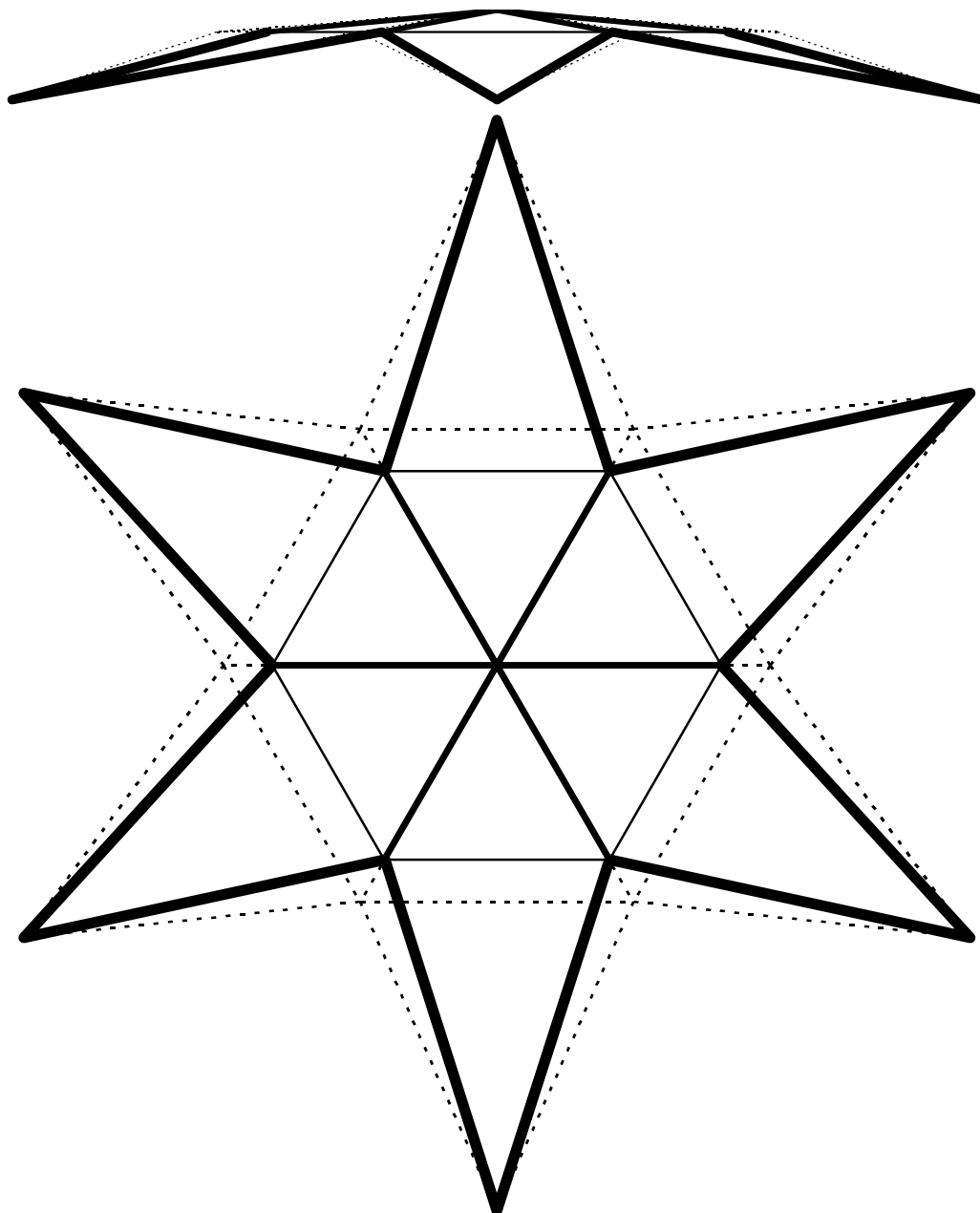
$$-303\text{cm} \leq x_{21}^\mu \leq -130\text{cm}, \quad (5.12)$$

$$75\text{cm} \leq x_{23}^\mu \leq 175\text{cm}, \quad (5.13)$$

$$-303\text{cm} \leq x_{24}^\mu \leq -130\text{cm}, \quad (5.14)$$

gdzie  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  są łącznymi długościami prętów  $i$ -tej grupy. Z uwagi na znacznie poważniejsze konsekwencje awarii w postaci utraty przez konstrukcję stateczności globalnej w ograniczeniu (5.3) przyjęto większą niż w pozostałych minimalną wartość wskaźnika niezawodności. Ograniczenia (5.5)–(5.14) są ograniczeniami wynikającymi z przyjętego zakresu zmienności długości prętów 1–6 (150 cm–350 cm).

Projekt optymalny otrzymano po 8 iteracjach. Odpowiadające mu wartości parametrów projektowych przedstawiono w ostatniej kolumnie tabeli 5.2, a kształt konstrukcji optymalnej pokazano na rysunku 5.4 (różnymi grubościami linii zaznaczono względne wielkości pól przekrojów prętów). Na rysunkach 5.5–5.8 przedstawiono historię zmian procesu optymalizacji. Można zauważyć, że projekt stabilizuje się po 6 iteracjach, a w punkcie optymalnym aktywne są wszystkie ograniczenia niezawodnościowe za wyjątkiem ograniczenia przemieszczeniowego. Ze zmiany geometrii konstrukcji wynika również ciekawa zmiana podstawowej ścieżki równowagi, pokazanej na rysunkach 5.9 i 5.10. Jak to widać na rysunku 5.10, gdzie porównano ścieżkę równowagi konstrukcji początkowej i optymalnej, wartość obciążenia odpowiadająca pierwszemu punktowi granicznemu wzrosła ponad trzykrotnie. Lokalizacja punktu granicznego na ścieżce równowagi konstrukcji optymalnej



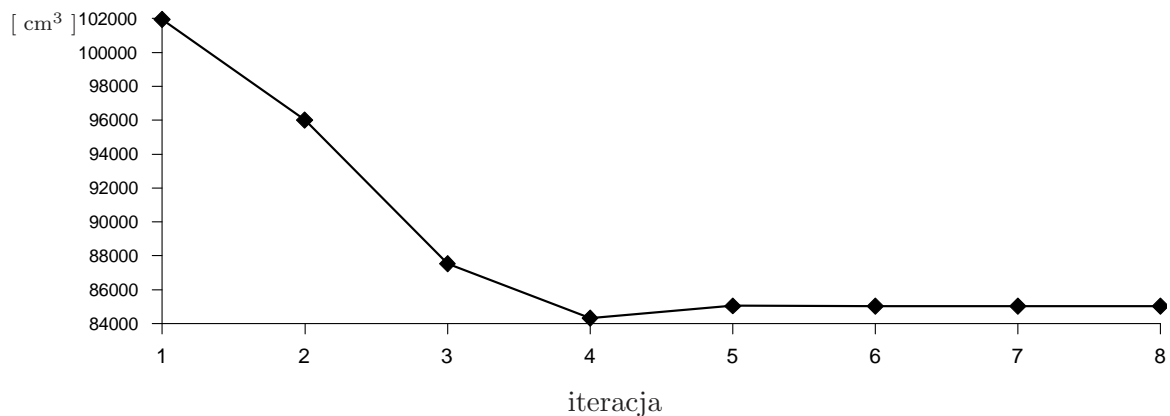
Rys. 5.4. Kopia kratowa: konfiguracja optymalna

wymagała modyfikacji standardowego algorytmu bazującego na sprawdzaniu osobliwości macierzy sztywności (por. dodatek B.2.4). Ponieważ w naszym przypadku, właściwy punkt graniczny poprzedzony jest dwoma punktami ekstremalnymi (mniej więcej dla  $\lambda = 5$  i  $\lambda = 9$ ), to warunek osobliwości macierzy należało uzupełnić o warunek sprawdzenia kierunku przyrostu obciążenia.

W realizacji numerycznej przykładu niezbędne okazały się, zaimplementowane w programie PSAP-T-NL, możliwości interaktywnej kontroli parametrów procedury rozwiązującej oraz restartowania algorytmu obliczeniowego. Szczególnie na pierwszych iteracjach

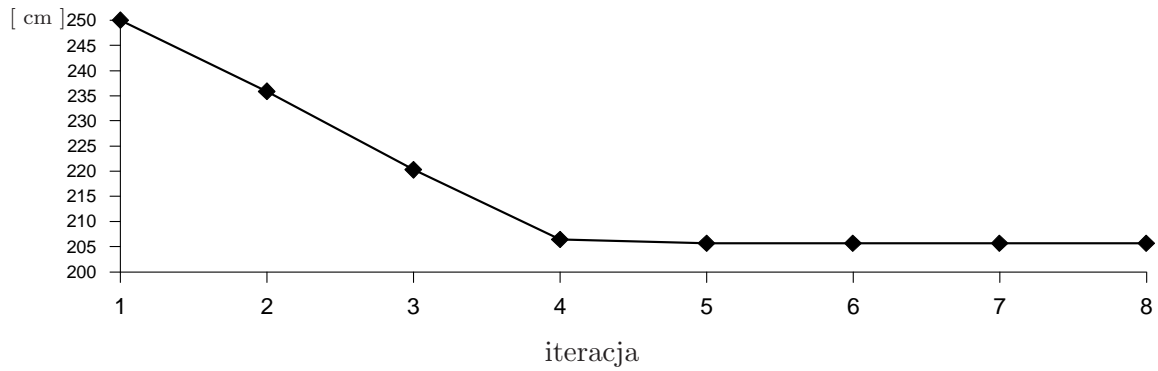
procesu optymalizacji, kiedy w celu policzenia wartości ograniczeń niezawodnościowych należało obliczyć odpowiedź konstrukcji dla realizacji mnożnika obciążenia wielokrotnie przekraczających wartość mnożnika krytycznego, występowały problemy ze zbieżnością algorytmu analizy zadania równowagi. Problemy te udawało się zazwyczaj przezwyciężyć zwiększając wartość parametru zbieżności procedury iteracyjnej lub maksymalną liczbę iteracji na kroku przyrostowym lub też zmieniając parametry sterujące długością promienia.

Ponieważ, ze względu na ograniczenie (5.3), konstrukcja optymalna ma pracować w zakresie przedkrytycznym, to wydaje się uzasadnionym, by dla realizacji parametru  $\lambda > \lambda_{cr}$  przemieszczenia węzłów konstrukcji liczyć przyjmując uproszczoną postać pokrytycznej ścieżki równowagi. Propozycję takiego uproszczenia pokazano schematycznie na rysunku (5.3), gdzie do obliczeń przyjmuje się stałą wartość macierzy sztywności z iteracji poprzedzającej ‘przejście’ punktu krytycznego. Postępowanie to może być również użyte w przypadku kłopotów ze zbieżnością związanych z poruszaniem się po pokrytycznej ścieżce równowagi. W celu sprawdzenia przydatności tej metody, rozpatrywane zadanie optymalizacji niezawodnościowej rozwiązano aproksymując w opisany powyżej sposób wartości oraz gradienty ograniczeń (5.2). Otrzymano identyczne wyniki jak dla zadania bez aproksymacji w czasie krótszym o około 10%. Należy jednak pokreślić, iż postępowanie takie jest uprawnione jedynie wtedy, gdy projektowana konstrukcja ma pracować w zakresie przedkrytycznym  $\diamond$

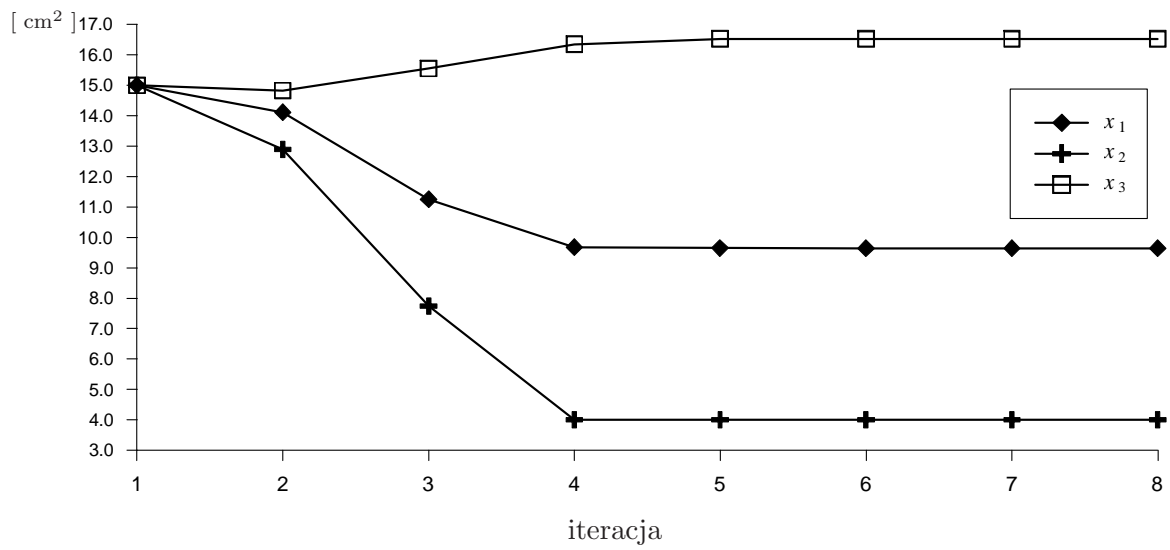


RYS. 5.5. Kopuła kratowa: objętość materiału konstrukcji

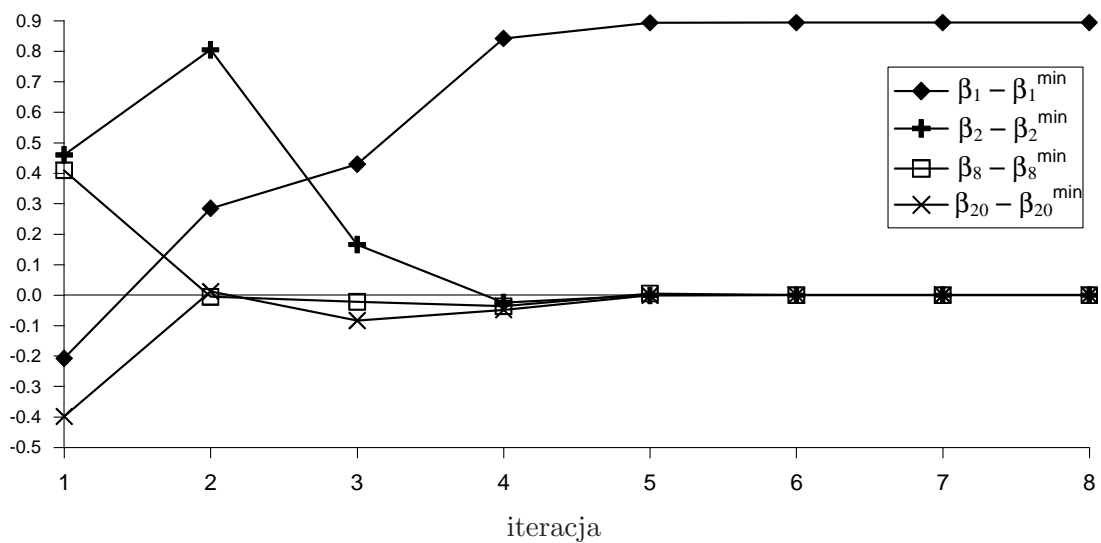




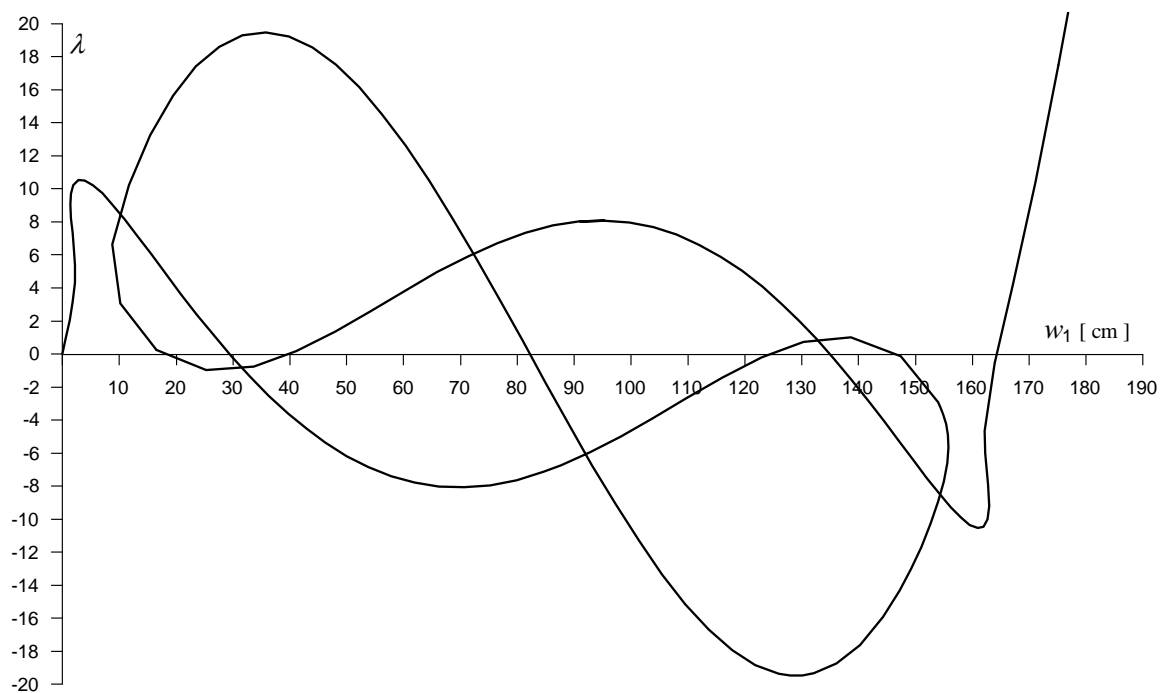
RYS. 5.6. Kopia kratowa: odległość w planie węzła 1 od węzłów 2-7



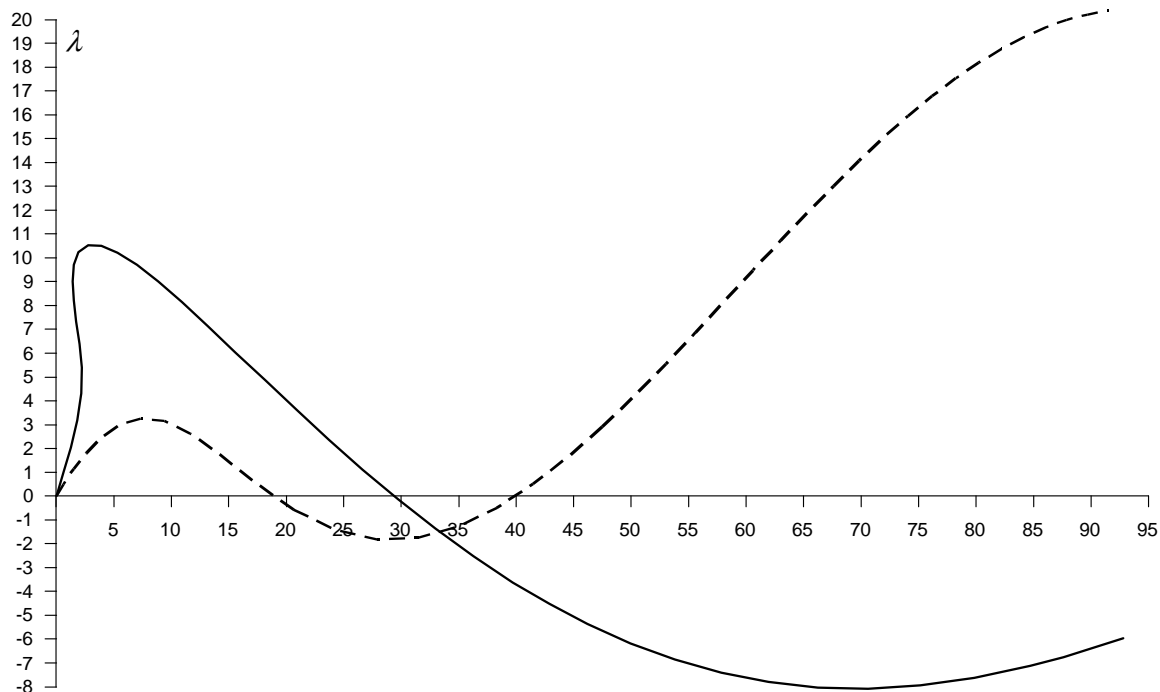
RYS. 5.7. Kopia kratowa: pola przekrojów grup elementów



RYS. 5.8. Kopia kratowa: wartości wybranych ograniczeń niezawodnościowych



Rys. 5.9. Kopała kratowa: podstawowa ścieżka równowagi konstrukcji optymalnej

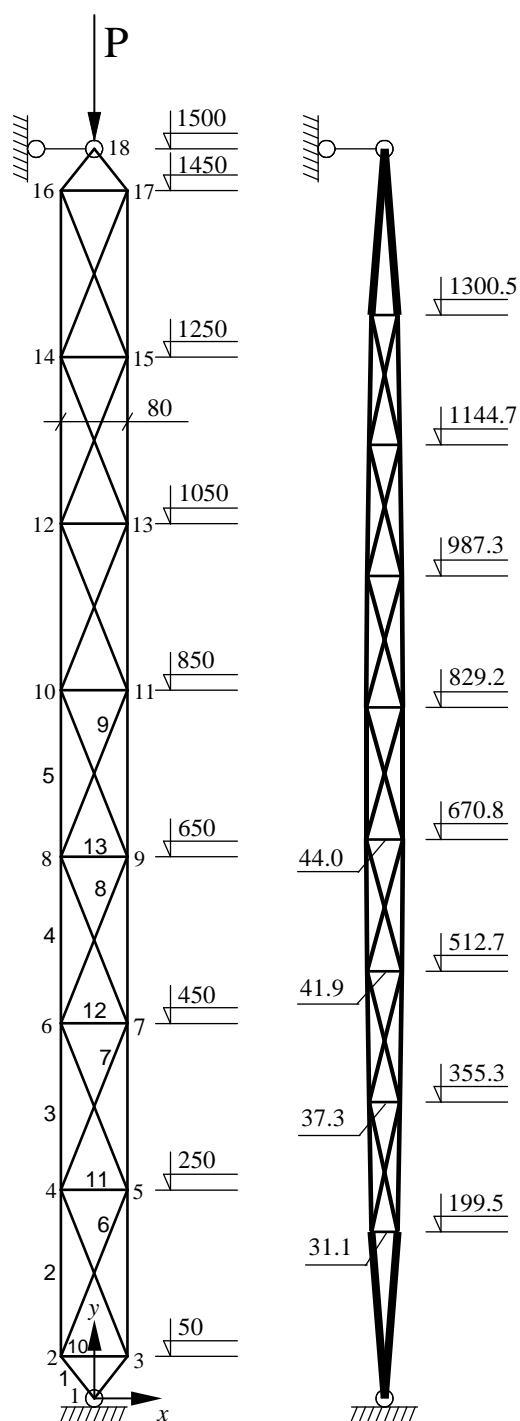


Rys. 5.10. Kopała kratowa: linia przerywana - ścieżka równowagi konstrukcji początkowej, linia ciągła - ścieżka równowagi konstrukcji optymalnej

Par.	Opis	Typ rozkładu prawdopodob.	Typ par. projektow.	Wartość początkowa	Wartość optymalna
X <sub>1</sub>	Pole przekroju elem. grupy 1 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_1^\mu$	15.0 cm <sup>2</sup>	9.65 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_1^\sigma$	0.75 cm <sup>2</sup>	
X <sub>2</sub>	Pole przekroju elem. grupy 2 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_2^\mu$	15.0 cm <sup>2</sup>	4.0 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_2^\sigma$	0.75 cm <sup>2</sup>	
X <sub>3</sub>	Pole przekroju elem. grupy 3 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_3^\mu$	15.0 cm <sup>2</sup>	16.53 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_3^\sigma$	0.75 cm <sup>2</sup>	
X <sub>4</sub>	Moduł sprężystości materiału	log-normalny	$\tilde{x}_4^\mu$	21000.0 kN/cm <sup>2</sup>	
			$\tilde{x}_4^\sigma$	1050.0 kN/cm <sup>2</sup>	
X <sub>5</sub>	Współrzędna <i>x</i> węzła 1	normalny	$\tilde{x}_5^\mu$	0.0 cm	
			$\tilde{x}_5^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>6</sub>	Współrzędna <i>y</i> węzła 1	normalny	$\tilde{x}_6^\mu$	0.0 cm	
			$\tilde{x}_6^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>7</sub>	Współrzędna <i>z</i> węzła 1	normalny	$\tilde{x}_7^\mu$	82.16 cm	
			$\tilde{x}_7^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>8</sub>	Współrzędna <i>x</i> węzła 2	normalny	$x_8^\mu$	250.0 cm	205.65 cm
			$\tilde{x}_8^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>9</sub>	Współrzędna <i>y</i> węzła 2	normalny	$\tilde{x}_9^\mu$	0.0 cm	
			$\tilde{x}_9^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>10</sub>	Współrzędna <i>z</i> węzła 2	normalny	$\tilde{x}_{10}^\mu$	62.16 cm	
			$\tilde{x}_{10}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>11</sub>	Współrzędna <i>x</i> węzła 3	normalny	$x_{11}^\mu$	125.0 cm	102.81 cm
			$\tilde{x}_{11}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>12</sub>	Współrzędna <i>y</i> węzła 3	normalny	$x_{12}^\mu$	216.51 cm	178.11 cm
			$\tilde{x}_{12}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>13</sub>	Współrzędna <i>z</i> węzła 3	normalny	$\tilde{x}_{13}^\mu$	62.16 cm	
			$\tilde{x}_{13}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>14</sub>	Współrzędna <i>x</i> węzła 4	normalny	$x_{14}^\mu$	-125.0 cm	-102.81 cm
			$\tilde{x}_{14}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>15</sub>	Współrzędna <i>y</i> węzła 4	normalny	$x_{15}^\mu$	216.51 cm	178.11 cm
			$\tilde{x}_{15}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>16</sub>	Współrzędna <i>z</i> węzła 4	normalny	$\tilde{x}_{16}^\mu$	62.16 cm	
			$\tilde{x}_{16}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>17</sub>	Współrzędna <i>x</i> węzła 5	normalny	$x_{17}^\mu$	-250.0 cm	-205.65 cm
			$\tilde{x}_{17}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>18</sub>	Współrzędna <i>y</i> węzła 5	normalny	$\tilde{x}_{18}^\mu$	0.0 cm	
			$\tilde{x}_{18}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>19</sub>	Współrzędna <i>z</i> węzła 5	normalny	$\tilde{x}_{19}^\mu$	62.16 cm	
			$\tilde{x}_{19}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>20</sub>	Współrzędna <i>x</i> węzła 6	normalny	$x_{20}^\mu$	-125.0 cm	-102.81 cm
			$\tilde{x}_{20}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>21</sub>	Współrzędna <i>y</i> węzła 6	normalny	$x_{21}^\mu$	-216.51 cm	-178.11 cm
			$\tilde{x}_{21}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>22</sub>	Współrzędna <i>z</i> węzła 6	normalny	$\tilde{x}_{22}^\mu$	62.16 cm	
			$\tilde{x}_{22}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>23</sub>	Współrzędna <i>x</i> węzła 7	normalny	$x_{23}^\mu$	125.0 cm	102.81 cm
			$\tilde{x}_{23}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>24</sub>	Współrzędna <i>y</i> węzła 7	normalny	$x_{24}^\mu$	-216.51 cm	-178.11 cm
			$\tilde{x}_{24}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>25</sub>	Współrzędna <i>z</i> węzła 7	normalny	$\tilde{x}_{25}^\mu$	62.16 cm	
			$\tilde{x}_{25}^\sigma$	1.0 cm	
X <sub>26</sub>	Mnożnik obciążenia $\lambda$	Gumbela	$\tilde{x}_{26}^\mu$	1.0	
			$\tilde{x}_{26}^\sigma$	0.15	
X <sub>27</sub>	Granica plastyczności materiału	log-normalny	$\tilde{x}_{27}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	
			$\tilde{x}_{27}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	

TABLICA 5.2. Parametry zadania optymalizacji niezawodnościowej kopuły kratowej

## Przykład 5.3



	Konstr. początk.	Konstr. optymal.
$\beta_1$	5.85	<b>3.70</b>
$\beta_2$	8.37	<b>3.70</b>
$\beta_3$	8.54	<b>3.70</b>
$\beta_4$	8.54	<b>3.70</b>
$\beta_5$	8.48	<b>3.70</b>
$\beta_6$	9.24	<b>3.70</b>
$\beta_7$	9.00	<b>3.70</b>
$\beta_8$	9.00	<b>3.70</b>
$\beta_9$	8.93	<b>3.70</b>
$\beta_{10}$	6.83	12.74 / 7.25
$\beta_{11}$	11.33	7.95 / 6.51
$\beta_{12}$	11.22	7.80 / 6.26
$\beta_{13}$	11.33	7.86 / 6.22
$\beta_{14}$	14.38	<b>4.2</b>

RYS. 5.11. Kolumna kratowa: konfiguracja początkowa i optymalna oraz wartości wskaźników niezawodności

Przykładem konstrukcji narażonej na awarię w postaci wybożenia pojedynczych prętów jak również globalną utratę stateczności typu bifurkacyjnego jest, pokazany na rysunku 5.11, 15-metrowy stalowy słup kratowy. Słup zrobiony jest z 40 kątowników równora-

miennych o polu przekroju poprzecznego równym  $20\text{ cm}^2$ . Pręty podzielono na 13 grup, skupiających elementy położone symetrycznie względem dwóch osi symetrii konstrukcji. Na rysunku 5.11 zaznaczono po jednym elemencie z każdej grupy. Obciążenie słupa stanowi działająca osiowo siła skupiona  $P = 200\text{ kN}$ . Parametry zadania optymalizacji niezawodnościowej przedstawiono w tabeli 5.3. Stochastyczny opis konstrukcji stanowi 25 zmiennych losowych. Są to: pola przekrojów grup elementów, położenie węzłów konstrukcji, moduł sprężystości i granica plastyczności materiału oraz mnożnik obciążenia. Należy tu zaznaczyć, że losowe parametry kształtu zostały tak dobrane aby modelowane przez nie imperfekcje wykonania były symetryczne i nie zmieniały bifurkacyjnego charakteru globalnej utraty stateczności. Uproszczenie to wynika ze stosowania w niniejszej pracy gradientowych metod optymalizacyjnych i trudności napotykanych w analizie wrażliwości krytycznego mnożnika obciążenia, gdy infinitezymalne zaburzenie parametru powoduje zmianę typu punktu krytycznego. Parametrami projektowymi są wartości średnie pól przekrojów grup elementów oraz wartości średnie odpowiednio zdefiniowanych parametrów kształtu. Minimalne momenty bezwładności przekrojów wyliczane są na podstawie znajomości pól przekrojów z zależności:  $J = 0.192A^2 + 1.261A - 6.781$ , gdzie  $J$  i  $A$  dane są, odpowiednio, w  $\text{cm}^4$  i  $\text{cm}^2$  (por. przykład 3.2). Przyjęto 13 warunków granicznych typu naprężeniowego / stateczności lokalnej, (3.8), nałożonych na naprężenia w prętach poszczególnych grup oraz jeden warunek stateczności globalnej (warunek nr 14), (3.9). Problem niezawodnościowej minimalizacji ciężaru słupa kratowego sformułowano następująco:

$$\text{znaleźć} \quad \min C(x_1^\mu, \dots, x_{21}^\mu) = \sum_{i=1}^{13} x_i^\mu l_i(x_{14}^\mu, \dots, x_{21}^\mu), \quad (5.15)$$

przy ograniczeniach:

$$\beta_i(\mathbf{x}^\mu) \geq 3.7, \quad i = 1, \dots, 13, \quad (5.16)$$

$$\beta_{14}(\mathbf{x}^\mu) \geq 4.2, \quad (5.17)$$

$$5\text{cm}^2 \leq x_j^\mu \leq 35\text{cm}^2, \quad j = 1, \dots, 13, \quad (5.18)$$

$$10\text{cm} \leq x_j^\mu \leq 60\text{cm}, \quad j = 14, \dots, 17, \quad (5.19)$$

$$160\text{cm} \leq x_{18}^\mu \leq 710\text{cm}, \quad (5.20)$$

$$110\text{cm} \leq x_{19}^\mu \leq 660\text{cm}, \quad (5.21)$$

$$60\text{cm} \leq x_{20}^\mu \leq 610\text{cm}, \quad (5.22)$$

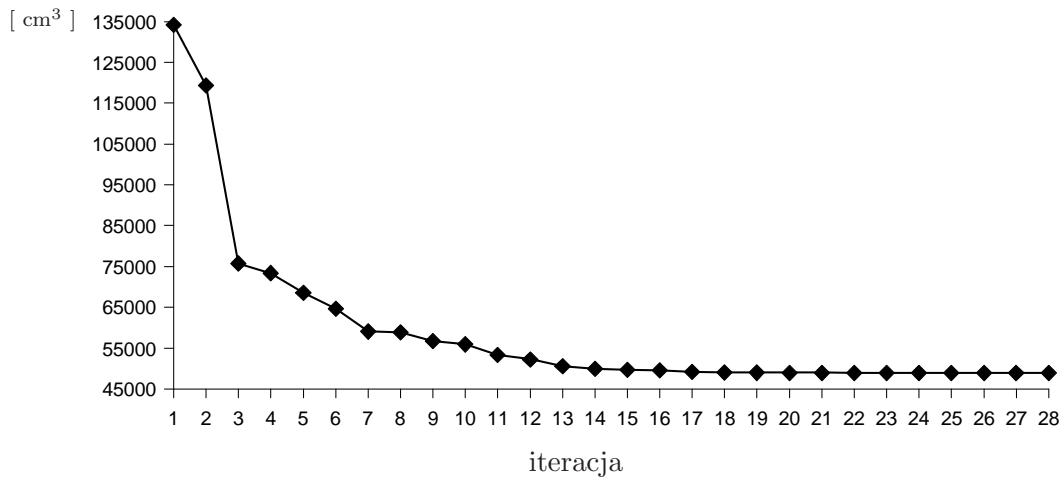
$$10\text{cm} \leq x_{21}^\mu \leq 560\text{cm}, \quad (5.23)$$

$$x_j^\mu - x_{j+1}^\mu - 50 \geq 0, \quad j = 18, 19, 20, \quad (5.24)$$

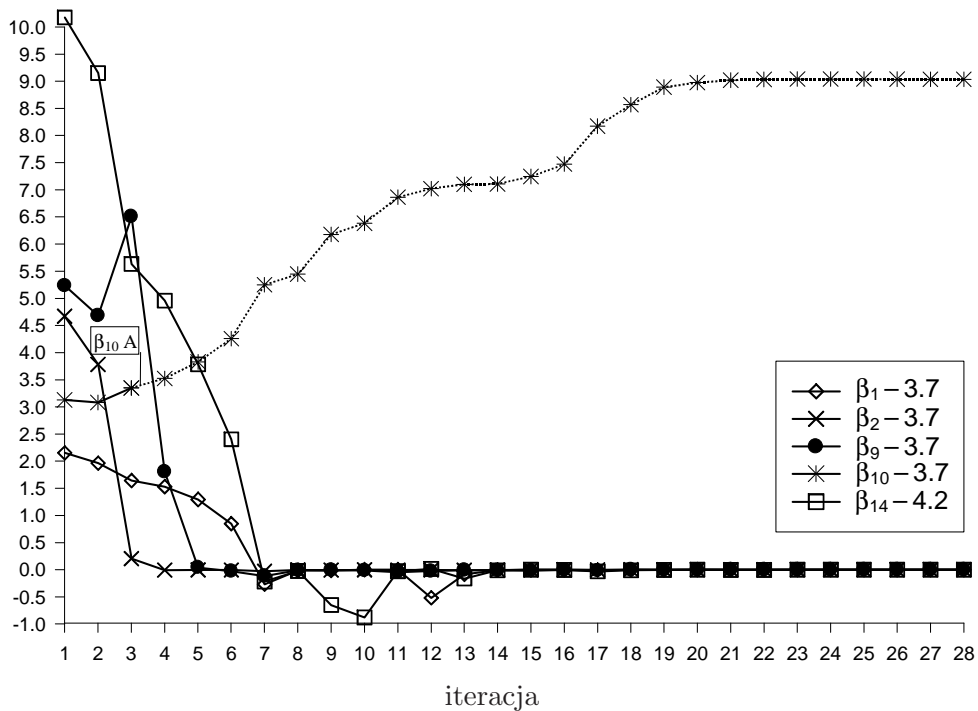
gdzie  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 13$  są łącznymi długościami prętów  $i$ -tej grupy. Ograniczenia (5.24) mają zapewnić zachowanie minimalnych odległości między prętami poziomymi.

Projekt optymalny otrzymano po 28 iteracjach. Na rysunku 5.11 pokazano kształt konstrukcji optymalnej (różnymi grubościami linii zaznaczono wielkości pól przekrojów), a odpowiadające jej wartości parametrów projektowych przedstawiono w tabeli 5.3. Objętość konstrukcji zmniejszyła się o ponad 63%. W punkcie optymalnym aktywne były

wszystkie ograniczenia niezawodnościowe, za wyjątkiem ograniczeń nałożonych na niezawodność rozciąganych prętów poziomych, których wartości po kilku iteracjach były aproksymowane zgodnie z przedstawioną w punkcie 4.3 strategią AON. Wykresy przedstawiające historię zmian funkcji celu, wybranych ograniczeń oraz parametru kształtu pokazano na rysunkach 5.12–5.14. Poszukując przyczyn powolnej zbieżności procesu optymalizacji warto zwrócić uwagę na charakterystyczny dla parametrów kształtu wykres zmian położenia stężenia 8–9 (rys. 5.14), którego oscylacje powodowały odpowiednie zwiększanie i zmniejszanie długości wyboyczeniowych sąsiednich prętów, utrudniając dobranie właściwej długości kroku i spełnienie warunków zbieżności.  $\diamond$



Rys. 5.12. Słup kratowy: objętość materiału konstrukcji

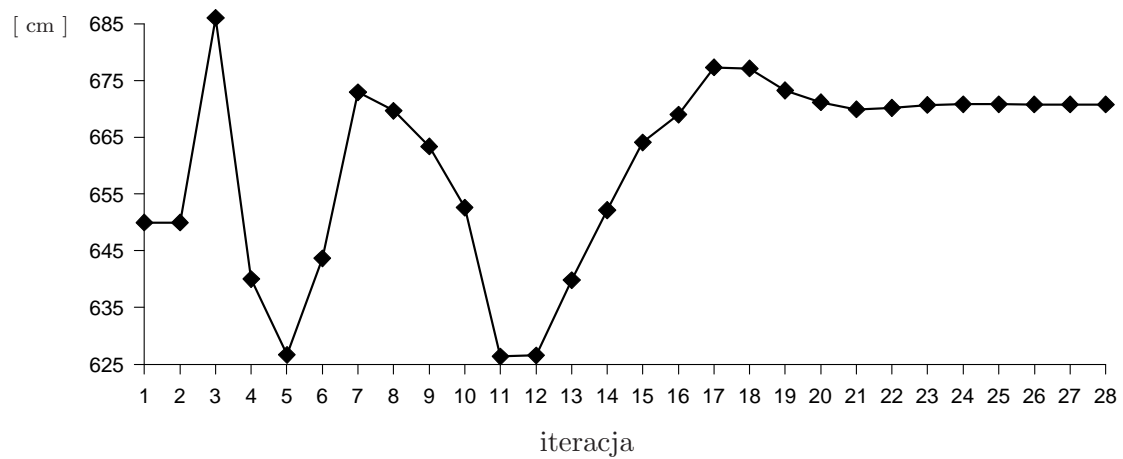


Rys. 5.13. Słup kratowy: wartości wybranych ograniczeń niezawodnościowych

Par.	Opis	Typ rozkładu prawdopodob.	Typ par. projektow.	Wartość początkowa	Wartość optymalna
X <sub>1</sub>	Pole przekroju elem. grupy 1 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_1^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	14.13 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_1^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>2</sub>	Pole przekroju elem. grupy 2 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_2^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	8.06 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_2^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>3</sub>	Pole przekroju elem. grupy 3 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_3^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	8.21 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_3^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>4</sub>	Pole przekroju elem. grupy 4 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_4^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	8.31 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_4^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>5</sub>	Pole przekroju elem. grupy 5 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_5^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	8.36 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_5^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>6</sub>	Pole przekroju elem. grupy 6 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_6^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	7.87 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_6^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>7</sub>	Pole przekroju elem. grupy 7 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_7^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	7.92 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_7^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>8</sub>	Pole przekroju elem. grupy 8 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_8^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	7.94 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_8^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>9</sub>	Pole przekroju elem. grupy 9 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_9^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	7.97 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_9^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>10</sub>	Pole przekroju elem. grupy 10 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_{10}^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{10}^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>11</sub>	Pole przekroju elem. grupy 11 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_{11}^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{11}^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>12</sub>	Pole przekroju elem. grupy 12 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_{12}^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{12}^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>13</sub>	Pole przekroju elem. grupy 13 <i>stały wsp. zmienności: 5%</i>	log-normalny	$x_{13}^\mu$	20.0 cm <sup>2</sup>	5.00 cm <sup>2</sup>
			$\tilde{x}_{13}^\sigma$	1.0 cm <sup>2</sup>	
X <sub>14</sub>	Odległość od osi pionowej węzłów: 2,3,16,17	normalny	$x_{14}^\mu$	40.0 cm	15.57 cm
			$\tilde{x}_{14}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>15</sub>	Odległość od osi pionowej węzłów: 4,5,14,15	normalny	$x_{15}^\mu$	40.0 cm	18.63 cm
			$\tilde{x}_{15}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>16</sub>	Odległość od osi pionowej węzłów: 6,7,12,13	normalny	$x_{16}^\mu$	40.0 cm	21.00 cm
			$\tilde{x}_{16}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>17</sub>	Odległość od osi pionowej węzłów: 8,9,10,11	normalny	$x_{17}^\mu$	40.0 cm	22.02 cm
			$\tilde{x}_{17}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>18</sub>	Odległość od osi poziomej węzłów: 2,3,16,17	normalny	$x_{18}^\mu$	700.0 cm	550.47 cm
			$\tilde{x}_{18}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>19</sub>	Odległość od osi poziomej węzłów: 4,5,14,15	normalny	$x_{19}^\mu$	500.0 cm	394.67 cm
			$\tilde{x}_{19}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>20</sub>	Odległość od osi poziomej węzłów: 6,7,12,13	normalny	$x_{20}^\mu$	300.0 cm	237.33 cm
			$\tilde{x}_{20}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>21</sub>	Odległość od osi poziomej węzłów: 8,9,10,11	normalny	$x_{21}^\mu$	100.0 cm	79.16 cm
			$\tilde{x}_{21}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>22</sub>	Współrzędna y węzła 18	normalny	$\tilde{x}_{22}^\mu$	1500.0 cm	
			$\tilde{x}_{22}^\sigma$	2.0 cm	
X <sub>23</sub>	Moduł sprężystości materiału	log-normalny	$\tilde{x}_{23}^\mu$	21000.0 kN/cm <sup>2</sup>	
			$\tilde{x}_{23}^\sigma$	1050.0 kN/cm <sup>2</sup>	
X <sub>24</sub>	Mnożnik obciążenia $\lambda$	Gumbela	$\tilde{x}_{24}^\mu$	1.0	
			$\tilde{x}_{24}^\sigma$	0.2	
X <sub>25</sub>	Granica plastyczności materiału	log-normalny	$\tilde{x}_{25}^\mu$	30.0 kN/cm <sup>2</sup>	
			$\tilde{x}_{25}^\sigma$	3.0 kN/cm <sup>2</sup>	

TABLICA 5.3. Parametry zadania optymalizacji niezawodnościowej słupa kratowego





Rys. 5.14. Słup kratowy: położenie poziomego stężenia 8-9

---

## Wnioski i spostrzeżenia

---

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy była optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji prętowych, ze szczególnym uwzględnieniem konstrukcji podlegających dużym przemieszczeniom i podatnych na utratę stateczności. Opracowano teoretyczne podstawy optymalizacji takich konstrukcji. Utworzony został także komputerowy system OPTIREL. Jako funkcję celu przyjęto koszt początkowy konstrukcji związany z objętością oraz jakością użytego materiału. Rozpatrywano następujące zmienne losowe: pola przekrojów prętów, współrzędne węzłów, mnożniki schematów obciążenia, moduły Younga i granice plastyczności materiałów. W analizowanych przykładach numerycznych, parametrami projektowymi były wartości średnie pól przekrojów i współrzędnych węzłów oraz odchylenia standardowe granic plastyczności. Rozpatrywano trzy typy warunków granicznych: warunek graniczny typu przemieszczeniowego, warunek naprężeniowy/stateczności lokalnej i warunek graniczny stateczności globalnej. Zaproponowano i przetestowano szereg metod zwiększających efektywność procesu optymalizacji niezawodnościowej, ze szczególnym uwzględnieniem metod optymalizacji interaktywnej. Zaprojektowanie OPTIREL'a jako systemu optymalizacji interaktywnej oraz zastosowanie efektywnych metod analizy niezawodności, optymalizacji i analizy wrażliwości pozwoliło na bardzo znaczne usprawnienie czasochłonnego procesu optymalizacji niezawodnościowej.

Na podstawie rozważań zawartych w pracy oraz doświadczeń numerycznych nasuwają się następujące wnioski:

1. Obecny stan zaawansowania teorii niezawodności i optymalizacji niezawodnościowej oraz dostępnych metod obliczeniowych pozwala na wykorzystanie w procesie

- projektowania znacznie bardziej racjonalnych niż dotychczas metod oceny bezpieczeństwa konstrukcji.
2. Efektywny komputerowy system optymalizacji niezawodnościowej łączyć musi szeregi wyspecjalizowanych modułów do analizy niezawodności, optymalizacji, analizy konstrukcji metodą elementów skończonych i analizy wrażliwości.
  3. Największy wpływ na zmniejszenie czasochłonności procesu optymalizacji niezawodnościowej ma implementacja efektywnych, analitycznych metod analizy wrażliwości. Liczenie wrażliwości metodą różnic skończonych bardzo znacznie ogranicza praktyczną przydatność systemu.
  4. Do analizy wrażliwości konstrukcji geometrycznie nieliniowych rozpatrywanych w pracy najkorzystniejsze było zastosowanie analitycznej metody układu sprzężonego.
  5. Metodą, która najlepiej nadaje się do wykorzystania w ramach optymalizacji niezawodnościowej jest metoda FORM. Cechują ją: stosunkowo niski koszt obliczeniowy, zadowalająca w większości przypadków dokładność, a także łatwość otrzymania wrażliwości wskaźnika niezawodności względem parametrów projektowych.
  6. Niesłuchanie istotne jest przyjęcie optymalnego modelu stochastycznego oraz optymalizacyjnego. Redukcja liczby zmiennych losowych może znacznie polepszyć zbieżność procesu oraz skrócić czas obliczeń. Ważną informację na temat wpływu losowości danej zmiennej stanowi wektor normalny do powierzchni granicznej w punkcie projektowym,  $\alpha$ , a także znajomość elastyczności wskaźników niezawodności ze względu na odchylenia standardowe zmiennych. Porównanie tych wielkości dla wszystkich zmiennych losowych pozwala podjąć decyzję o zmianie statusu zmiennej z losowej na deterministyczną.
  7. Z punktu widzenia efektywności procesu optymalizacji, bardzo ważne jest aby na podstawie wstępnych analiz wybrać minimalną liczbę warunków granicznych, wystarczającą do zapewnienia odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa całej konstrukcji.
  8. Odpowiednie sterowanie algorytmem lokalizacji punktu projektowego może w znaczący sposób usprawnić działanie procesu optymalizacji niezawodnościowej. Jak to pokazano na przykładzie optymalizacji konstrukcji platformy wiertniczej (zob. punkt 4.4), zastosowanie zaproponowanych w pracy metod SPZ, PPP, MMV pozwoliło na redukcję czasu obliczeń o blisko 50% w stosunku do standardowej optymalizacji automatycznej.
  9. Strategia aktywnych ograniczeń, dostępna w ramach algorytmu rekurencyjnego programowania kwadratowego, nie stanowi żadnego usprawnienia procesu optymalizacji niezawodnościowej, w którym wskaźniki niezawodności liczone są metodą FORM, i gdzie oszczędności związane z nieliczeniem gradientów niektórych ograniczeń niezawodnościowych są niezauważalne. Poprawę efektywności niesie dopiero zaproponowana, interaktywna metoda AON, umożliwiająca pominięcie czasochłonnego zadania lokalizacji punktu projektowego.
  10. Włączenie do zbioru parametrów projektowych odchylenia standardowych granic plastyczności materiałów pozwala na skonstruowanie rozszerzonej funkcji kosztu początkowego, umożliwiającej uwzględnienie kosztów związanych z jakością materiału.
  11. Pokazano (zob. przykład 5.1), że nieuwzględnienie w analizie niezawodności nie-

uchronnych imperfekcji położenia węzłów może prowadzić w przypadku konstrukcji podatnych na utratę stateczności globalnej do znaczących błędów w określeniu wielkości prawdopodobieństwa awarii.

12. Bardzo ważna dla zapewnienia zbieżności procesu optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji nieliniowych jest możliwość interaktywnej kontroli parametrów procesu obliczeniowego, zarówno na poziomie zadania optymalizacji, jak i na poziomie programu metody elementów skończonych.
13. W przypadku optymalizacji konstrukcji narażonych na utratę stateczności globalnej, które pracować mają w zakresie przedkrytycznym, wydaje się uzasadnionym, by dla realizacji mnożnika obciążenia  $\lambda > \lambda_{cr}$  przemieszczenia węzłów konstrukcji liczyć przyjmując uproszczoną postać pokrytycznej ścieżki równowagi.



## Wybrane algorytmy optymalizacyjne optymalizacji niezawodnościowej

---

### A.1. Metoda rekurencyjnego programowania kwadratowego

Algorytmy rekurencyjnego programowania kwadratowego (angielski skrót: SQP - Sequential Quadratic Programming) przeznaczone są do rozwiązywania nieliniowych problemów optymalizacji z ograniczeniami, spełniających poniższe założenia [107, 108]:

- rozpatrywany problem jest gładki; funkcja celu oraz ograniczenia są różniczkowalne na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych,
- rozmiar zadania nie jest duży; przyjmuje się, że liczba zmiennych projektowych powinna być mniejsza od 50,
- wartości funkcji oraz gradienty mogą być obliczone z dużą dokładnością.

W pracy zastosowany został algorytm SQP w wersji Schittkowskiego [106]. Bazuje on na procedurze Wilsona-Hana-Powella [125] i polega na kolejnym generowaniu i rozwiązywaniu podproblemów programowania kwadratowego. Kluczem do superliniowej zbieżności algorytmu jest wykorzystywana quasi-newtonowska metoda przybliżania macierzy hesjanu funkcji Lagrange'a oraz specjalna, rozszerzona funkcja Lagrange'a minimalizowana w procedurze obliczania długości kroku.

W dalszych podpunktach rozdziału przedstawione zostanie wyprowadzenie podproblemu programowania kwadratowego, którego rozwiązanie określa kierunek poszukiwań, podane zostaną wzory metody BFGS służącej do aproksymacji hesjanu oraz omówiony zostanie,

opracowany przez Schittkowskiego, pakiet rekurencyjnego programowania kwadratowego – NLPQL [107].

### A.1.1. Wyprowadzenie podproblemu programowania kwadratowego

Zarówno deterministyczny jak i niezawodnościowy problem optymalizacji zapisać można w następującej, ogólnej postaci:

$$\begin{aligned} & \text{znaleźć} && \min C(\mathbf{x}) , && (A.1) \\ & \text{przy ograniczeniach:} && && \end{aligned}$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m_e , \quad (A.2)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m , \quad (A.3)$$

gdzie  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  jest wektorem zmiennych projektowych,  $C$  jest funkcją celu,  $h_i$  są ograniczeniami równościowymi, a  $g_i$  ograniczeniami nierównościowymi.

Warunkiem koniecznym na istnienie w punkcie  $\mathbf{x}^*$  minimum lokalnego powyższego zadania optymalizacji jest spełnienie w tym punkcie kryteriów Kuhna-Tuckera [2, 51]. Wynikają one z warunku stacjonarności funkcji Lagrange'a zdefiniowanej jako

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = C(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m_e} \mu_i h_i(\mathbf{x}) - \sum_{i=m_e+1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) , \quad (A.4)$$

gdzie przez  $\mu_i$  i  $\lambda_i$  oznaczono mnożniki Lagrange'a odpowiednio dla ograniczeń równościowych i nierównościowych. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania optymalizacji (A.1)–(A.3) mają następującą postać:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m_e} \mu_i \frac{\partial h_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=m_e+1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n , \quad (A.5)$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m , \quad (A.6)$$

$$h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m_e , \quad (A.7)$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m . \quad (A.8)$$

Dla przejrzystości wyprowadzenia podproblemu programowania kwadratowego rozpatrzmy zadanie optymalizacji z ograniczeniami jedynie typu równościowego

$$\begin{aligned} & \text{znaleźć} && \min C(\mathbf{x}) , && (A.9) \\ & \text{przy ograniczeniach:} && h_i(\mathbf{x}) = 0 && i = 1, \dots, m . \end{aligned}$$

Ograniczenia nierównościowe mogą być łatwo uwzględnione poprzez wprowadzenie zmiennych dopełniających i zamianę ograniczeń (A.3) na ograniczenia równościowe. Funkcja Lagrange'a dla zadania (A.9) ma postać

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = C(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \mu_i h_i(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) . \quad (A.10)$$



Warunki Kuhna-Tuckera dla tego zadania można zapisać następująco:

$$\nabla L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}, \quad \nabla C(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.11})$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.12})$$

Równania (A.11) i (A.12) tworzą układ  $n+m$  równań nieliniowych z  $n+m$  niewiadomymi ( $n$  zmiennych projektowych w wektorze  $\mathbf{x}$  i  $m$  mnożników Lagrange'a w wektorze  $\boldsymbol{\mu}$ ). Układ ten może być rozwiązany numerycznie przy użyciu metody iteracyjnej Newtona-Raphsona. Zapisując równania (A.11) i (A.12) w zwartej formie dostajemy

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.13})$$

gdzie  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{y}$  mają postać

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \nabla L \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}_{(n+m) \times 1}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}_{(n+m) \times 1}. \quad (\text{A.14})$$

W metodzie Newtona-Raphsona zakładamy, że wartość wektora zmiennych  $\mathbf{y}^{(k)}$  na  $k$ -tym kroku iteracyjnym jest znana i poszukujemy zmiany  $\Delta \mathbf{y}^{(k)}$  tego wektora. Po rozwinięciu równania (A.13) w szereg Taylora i zachowaniu jedynie dwóch pierwszych wyrazów,  $\Delta \mathbf{y}^{(k)}$  otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań liniowych

$$\nabla \mathbf{F}^T(\mathbf{y}^{(k)}) \Delta \mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(k)}), \quad (\text{A.15})$$

gdzie  $\nabla \mathbf{F}$  jest macierzą o wymiarach  $(n+m) \times (n+m)$ , której  $i$ -ta kolumna jest gradientem funkcji  $F_i(\mathbf{y})$  względem wektora  $\mathbf{y}$ . Wykorzystując w równaniu (A.15) definicje  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{y}$  z (A.14) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L & -\mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}^{(k)} = - \begin{bmatrix} \nabla L \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}^{(k)}, \quad (\text{A.16})$$

gdzie  $\nabla^2 L$  jest macierzą  $n \times n$  hesjanu funkcji Lagrange'a,  $\mathbf{N}$  macierzą o wymiarach  $n \times m$ , której  $i$ -ta kolumna jest gradientem funkcji ograniczenia  $h_i$ ,  $\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$  oraz  $\Delta \boldsymbol{\mu}^{(k)} = \boldsymbol{\mu}^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)}$ . Równanie (A.16) można przedstawić w nieco innej postaci rozpisując pierwszy wiersz jako

$$\nabla^2 L \Delta \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{N} \Delta \boldsymbol{\mu}^{(k)} = -\nabla L^{(k)}. \quad (\text{A.17})$$

Podstawiając następnie  $\Delta \boldsymbol{\mu}^{(k)} = \boldsymbol{\mu}^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)}$  i wykorzystując (A.11) w miejsce  $\nabla L$  dostajemy

$$\nabla^2 L \Delta \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)}) = -\nabla C(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{N} \boldsymbol{\mu}^{(k)}. \quad (\text{A.18})$$

Po uwzględnieniu powyższych przekształceń, układ równań (A.16) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L & -\mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{(k)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla C \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}^{(k)}, \quad (\text{A.19})$$

Rozwiązaniem układu (A.19) jest przyrost wektora zmiennych projektowych  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  oraz nowa wartość wektora mnożników Lagrange'a  $\boldsymbol{\mu}^{(k+1)}$ . Algorytm iteracyjny kontynuowany jest aż do spełnienia nałożonych kryteriów zbieżności.

Można pokazać, że rozwiązanie układu równań (A.19) jest równoważne rozwiązaniu następującego, danego na  $k$ -tym kroku iteracyjnym, zadania programowania kwadratowego:

$$\text{znaleźć} \quad \min \nabla C^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 L \Delta \mathbf{x}, \quad (\text{A.20})$$

przy zlinearyzowanych ograniczeniach równościowych:

$$h_i + \nabla h_i^T \Delta \mathbf{x} = 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.21})$$

Funkcja Lagrange'a dla powyższego problemu optymalizacji przyjmuje postać

$$\bar{L} = \nabla C^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 L \Delta \mathbf{x} - \sum_{i=1}^m \mu_i (h_i + \nabla h_i^T \Delta \mathbf{x}), \quad (\text{A.22})$$

natomiast warunki Kuhna-Tuckera można zapisać (traktując  $\Delta \mathbf{x}$  jako zmienne decyzyjne)

$$\nabla \bar{L} = \mathbf{0}, \quad \nabla C + \nabla^2 L \Delta \mathbf{x} - \mathbf{N} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{h} + \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.24})$$

Widać teraz, że jeśli równania (A.23) i (A.24) zapiszemy w postaci macierzowej, to otrzymamy równanie (A.19). Zatem zadanie minimalizacji funkcji  $C(\mathbf{x})$  z ograniczeniami  $h_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  można rozwiązać iteracyjnie poprzez kolejne rozwiązywanie podproblemów programowania kwadratowego (A.20) i (A.21).

Rozwiązanie  $\Delta \mathbf{x}$  wyznacza kierunek poszukiwań, natomiast w celu uzyskania zbieżnego algorytmu konieczne jest obliczenie długości kroku poprzez jednokierunkową minimalizację odpowiednio zmodyfikowanej funkcji celu (uzupełnionej o funkcję kary). Uwzględniając ponownie ograniczenia nierównościowe podproblem programowania kwadratowego ma następującą postać:

$$\text{znaleźć} \quad \min \nabla C^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}, \quad (\text{A.25})$$

przy ograniczeniach:

$$h_i + \nabla h_i^T \Delta \mathbf{x} = 0 \quad i = 1, \dots, m_e, \quad (\text{A.26})$$

$$g_i + \nabla g_i^T \Delta \mathbf{x} \geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m. \quad (\text{A.27})$$

gdzie  $\mathbf{H}$  jest macierzą hesjanu  $\nabla^2 L$  lub jej przybliżeniem. Ważną cechą zadania programowania kwadratowego jest to, iż posiada ono ściśle rozwiązanie (zob. [2, 48])

### A.1.2. BFGS – quasi-newtonowska metoda aproksymacji hesjanu

W większości inżynierskich problemów optymalizacji obliczenie drugich pochodnych funkcji celu oraz ograniczeń względem zmiennych projektowych jest bardzo trudne, a nieraz wręcz niemożliwe. Dlatego też często stosuje się metody wykorzystujące jedynie znajomość gradientów do aproksymacji macierzy hesjanu funkcji Lagrange'a. Jedną z najbardziej popularnych oraz efektywnych metod bezpośredniego przybliżania hesjanu jest metoda BFGS (od nazwisk Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [48]. Można pokazać, że w przypadku funkcji kwadratowej metoda ta daje dokładną wartość hesjanu po  $n$  krokach iteracyjnych, gdzie  $n$  jest liczbą zmiennych projektowych. Dobre przybliżenie hesjanu dowolnej funkcji nieliniowej uzyskuje się także po około  $n$  krokach. Poniżej podane zostaną za [2] wzory metody BFGS z poprawką Powella [93] zapewniającą dodatnią określoność macierzy hesjanu. Zakładając znajomość przybliżenia hesjanu  $\mathbf{H}^{(k)}$  na  $k$ -tym kroku iteracyjnym, chcemy obliczyć  $\mathbf{H}^{(k+1)}$  na kroku  $k + 1$ .

Przed podaniem ostatecznej postaci formuły iteracyjnej konieczne jest zdefiniowanie następujących wyrażeń:

$$\mathbf{s}^{(k)} = \alpha_k \Delta \mathbf{x}^{(k)}; \quad (\alpha_k - \text{długość kroku}), \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)}, \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{p}^{(k)} = \nabla L(\mathbf{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}) - \nabla L(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}), \quad (\text{A.30})$$

$$\xi_1 = \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{p}^{(k)}, \quad (\text{A.31})$$

$$\xi_2 = \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{z}^{(k)}, \quad (\text{A.32})$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{dla } \xi_1 \geq 0.2 \\ \frac{0.8 \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} & \text{dla } \xi_1 < 0.2 \end{cases}, \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{w}^{(k)} = \theta \mathbf{p}^{(k)} + (1 - \theta) \mathbf{z}^{(k)}, \quad (\text{A.34})$$

$$\xi_3 = \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{w}^{(k)}, \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{D}^{(k)} = \frac{1}{\xi_3} \mathbf{w}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)\top}; \quad \text{macierz } n \times n, \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{E}^{(k)} = \frac{1}{\xi_2} \mathbf{z}^{(k)} \mathbf{z}^{(k)\top}; \quad \text{macierz } n \times n. \quad (\text{A.37})$$

Przy tak zdefiniowanych macierzach  $\mathbf{D}^{(k)}$  i  $\mathbf{E}^{(k)}$ , wzór korekcyjny metody BFGS przyjmuje postać

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{D}^{(k)} - \mathbf{E}^{(k)}. \quad (\text{A.38})$$

Jako początkowe przybliżenie hesjanu  $\mathbf{H}^{(0)}$  należy przyjąć pewną symetryczną, dodatnio określoną macierz  $n \times n$ . W przypadku braku dodatkowych informacji pierwszym przybliżeniem może być macierz jednostkowa  $\mathbf{I}$ .

### A.1.3. NLPQL

NLPQL [107] jest pakietem procedur numerycznych przeznaczonym do rozwiązywania zadań programowania nieliniowego z ograniczeniami. Zastosowany w nim algorytm opiera się na metodzie rekurencyjnego programowania kwadratowego. Poniżej podane zostaną najistotniejsze elementy tego algorytmu.

Zapisując jeszcze raz ogólne sformułowanie zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami (por. (A.1)–(A.3)), rezygnując z odmiennych oznaczeń na ograniczenia równościowe i nierównościowe oraz specyfikując w sposób jawny dopuszczalne zakresy zmienności zmiennych projektowych (wcześniej zawarte w ograniczeniach nierównościowych) dostajemy:

$$\text{znaleźć} \quad \min C(\mathbf{x}), \quad (\text{A.39})$$

przy ograniczeniach:

$$c_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m_e, \quad (\text{A.40})$$

$$c_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m, \quad (\text{A.41})$$

$${}^l x_j \leq x_j \leq {}^u x_j \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.42})$$

gdzie  $C(\mathbf{x})$  jest funkcją celu,  $c_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , są funkcjami ograniczeń, a  ${}^l x_j$  i  ${}^u x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , odpowiednio, dolnymi i górnymi ograniczeniami zmienności zmiennych projektowych.

Istotą algorytmu rekurencyjnego programowania kwadratowego jest generowanie oraz rozwiązywanie podproblemów programowania kwadratowego. Przyjmijmy, że  $\mathbf{x}^{(k)}$  jest wektorem zmiennych projektowych na początku  $k$ -tego kroku iteracyjnego,  $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$  aktualnym przybliżeniem wektora mnożników Lagrange'a w punkcie optymalnym, a  $\mathbf{H}^{(k)}$  dodatnio określonym przybliżeniem hesjanu funkcji Lagrange'a (por. punkt A.1.2), danej w postaci

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = C(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m+2n} \lambda_i c_i(\mathbf{x}). \quad (\text{A.43})$$

Funkcje  $c_i$ ,  $i = m + 1, \dots, m + 2n$ , odpowiadające ograniczeniom (A.42) dane są jako

$$c_i(\mathbf{x}) = x_{i-m} - {}^l x_{i-m} \geq 0 \quad i = m + 1, \dots, m + n, \quad (\text{A.44})$$

$$c_i(\mathbf{x}) = {}^u x_{i-m-n} - x_{i-m-n} \geq 0 \quad i = m + n + 1, \dots, m + 2n. \quad (\text{A.45})$$

Zgodnie z wyprowadzeniem przedstawionym w punkcie A.1.1, podproblem programowania kwadratowego na  $k$ -tym kroku optymalizacyjnym ma postać

$$\text{znaleźć} \quad \min \nabla C^T(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^{(k)T} \mathbf{H}^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)}, \quad (\text{A.46})$$

przy ograniczeniach:

$$c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla c_i^T(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = 0 \quad i = 1, \dots, m_e, \quad (\text{A.47})$$

$$c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla c_i^T(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} \geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m, \quad (\text{A.48})$$

$${}^l x_j - x_j^{(k)} \leq \Delta x_j^{(k)} \leq {}^u x_j - x_j^{(k)} \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.49})$$

Rozwiązując podproblem (A.46)–(A.49) otrzymujemy wektor  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  wyznaczający kierunek poszukiwań oraz odpowiadający mu wektor mnożników Lagrange’a  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ . Wartości wektora zmiennych projektowych na kolejnej iteracji jak również wektora mnożników Lagrange’a w punkcie optymalnym obliczane są ze wzorów

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)}, \quad (\text{A.50})$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \alpha^{(k)} (\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^{(k)}). \quad (\text{A.51})$$

gdzie  $\alpha^{(k)}$  jest długością kroku otrzymywaną z minimalizacji kierunkowej odpowiednio skonstruowanej, rozszerzonej funkcji celu. Funkcję tę można zapisać symbolicznie jako

$$\Psi_r^{(k)}(\alpha) = \Psi_r^{(k)} \left( \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}^{(k)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \end{array} \right\} + \alpha \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{x}^{(k)} \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \end{array} \right\} \right). \quad (\text{A.52})$$

W pakiecie NLPQL użytkownik ma do wyboru dwie funkcje  $\Psi_r^{(k)}$ . Pierwsza z nich, zaproponowana przez Hana i Powella ma postać

$$\Psi_r^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = C(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m_e} r_i^{(k)} |c_i(\mathbf{x})| + \sum_{i=m_e+1}^{m+2n} r_i^{(k)} |\min(0, c_i(\mathbf{x}))|, \quad (\text{A.53})$$

gdzie  $r_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m + 2n$  są parametrami kary, kontrolującymi przekroczenie ograniczeń (A.40)–(A.42). Parametry te wyliczane są w następujący, iteracyjny sposób:

Zerowa iteracja ( $k = 0$ )

$$\begin{aligned} r_i^{(0)} &= |\lambda_i^{(0)}| & i = 1, \dots, m_e, \\ r_i^{(0)} &= \lambda_i^{(0)} & i = m_e + 1, \dots, m + 2n, \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Kolejne iteracje ( $k = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} r_i^{(k)} &= \max \left\{ |\lambda_i^{(k)}|, \frac{1}{2} (r_i^{(k-1)} + |\lambda_i^{(k)}|) \right\} & i = 1, \dots, m_e, \\ r_i^{(k)} &= \max \left\{ \lambda_i^{(k)}, \frac{1}{2} (r_i^{(k-1)} + \lambda_i^{(k)}) \right\} & i = m_e + 1, \dots, m + 2n. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Drugą funkcją używaną w procedurze obliczania długości kroku jest zaproponowana przez Schittkowskiego rozszerzona funkcja Lagrange’a postaci

$$\begin{aligned} \Psi_r^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= C(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m_e} \left( \lambda_i c_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} r_i^{(k)} c_i(\mathbf{x})^2 \right) \\ &- \sum_{i=m_e+1}^{m+2n} \begin{cases} \left( \lambda_i c_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} r_i^{(k)} c_i(\mathbf{x})^2 \right), & \text{jeśli } c_i(\mathbf{x}) \leq \frac{\lambda_i}{r_i^{(k)}} \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda_i^2}{r_i^{(k)}}, & \text{jeśli } c_i(\mathbf{x}) > \frac{\lambda_i}{r_i^{(k)}} \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

gdzie parametry kary  $r_i^{(k)}$  wyliczane są ze wzorów (A.54) i (A.55). W odróżnieniu od rozszerzonej funkcji celu danej równaniem (A.53), powyższa funkcja jest różniczkowalna. Schittkowski [106] udowodnił ponadto, iż zapewnia ona zbieżność algorytmu SQP.

Stosowana w NLPQL procedura obliczania długości kroku bazuje na metodzie Armijo [125]. Istotą tej metody jest zastosowanie aproksymacji kwadratowej funkcji  $\Psi_r^{(k)}(\alpha)$  w oparciu o wartość gradientu  $\nabla\Psi_r^{(k)}(0)$  oraz o wartości funkcji  $\Psi_r^{(k)}(0)$  i  $\Psi_r^{(k)}(\alpha_i)$ , gdzie  $\alpha_i$  jest kolejną iteracją mnożnika długości kroku. Przyjmując początkową wartość  $\alpha_0 = 1$  i zmniejszając ją w kolejnych iteracjach zgodnie z regułą  $\alpha_i = \theta \alpha_{i-1}$ , gdzie  $0 < \theta < 1$ , proces iteracyjny kontynuowany jest aż do spełnienia warunku

$$\Psi_r^{(k)}(\alpha_i) \leq \Psi_r^{(k)}(0) + \nu\alpha_i \nabla\Psi_r^{(k)\top}(0) \Delta\mathbf{x}^{(k)}, \quad (\text{A.57})$$

gdzie  $0 < \nu < 0.5$ . Łatwo zauważyć, że przyjęcie wartości  $\theta$  bliskiej jedności prowadzi do zwiększenia dokładności zastosowanej metody.

Może się zdarzyć, że chociaż zbiór rozwiązań dopuszczalnych oryginalnego zadania optymalizacji (A.39)–(A.42) jest niepusty, to podproblem (A.46)–(A.49) nie ma rozwiązań dopuszczalnych. Inną słabą stroną przedstawionego sformułowania jest konieczność obliczania gradientów wszystkich ograniczeń, mimo że nie wszystkie są aktywne w punkcie optymalnym. W celu uniknięcia tych niedogodności NLPQL generuje zmodyfikowany podproblem programowania kwadratowego, w którym wprowadzono dodatkową, pomocniczą zmienną projektową  $\delta$  oraz uwzględniono strategię tzw. aktywnych ograniczeń (zob. [2]). Podproblem ten ma postać

$$\text{znaleźć} \quad \min \nabla C^\top(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^{(k)\top}\mathbf{H}^{(k)}\Delta\mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{2}\varrho^{(k)}\delta^2, \quad (\text{A.58})$$

przy ograniczeniach:

$$(1 - \delta)c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla c_i^\top(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = 0 \quad i = 1, \dots, m_e, \quad (\text{A.59})$$

$$(1 - \delta)c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla c_i^\top(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} \geq 0 \quad i \in I^{(k)}, \quad (\text{A.60})$$

$$c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla c_i^\top(\mathbf{x}^{(j < k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} \geq 0 \quad i \in K^{(k)}, \quad (\text{A.61})$$

$${}^l x_j - x_j^{(k)} \leq \Delta x_j^{(k)} \leq {}^u x_j - x_j^{(k)} \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{A.62})$$

$$0 \leq \delta \leq 1. \quad (\text{A.63})$$

gdzie  $I^{(k)}$  jest zbiorem aktywnych ograniczeń nierównościowych, a  $K^{(k)}$  zbiorem ograniczeń nieaktywnych, zdefiniowanymi następująco:

$$\begin{aligned} I^{(k)} &= \{i : m_e + 1, \dots, m, c_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \epsilon \text{ lub } \lambda_i^{(k)} > 0\}, \\ K^{(k)} &= \{i : m_e + 1, \dots, m\} - I^{(k)}. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

W powyższych definicjach  $\lambda_i^{(k)}$  jest mnożnikiem Lagrange'a odpowiadającym  $i$ -temu ograniczeniu, a  $\epsilon$  podaną przez użytkownika tolerancją. Występujący we wzorze (A.58) parametr  $\varrho$  jest parametrem kary redukującym wpływ zmiennej dodatkowej  $\delta$  na rozwiązanie, natomiast wyrażenie  $\nabla c_i^\top(\mathbf{x}^{(j < k)})$  oznacza gradient  $i$ -tego ograniczenia policzony dla  $j$ -tej iteracji wektora  $\mathbf{x}$ , na której ograniczenie to było ostatni raz aktywne. Łatwo sprawdzić, że wektor  $\Delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$  oraz  $\delta = 1$  spełniają ograniczenia (A.59)–(A.63) i mogą być przyjęte jako punkt startowy do rozwiązania zmodyfikowanego podproblemu.

Używanym w NLPQL kryterium zbieżności jest jednoczesne spełnienie trzech warunków postaci

$$|\nabla C^T(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)}| + \sum_{i=1}^{m+2n} |\lambda_i^{(k)} c_i(\mathbf{x}^{(k)})| \leq \sqrt{\epsilon}, \quad (\text{A.65})$$

$$\sum_{i=1}^{m_e} |c_i(\mathbf{x}^{(k)})| + \sum_{i \in I^{(k)}} |c_i(\mathbf{x}^{(k)})| \leq \sqrt{\sqrt{\epsilon}}, \quad (\text{A.66})$$

$$\max_{j=1,n} \left| \frac{\partial L(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} \right| \leq \sqrt{\sqrt{\epsilon}} \quad \text{lub} \quad \Delta\mathbf{x}^{(k)\top} \mathbf{H}^{(k)} \Delta\mathbf{x}^{(k)} \leq \sqrt{\epsilon}. \quad (\text{A.67})$$

Warto również wspomnieć o zaimplementowanym w NLPQL systemie automatycznych restartów. W przypadku gdy przekroczona zostanie maksymalna, podana przez użytkownika, liczba iteracji algorytmu lub maksymalna liczba iteracji procedury wyznaczania długości kroku, bądź inny błąd, który spowoduje zatrzymanie obliczeń, NLPQL restartuje analizę. Iteracje zaczynają się od początku, przyjmując jako punkt startowy ostatni przed zatrzymaniem wektor zmiennych projektowych. Niedoskonałością tej metody jest ponowne przyjęcie macierzy jednostkowej jako przybliżenia hesjanu funkcji Lagrange'a oraz zerowego wektora mnożników. Taka postać macierzy hesjanu może znacznie odbiegać od rzeczywistej i konieczne mogą być dodatkowe iteracje w celu zbudowania dobrego przybliżenia tej macierzy (por. punkt A.1.2).

## A.2. Metody poszukiwania punktu projektowego

Kluczowym elementem analizy niezawodności przy użyciu metod FORM, SORM oraz niektórych metod symulacyjnych jest znalezienie tzw. punktu projektowego  $\mathbf{u}^*$  (ang. design point). Jest to punkt na powierzchni granicznej  $G(\mathbf{u}) = 0$  w układzie niezależnych standaryzowanych zmiennych gaussowskich leżący najbliżej początku układu. Zlokalizowanie  $\mathbf{u}^*$  jest zadaniem programowania nieliniowego i może być zapisane jako

$$\text{znaleźć} \quad \|\mathbf{u}^*\| = \min \|\mathbf{u}\|, \quad (\text{A.68})$$

$$\text{przy ograniczeniu} \quad G(\mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.69})$$

gdzie  $\|\mathbf{u}\|$  jest normą euklidesową  $n$  wymiarowego wektora  $\mathbf{u}$ . O funkcji  $G(\mathbf{u})$  zakłada się, iż jest różniczkowalna.

Chociaż do rozwiązania problemu poszukiwania punktu projektowego można by użyć wielu znanych metod programowania nieliniowego, to ze względu na postać funkcji celu oraz zwykle wysoki koszt obliczeniowy uzyskania wartości funkcji  $G(\mathbf{u})$  tylko kilka algorytmów znajduje praktyczne zastosowanie. Przegląd oraz omówienie ważniejszych algorytmów można znaleźć w pracach [1, 74, 129]. Jak dotąd, najbardziej popularnymi oraz najczęściej używanymi, ze względu na swą efektywność oraz prostotę, są algorytmy oparte na klasycznym w analizie niezawodności algorytmie Rackwitza-Fiesslera, oznaczanym

dalej jako RF. Poniżej przedstawiona zostanie zmodyfikowana przez Abdo wersja tego algorytmu, oznaczana skrótem ARF oraz porównanie efektywności ARF w stosunku do algorytmu rekurencyjnego programowania kwadratowego. Wspomniane zostaną również inne pomysły na usprawnienie metody RF.

### A.2.1. Algorytm Abdo-Rackwitsza-Fiesslera (ARF)

Zapiszmy zadanie lokalizacji punktu projektowego (A.68), (A.69) w trochę zmienionej lecz równoważnej postaci

$$\text{znaleźć} \quad \min Q(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} , \quad (\text{A.70})$$

$$\text{przy ograniczeniu} \quad G(\mathbf{u}) = 0 . \quad (\text{A.71})$$

Rozwijając kwadratową funkcję celu  $Q(\mathbf{u})$  wokół punktu  $\mathbf{u}^{(k)}$  ( $k$ -ta iteracja wektora  $\mathbf{u}$ ) w szereg Taylor'a oraz linearyzując funkcję  $G(\mathbf{u})$  dostajemy zadanie znalezienia optymalnego przyrostu  $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ , dane następująco:

$$\begin{aligned} & \text{znaleźć} \\ \min \tilde{Q}(\Delta \mathbf{u}^{(k)}) &= Q(\mathbf{u}^{(k)}) + \nabla Q^T(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^{(k)T} \nabla^2 Q(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} \\ &= \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{u}^{(k)} + 2\mathbf{u}^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(k)} \end{aligned} , \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{aligned} & \text{przy ograniczeniu} \\ \bar{G}(\Delta \mathbf{u}^{(k)}) &= G(\mathbf{u}^{(k)}) + \nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Funkcja Lagrange'a dla zadania (A.72), (A.73) ma postać

$$\begin{aligned} L(\Delta \mathbf{u}^{(k)}, \lambda) &= \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{u}^{(k)} + 2\mathbf{u}^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(k)} \\ &\quad - \lambda (G(\mathbf{u}^{(k)}) + \nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)}) \end{aligned} , \quad (\text{A.74})$$

natomiast warunki Kuhna-Tuckera dane są równaniami

$$\nabla L = 2\mathbf{u}^{(k)} + 2\Delta \mathbf{u}^{(k)} - \lambda \nabla G(\mathbf{u}^{(k)}) = 2\mathbf{u}^{(k+1)} - \lambda \nabla G(\mathbf{u}^{(k)}) = 0 , \quad (\text{A.75})$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}^{(k)}) + \nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} &= \\ G(\mathbf{u}^{(k)}) + \nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{u}^{(k+1)} - \nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{u}^{(k)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Korzystając ze znanej własności mnożnika Lagrange'a w punkcie optymalnym

$$\nabla \tilde{Q} = \lambda \nabla \bar{G} , \quad (\text{A.77})$$

mnożnik  $\lambda$  można wyrazić jako

$$\lambda = \frac{2\nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{u}^{(k+1)}}{\nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)}) \nabla G(\mathbf{u}^{(k)})} . \quad (\text{A.78})$$



Zastępując następnie w powyższym wzorze wyrażenie  $\nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)})\mathbf{u}^{(k+1)}$  przez  $\nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)})\mathbf{u}^{(k)} - G(\mathbf{u}^{(k)})$  na podstawie równania (A.76) i podstawiając tak przekształcone wyrażenie na  $\lambda$  do (A.75) dostajemy

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{u}^{(k)})\|^2} (\nabla G^T(\mathbf{u}^{(k)})\mathbf{u}^{(k)} - G(\mathbf{u}^{(k)})) \nabla G(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (\text{A.79})$$

Powyższy wzór iteracyjny na znajdowanie punktu projektowego zaproponowany został po raz pierwszy w 1974 roku przez Hasofer'a i Lindę [53]. Iteracje kontynuowane są aż do spełnienia warunku

$$|u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}| \leq \epsilon \quad \text{dla wszystkich } i \text{ oraz } |g(\mathbf{x}^*)| \leq \epsilon, \quad (\text{A.80})$$

gdzie  $\epsilon$  jest zadana tolerancją,  $g(\mathbf{x})$  powierzchnią graniczną daną w przestrzeni oryginalnych zmiennych losowych  $\mathbf{X}$ , a  $\mathbf{x}^* = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}^*)$  jest punktem projektowym w tej właśnie przestrzeni ( $T(\cdot)$  symbolizuje transformacje zmiennych). Zazwyczaj wygodniej jest obliczać wartości funkcji granicznej oraz gradientu w przestrzeni  $\mathcal{X}$ , a nie w gaussowskiej standardowej przestrzeni  $\mathcal{U}$ . Dlatego też na każdej iteracji punkt  $\mathbf{u}$  transformowany jest do przestrzeni oryginalnej

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}), \quad (\text{A.81})$$

natomiast gradient  $\nabla G(\mathbf{u})$  oblicza się wykorzystując regułę różniczkowania funkcji złożonej

$$\nabla G(\mathbf{u}) = (\mathbf{J}^T)^{-1} \nabla g(\mathbf{x}), \quad (\text{A.82})$$

gdzie  $\mathbf{J} = [\partial u_i / \partial x_j]$  jest macierzą jacobianu transformacji  $T$ . Można powiedzieć, iż wzór (A.79) jest szczególnym przypadkiem rekurencyjnego programowania kwadratowego, w którym przyjęto jednostkową macierz hesjanu funkcji Lagrange'a oraz długość kroku  $\alpha = 1$ . W 1978 roku Rackwitz i Fiessler [96] wykorzystali powyższy algorytm w połączeniu z metodą transformacji dowolnych zmiennych losowych do przestrzeni niezależnych, standaryzowanych zmiennych gaussowskich. Od tego czasu algorytm (A.79) kojarzony jest najczęściej z ich nazwiskami i oznaczany skrótowo RF. Charakteryzuje się on dużą prostotą i efektywnością w wielu zagadnieniach analizy niezawodności, lecz wadą jego jest powolna zbieżność, a w przypadku silnie nieliniowych powierzchni granicznych  $G(\mathbf{u})$  często nawet brak zbieżności. Najczęściej stosowaną metodą usprawnienia algorytmu RF jest wprowadzenie procedury redukcji długości kroku

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta \mathbf{u}^{(k)} = (1 - \alpha^{(k)})\mathbf{u}^{(k)} + \alpha^{(k)} \tilde{\mathbf{u}}^{(k+1)}, \quad (\text{A.83})$$

gdzie  $\alpha^{(k)}$  jest stałą mniejszą od jedności, a  $\tilde{\mathbf{u}}^{(k+1)}$  jest innym oznaczeniem występującego we wzorze (A.79) punktu  $\mathbf{u}^{(k+1)}$ .

Znaczącą poprawę efektywności metody RF przyniosło zastosowanie przez Abdo [1], procedury obliczania długości kroku, która wykorzystuje, znaną z metody rekurencyjnego programowania kwadratowego, rozszerzoną funkcję Lagrange'a (por. (A.56)). Uwzględniając postać funkcji celu (A.70), funkcja ta dana jest jako

$$\Psi_r^{(k)}(\mathbf{u}, \lambda) = Q(\mathbf{u}) + \lambda G(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} r^{(k)} G(\mathbf{u})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \lambda G(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} r^{(k)} G(\mathbf{u})^2, \quad (\text{A.84})$$

gdzie  $r^{(k)}$  jest parametrem kary. Tak wzbogacony oryginalny algorytm RF oznaczany bywa skrótem ARF.

W używanym w pracy pakiecie analizy niezawodności COMREL-TI [12] zaimplementowany algorytm ARF wykorzystuje dwie strategie minimalizacji kierunkowej. Pierwsza z nich to przedstawiona w punkcie A.1.3 metoda oparta na aproksymacji kwadratowej, a druga to bardziej dokładna metoda złotego podziału odcinka (zob. [2, 125]). Obydwie te strategie jako warunek zbieżności przyjmują dane równaniem (A.57) kryterium Armijo.

Warto jest wspomnieć o efektywności algorytmu ARF w porównaniu do uważanych obecnie za najlepsze, algorytmów rekurencyjnego programowania kwadratowego. Nasuwa się pytanie o celowość używania innych metod, skoro metody SQP są najefektywniejsze. Temat ten został szczegółowo omówiony w pracy Abdo i Rackwitz [1]. Zdecydowana przewaga algorytmów SQP uwidacznia się jedynie w zadaniach o małej liczbie zmiennych losowych. Przypisać to należy wykorzystywanej informacji o drugich pochodnych w procedurze wyznaczania kierunku poszukiwań. Dla większych zadań, używana w algorytmie SQP metoda aproksymacji hesjanu (por. A.1.2) powoduje, że dobre przybliżenie tej macierzy można uzyskać dopiero po około  $n$  iteracjach, gdzie  $n$  jest liczbą zmiennych losowych. Z tej przyczyny liczba iteracji ARF i SQP w większych zadaniach analizy niezawodności nie różni się znacznie. Na niekorzyść algorytmu SQP przemawia również bardzo szybko rosnąca, wraz z wymiarem zadania, zajętość pamięci operacyjnej. Iteracja metody SQP zajmuje też więcej czasu, co nie ma jednak większego znaczenia gdy decydującym o czasie trwania całej analizy jest czas obliczenia wartości i gradientu funkcji (np. konieczność przeprowadzenia nieliniowej analizy metodą elementów skończonych). Jedną z konkluzji zawartych w pracy [1] jest to, iż algorytmy SQP mogą być stosowane jedynie w zadaniach o  $n < 60$ , co jest często niewystarczające w analizie niezawodności rzeczywistych konstrukcji inżynierskich.

Na koniec należy też wspomnieć o innych propozycjach modyfikacji algorytmu RF mających na celu poprawę jego zbieżności. Jak to już zaznaczono, w większości przypadków modyfikacje te dotyczą procedury kontroli długości kroku algorytmu. Liu i Der Kiureghian [74] do określania długości kroku zaproponowali użycie następującej funkcji:

$$m(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{u} - \frac{\nabla G^T(\mathbf{u})\mathbf{u}}{\|\nabla G(\mathbf{u})\|^2} \nabla G(\mathbf{u}) \right\|^2 + \frac{1}{2} p G(\mathbf{u})^2, \quad (\text{A.85})$$

gdzie  $p$  jest dodatnią stałą. Nietrudno zauważyć, że powyższa funkcja jest zawsze nieujemna oraz przyjmuje wartość zerową w punkcie projektowym (na podstawie współliniowości wektora  $\mathbf{u}^*$  i gradientu funkcji granicznej  $\nabla G(\mathbf{u}^*)$ ). Doświadczenia numeryczne potwierdziły znaczną poprawę zbieżności zmodyfikowanego algorytmu. Nie przedstawiono jednak dowodu na jego globalną zbieżność. Zhang i Der Kiureghian w pracy [129] przedstawili globalnie zbieżny zmodyfikowany algorytm RF, w którym długość kroku obliczana jest z minimalizacji funkcji  $Q(\mathbf{u})$  rozszerzonej o funkcję kary

$$m(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}) + p \|G(\mathbf{u})\|, \quad (\text{A.86})$$

gdzie  $p > 0$  jest parametrem kary ustalonym na podstawie mnożnika Lagrange'a (A.78). Nie porównano jednak efektywności tego algorytmu w stosunku do algorytmu ARF.

### A.2.2. Wielokrotne punkty projektowe

Przedstawiony w poprzednim punkcie algorytm ARF czy też standardowy algorytm RF (A.79) z procedurą poszukiwania długości kroku, w oparciu o funkcję kary (A.86), charakteryzują się globalną zbieżnością, tzn. zbiegają one do optimum niezależnie od wyboru punktu startowego. Jednak nawet globalnie zbieżne algorytmy nie gwarantują zbieżności do minimum globalnego. W kontekście niezawodnościowym oznacza to, iż nie ma gwarancji, że znaleziony punkt projektowy  $\mathbf{u}^*$  rzeczywiście leży najbliżej początku układu współrzędnych. Obecność wielu punktów projektowych może powodować szereg problemów w analizie niezawodności metodami FORM i SORM (zob. punkty 2.3.3 i 2.3.4):

1. Algorytm optymalizacyjny może zbiegać do lokalnego punktu projektowego. W takim przypadku metody FORM i SORM nie będą uwzględniać tej części obszaru awarii, który ma największy wpływ na wielkość prawdopodobieństwa zniszczenia, a co za tym idzie błąd takiej aproksymacji może być znaczny.
2. Nawet jeśli znaleziono globalny punkt projektowy, to pominięcie udziału obszarów wokół lokalnych punktów projektowych w obliczaniu prawdopodobieństwa awarii i aproksymacja funkcji granicznej jedynie w globalnym punkcie projektowym może być przyczyną dużego błędu.

Przez globalny punkt projektowy rozumie się tu punkt leżący najbliżej początku układu, a przez lokalne punkty projektowe pozostałe punkty odpowiadające minimom lokalnym zadania (A.70)–(A.71).

Znajomość wszystkich punktów projektowych pozwala na bardziej precyzyjne oszacowanie prawdopodobieństwa zniszczenia. Jednak lokalizacja tych punktów nie jest zadaniem łatwym i wymaga restartowania algorytmu z wielu punktów początkowych i to też bez gwarancji sukcesu. Ciekawą propozycję metody pozwalającej na odszukanie wielokrotnych punktów projektowych przedstawili Der Kiureghian i Dakessian w pracy [18]. Polega ona na dodawaniu specjalnie skonstruowanego ‘wybrzuszenia’ (ang. bulge) do funkcji granicznej wokół znalezionego punktu projektowego co powoduje odsunięcie tego punktu od początku układu i ‘zmusza’ algorytm optymalizacyjny do poszukiwania innego punktu. Po znalezieniu pierwszego punktu projektowego  $\mathbf{u}_1^*$  powierzchnia graniczna  $G(\mathbf{u}) = 0$  ‘deformowana’ jest następująco:

$$G_1(\mathbf{u}) = G(\mathbf{u}) + B_1(\mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.87})$$

gdzie  $B_1(\mathbf{u})$  definiuje wybrzuszenie wokół  $\mathbf{u}_1^*$ . Po znalezieniu drugiego punktu projektowego  $\mathbf{u}_2^*$  wybrzuszenie  $B_2(\mathbf{u})$  skonstruowane wokół tego punktu dodawane jest do  $G_1(\mathbf{u})$  i takiej powierzchni granicznej używa się w poszukiwaniu punktu  $\mathbf{u}_3^*$ . Ogólnie, powierzchnia graniczna stanowiąca ograniczenie w zadaniu poszukiwania  $m$ -tego punktu projektowego ma postać

$$G_{m-1}(\mathbf{u}) = G_{m-2}(\mathbf{u}) + B_{m-1}(\mathbf{u}) = G(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{m-1} B_i(\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.88})$$

Postępowanie to powtarzane jest aż do znalezienia wszystkich punktów projektowych. Przegląd różnych metod lokalizacji wielu punktów projektowych znaleźć można w pracy [71]. Oprócz metod gradientowych zaprezentowano w niej metodę opartą na algorytmie genetycznym.

---

## Analiza wrażliwości konstrukcji kratowych

---

Zaimplementowane w ramach pracy metody analizy wrażliwości konstrukcji określić można jako dyskretne metody analityczne [63]. Istotą tych metod jest uprzednia dyskretyzacja równań równowagi (jak to ma miejsce w metodzie elementów skończonych) i późniejsze zróżniczkowanie zdyskretyzowanych równań w celu otrzymania pochodnych uogólnionych przemieszczeń węzłowych (a co za tym idzie odkształceń i naprężeń w elementach) względem parametrów projektowych. Alternatywną metodą analizy wrażliwości konstrukcji jest kontynualna metoda analityczna. Polega ona na uprzednim, analitycznym różniczkowaniu równań równowagi, a następnie na dyskretyzacji tak otrzymanych równań na pochodne pól przemieszczeń. Metoda ta, wymagająca często nietrywialnych wyprowadzeń, jest przydatna szczególnie wtedy gdy nie ma się dostępu do kodu źródłowego programu metody elementów skończonych. Zaletą jej jest również możliwość przyjęcia innej, korzystniejszej z punktu widzenia analizy wrażliwości dyskretyzacji niż tej używanej w analizie problemu równowagi. Z prac dotyczących konstrukcji prętowych, w których zastosowano kontynualną analityczną metodę analizy wrażliwości wymienić można [7, 8, 88].

Analizując wrażliwość układów konstrukcyjnych na zmianę parametrów projektowych, najczęściej poszukuje się wrażliwości nie samych przemieszczeń, lecz pewnych ich funkcji, które w przypadku konstrukcji liniowych oraz geometrycznie nieliniowych można zapisać w postaci

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = g[\mathbf{q}(\mathbf{x}); \mathbf{x}], \quad (\text{B.1})$$

gdzie  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  jest wektorem zmiennych projektowych, a  $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_m\}$  wektorem przemieszczeń węzłowych. Różniczkując powyższą funkcję względem  $\mathbf{x}$  otrzymuje się następujące wyrażenie

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\mathbf{x}} = \frac{dg}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{x}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{B.2})$$

$\begin{matrix} 1 \times n & 1 \times n & 1 \times m & m \times n & 1 \times n \end{matrix}$

gdzie  $\partial g / \partial \mathbf{x} = [\partial g / \partial x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , jest wektorem wierszowym pochodnych cząstkowych wynikających z jawnej zależności funkcji  $g(\cdot, \mathbf{x})$  od  $x_i$ ,  $\partial g / \partial \mathbf{q} = [\partial g / \partial q_j]$ ,  $j = 1, \dots, m$ , jest wektorem wierszowym pochodnych cząstkowych wynikających z jawnej zależności funkcji  $g(\mathbf{q}, \cdot)$  od  $q_j$ , a  $d\mathbf{q}/d\mathbf{x}$  jest macierzą  $m \times n$ , której wiersze  $[dq_j/d\mathbf{x}]$ ,  $j = 1, \dots, m$  są gradientami przemieszczeń węzłowych. Zależność  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  jest niejawna i dlatego główny ciężar obliczeniowy w analizie wrażliwości związany jest z obliczeniem pochodnych przemieszczeń po zmiennych projektowych.

W systemie OPTIREL zaimplementowane zostały trzy funkcje, które pełnią rolę funkcji granicznych w analizie niezawodności i których wrażliwość musi być efektywnie liczona. Funkcje te wymieniono już w punkcie 3.2 (por. (3.7)–(3.9)). Poniżej podano je jeszcze raz dla przypomnienia:

- funkcja graniczna przemieszczeniowa

$$g(\mathbf{q}(\mathbf{x})) = 1 - \frac{|q_i(\mathbf{x})|}{q^a} \quad (\text{B.3})$$

- funkcja graniczna naprężeniowa / stateczności lokalnej

$$g(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 1 - \frac{|\sigma_i(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x})|}{\sigma_i^a(\mathbf{x})} \quad (\text{B.4})$$

- funkcja graniczna stateczności globalnej

$$g(\lambda_{cr}(\mathbf{x})) = \lambda_{cr}(\mathbf{x}) - 1 \quad (\text{B.5})$$

Rozpatruje się następujące zmienne projektowe:

- moduł Younga materiału poszczególnych prętów
- granica plastyczności materiału poszczególnych prętów
- pola przekroju poprzecznego prętów
- współrzędne kartezjańskie węzłów kratownicy
- mnożnik obciążenia

W dalszych punktach tego rozdziału przedstawione zostaną wzory potrzebne do liczenia wrażliwości funkcji granicznych (B.3)–(B.5) na wymienione zmienne projektowe dla liniowych oraz geometrycznie nieliniowych sprężystych konstrukcji kratowych.

## B.1. Wrażliwość w zagadnieniach liniowych

Równanie metody elementów skończonych liniowej statyki ma postać

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}), \quad (\text{B.6})$$

gdzie  $\mathbf{K}$  jest macierzą sztywności o wymiarach  $m \times m$ ,  $\mathbf{q}$  jest wektorem przemieszczeń, a  $\mathbf{Q}$  wektorem obciążeń węzłowych. W powyższym równaniu podkreślono zależność wszystkich występujących w nim wyrazów od wektora zmiennych projektowych  $\mathbf{x} = \{x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Należy jednak zauważyć, że macierz  $\mathbf{K}$  oraz wektor  $\mathbf{Q}$  są jawnymi funkcjami  $\mathbf{x}$  natomiast wektor  $\mathbf{q}$ , jako rozwiązanie układu (B.6), jest niejawną funkcją zmiennych projektowych. Różniczkując równanie (B.6) względem  $\mathbf{x}$  otrzymujemy

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{q}}{dx_i} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{q} \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.7})$$

Rozwiązując układ (B.7) dostajemy pochodne przemieszczeń względem zmiennych projektowych. Podstawiając następnie uzyskane wyniki do wzoru (B.2), otrzymujemy

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \underset{1 \times m}{\mathbf{K}^{-1}} \underset{m \times m}{\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{q} \right)} \underset{m \times 1}{\mathbf{q}} \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.8})$$

Powyższa metoda analizy wrażliwości nosi nazwę *metody bezpośredniego różniczkowania*. Oznacza się ją czasem skrótem DDM od angielskiej nazwy *direct differantiation method* (zob. [63]). Z równań (B.7) i (B.8) wynika, że aby obliczyć wrażliwość funkcji  $g$  na  $n$  zmiennych projektowych konieczne jest rozwiązanie układu (B.6), w celu otrzymania wektora przemieszczeń  $\mathbf{q}$ , a następnie  $n$  krotne rozwiązania układu (B.7). Z uwagi na to, że zarówno w równaniu (B.6) jak i w (B.7) macierzą współczynników przy niewiadomych jest ta sama macierz sztywności, po jednokrotnym zdekomponowaniu macierzy  $\mathbf{K}$  rozwiązanie kolejnych układów równań sprowadza się jedynie do podstawienia prostego i odwrotnego dla zmieniających się wektorów prawej strony.

Metodą analizy wrażliwości, która stosowana jest w rozpatrywanych w pracy przykładach optymalizacji niezawodnościowej, jest *metoda układu sprzężonego* (angielski skrót ASM od *adjoint system method*). Wprowadzając tzw. wektor zmiennych sprzężonych  $\mathbf{\Lambda}$ , dany jako rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{K} \mathbf{\Lambda} = \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \quad (\text{B.9})$$

$m \times m \quad m \times 1 \quad m \times 1$

równanie (B.8) przybiera następującą postać

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \mathbf{\Lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{q} \right) \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.10})$$

$1 \times m \quad m \times 1 \quad m \times m \quad m \times 1$

Zapisanie równania (B.8) w równoważnej postaci (B.10) niesie za sobą bardzo istotne konsekwencje jeśli chodzi o efektywność numeryczną algorytmu analizy wrażliwości. Używając metody ASM w celu policzenia wrażliwości funkcji  $g$  na  $n$  zmiennych projektowych wystarczy jedynie rozwiązać problem równowagi (B.6) oraz równanie sprzężone (B.9) (podobnie jak w DDM, równania te mają tę samą macierz współczynników przy niewiadomych - macierz  $\mathbf{K}$ ). Zarówno w metodzie DDM jak i ASM konieczne jest policzenie pochodnych macierzy sztywności elementów oraz wektora obciążeń względem wszystkich zmiennych projektowych.

Porównując przedstawione metody należy rozpatrzyć ogólny przypadek analizy wrażliwości gdy poszukuje się pochodnych  $k$  funkcji opisujących odpowiedź konstrukcji względem  $n$  parametrów projektowych dla  $l$  schematów obciążenia. W przypadku konstrukcji liniowej metoda DDM wymaga rozwiązania układu równań dla  $l + l \times n$  wektorów prawych stron ( $l$  układów (B.6) +  $l \times n$  układów (B.7)) natomiast metoda ASM wymaga rozwiązania układu równań dla  $l + k$  prawych stron ( $l$  układów (B.6) +  $k$  układów sprzężonych (B.9)). Wynika stąd, że efektywność obliczeniowa danej metody zależy od stosunku  $l \times n$  do  $k$ . Metoda DDM jest więc niewrażliwa na liczbę ograniczeń projektowych (liczbę funkcji granicznych  $g$ ), a efektywność metody ASM nie zależy od liczby zmiennych projektowych.

### B.1.1. Element skończony kratownicy przestrzennej

Analiza wrażliwości zarówno metodą bezpośredniego różniczkowania jak i układu sprzężonego wymaga zróżniczkowania macierzy sztywności konstrukcji względem parametrów projektowych (por. (B.8) i (B.10)). Macierz sztywności elementu skończonego kratownicy przestrzennej (zob. rys. B.1) w globalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$  ma postać

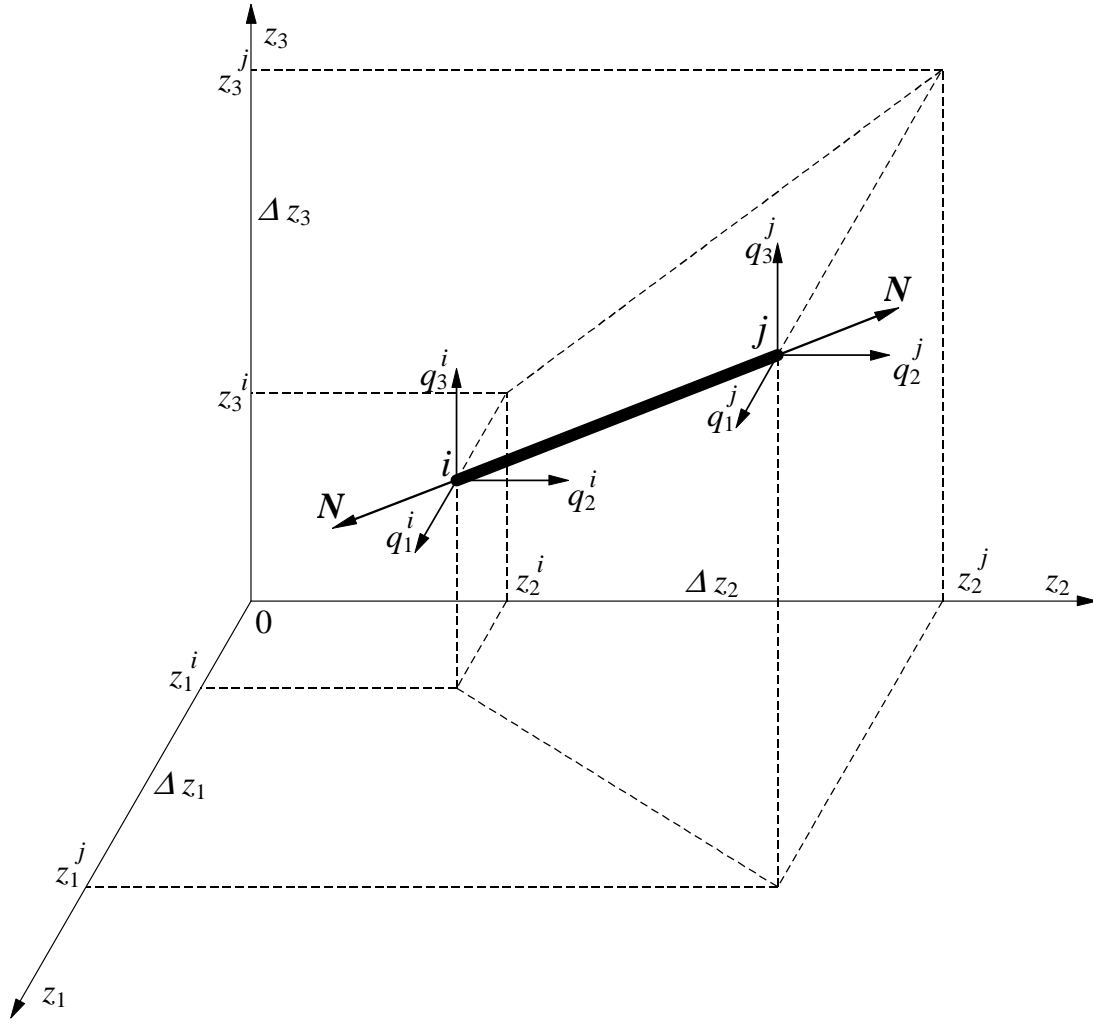
$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{l^3} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \Delta z_1^2 & \Delta z_1 \Delta z_2 & \Delta z_1 \Delta z_3 \\ & \Delta z_2^2 & \Delta z_2 \Delta z_3 \\ & & \Delta z_3^2 \end{matrix}} & -\Delta z_1^2 & -\Delta z_1 \Delta z_2 & -\Delta z_1 \Delta z_3 \\ -\Delta z_2 \Delta z_1 & -\Delta z_2^2 & -\Delta z_2 \Delta z_3 & \\ -\Delta z_3 \Delta z_1 & -\Delta z_3 \Delta z_2 & -\Delta z_3^2 & \\ \Delta z_1^2 & \Delta z_1 \Delta z_2 & \Delta z_1 \Delta z_3 & \\ \text{sym.} & \Delta z_2^2 & \Delta z_2 \Delta z_3 & \\ & & \Delta z_3^2 & \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

gdzie  $E$  jest modułem sprężystości materiału,  $A$  jest polem przekroju poprzecznego, a  $l = ((z_1^j - z_1^i)^2 + (z_2^j - z_2^i)^2 + (z_3^j - z_3^i)^2)^{\frac{1}{2}} = (\Delta z_1^2 + \Delta z_2^2 + \Delta z_3^2)^{\frac{1}{2}}$  jest długością pręta. Różniczkując następnie powyższą macierz względem zmiennych projektowych wymienionych na stronie 134 otrzymuje się:

- pochodna względem modułu Younga materiału pręta  $E$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial E} = \frac{1}{E} \mathbf{K}_e \quad (\text{B.12})$$





Rys. B.1. Element skończony kratownicy przestrzennej

- pochodna względem granicy plastyczności materiału pręta  $\sigma^0$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \sigma^0} = \mathbf{0} \quad (\text{B.13})$$

- pochodna względem pola przekroju poprzecznego pręta  $A$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial A} = \frac{1}{A} \mathbf{K}_e \quad (\text{B.14})$$

- pochodne względem współrzędnych węzłów pręta  $z_k^i, z_k^j, k = 1, 2, 3$ .

W celu policzenia pochodnych wszystkich wyrazów macierzy (B.11), korzystając z symetrii macierzy, wystarczy policzyć pochodne wyrazów wziętych w ramkę <sup>1)</sup>.

$$\frac{\partial K_{\alpha\alpha}}{\partial z_\alpha^i} = \frac{EA}{l^5} \Delta z_\alpha (\Delta z_\alpha^2 - 2(\Delta z_\beta^2 + \Delta z_\gamma^2)) \quad \frac{\partial K_{\alpha\alpha}}{\partial z_\alpha^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\alpha}}{\partial z_\alpha^i} \quad (\text{B.15a})$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\alpha}}{\partial z_\beta^i} = \frac{EA}{l^5} 3\Delta z_\beta \Delta z_\alpha^2 \quad \frac{\partial K_{\alpha\alpha}}{\partial z_\beta^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\alpha}}{\partial z_\beta^i} \quad (\text{B.15b})$$

<sup>1)</sup>Dla przejrzystości zapisu pominięto w oznaczeniach wyrazów macierzy  $\mathbf{K}_e$  dolny indeks  $e$ .

$$\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\alpha}^i} = \frac{EA}{l^5} \Delta z_{\beta} (2\Delta z_{\alpha}^2 - \Delta z_{\beta}^2 - \Delta z_{\gamma}^2) \quad \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\alpha}^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\alpha}^i} \quad (\text{B.15c})$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\beta}^i} = \frac{EA}{l^5} \Delta z_{\alpha} (2\Delta z_{\beta}^2 - \Delta z_{\alpha}^2 - \Delta z_{\gamma}^2) \quad \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\beta}^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\beta}^i} \quad (\text{B.15d})$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\gamma}^i} = \frac{EA}{l^5} 3\Delta z_{\alpha} \Delta z_{\beta} \Delta z_{\gamma} \quad \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\gamma}^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial z_{\gamma}^i} \quad (\text{B.15e})$$

Z powyższych wzorów należy korzystać przyjmując za indeksy  $\alpha, \beta, \gamma$  wybrane permutacje zbioru indeksów  $\{1, 2, 3\}$ .

- pochodna względem mnożnika obciążenia  $\lambda$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \quad (\text{B.16})$$

Jak zostanie to pokazane w punkcie B.1.4, w celu obliczenia wrażliwości krytycznego mnożnika obciążenia konieczne jest uprzednie zróżniczkowanie elementowych macierzy naprężeń początkowych (macierzy geometrycznych)  $\mathbf{K}_e^g$ . W przypadku elementu kratownicy przestrzennej macierz ta ma postać (por. [54])

$$\mathbf{K}_e^g = \frac{\sigma A}{l} \begin{bmatrix} \boxed{1 - \frac{\Delta z_1^2}{l^2}} & \boxed{-\frac{\Delta z_1 \Delta z_2}{l^2}} & \boxed{-\frac{\Delta z_1 \Delta z_3}{l^2}} & -1 + \frac{\Delta z_1^2}{l^2} & \frac{\Delta z_1 \Delta z_2}{l^2} & \frac{\Delta z_1 \Delta z_3}{l^2} \\ & \boxed{1 - \frac{\Delta z_2^2}{l^2}} & \boxed{-\frac{\Delta z_2 \Delta z_3}{l^2}} & \frac{\Delta z_1 \Delta z_2}{l^2} & -1 + \frac{\Delta z_2^2}{l^2} & \frac{\Delta z_2 \Delta z_3}{l^2} \\ & & \boxed{1 - \frac{\Delta z_3^2}{l^2}} & \frac{\Delta z_1 \Delta z_3}{l^2} & \frac{\Delta z_2 \Delta z_3}{l^2} & -1 + \frac{\Delta z_3^2}{l^2} \\ & & & 1 - \frac{\Delta z_1^2}{l^2} & -\frac{\Delta z_1 \Delta z_2}{l^2} & -\frac{\Delta z_1 \Delta z_3}{l^2} \\ & & \text{sym.} & & 1 - \frac{\Delta z_2^2}{l^2} & -\frac{\Delta z_2 \Delta z_3}{l^2} \\ & & & & & 1 - \frac{\Delta z_3^2}{l^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

gdzie  $\sigma$  jest naprężeniem w pręcie. Pochodne macierzy  $\mathbf{K}_e^g$  wynikające z jawnej zależności od zmiennych projektowych (przyjmując  $\sigma \neq \sigma(\mathbf{x})$ ) dane są następująco:

- pochodna względem modułu Younga materiału pręta  $E$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^g}{\partial E} = \mathbf{0} \quad (\text{B.18})$$

- pochodna względem granicy plastyczności materiału pręta  $\sigma^0$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^g}{\partial \sigma^0} = \mathbf{0} \quad (\text{B.19})$$

- pochodna względem pola przekroju poprzecznego pręta  $A$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^g}{\partial A} = \frac{1}{A} \mathbf{K}_e^g \quad (\text{B.20})$$

- pochodne względem współrzędnych węzłów pręta  $z_k^i, z_k^j, k = 1, 2, 3$ .

W celu policzenia pochodnych wszystkich wyrazów macierzy (B.17), podobnie jak w przypadku macierzy sztywności, wystarczy policzyć pochodne zaznaczonych wyrazów.

$$\frac{\partial K_{\alpha\alpha}^g}{\partial z_\alpha^i} = \frac{\sigma A}{l^3} 3\Delta z_\alpha \left(1 - \frac{\Delta z_\alpha^2}{l^2}\right) \quad \frac{\partial K_{\alpha\alpha}^g}{\partial z_\alpha^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\alpha}^g}{\partial z_\alpha^i} \quad (\text{B.21a})$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\alpha}^g}{\partial z_\beta^i} = \frac{\sigma A}{l^3} \Delta z_\beta \left(1 - \frac{3\Delta z_\alpha^2}{l^2}\right) \quad \frac{\partial K_{\alpha\alpha}^g}{\partial z_\beta^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\alpha}^g}{\partial z_\beta^i} \quad (\text{B.21b})$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\alpha^i} = \frac{\sigma A}{l^3} \Delta z_\beta \left(1 - \frac{3\Delta z_\alpha^2}{l^2}\right) \quad \frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\alpha^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\alpha^i} \quad (\text{B.21c})$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\beta^i} = \frac{\sigma A}{l^3} \Delta z_\alpha \left(1 - \frac{3\Delta z_\beta^2}{l^2}\right) \quad \frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\beta^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\beta^i} \quad (\text{B.21d})$$

$$\frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\gamma^i} = -\frac{\sigma A}{l^5} 3\Delta z_\alpha \Delta z_\beta \Delta z_\gamma \quad \frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\gamma^j} = -\frac{\partial K_{\alpha\beta}^g}{\partial z_\gamma^i} \quad (\text{B.21e})$$

Tak jak w przypadku wzorów (B.15), z powyższych wzorów należy korzystać podstawiając za  $\alpha, \beta, \gamma$  wybrane permutacje zbioru indeksów  $\{1, 2, 3\}$ .

- pochodna względem mnożnika obciążenia  $\lambda$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^g}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \quad (\text{B.22})$$

Ze względu na to, że macierz  $\mathbf{K}_e^g$  zależy od naprężenia w elemencie, to w przeciwieństwie do macierzy sztywności  $\mathbf{K}_e$  zależy ona w sposób niejawni od wszystkich zmiennych projektowych. Wyrażenie na pochodną macierzy geometrycznej względem zmiennej projektowej  $x_i, i = 1, \dots, n$ , dane jest zatem jako

$$\frac{d\mathbf{K}_e^g}{dx_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_e^g}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{K}_e^g}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dx_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_e^g}{\partial x_i} + \frac{\mathbf{K}_e^g}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx_i}, \quad (\text{B.23})$$

gdzie człon  $\partial \mathbf{K}_e^g / \partial x_i$  jest różny od zera jedynie w przypadku gdy zmienną projektową jest pole przekroju poprzecznego pręta lub współrzędna jego węzła.

### B.1.2. Funkcja graniczna przemieszczeniowa

W przypadku gdy funkcja  $g$  dana jest wzorem (B.3) wektor pseudo-obciążenia  $\partial g / \partial \mathbf{q}$ , potrzebny do obliczenia wektora sprzężonych przemieszczeń  $\mathbf{\Lambda}$  (por. (B.9)), przyjmuje postać

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \text{sign}(q_i) \left[ 0, \dots, 0, -\frac{1}{q^a}, 0, \dots, 0 \right]. \quad (\text{B.24})$$

$1 \times m$   $i-1$   $i$   $i+1$

Występujący we wzorze (B.10) ‘jawny’ wyraz  $\partial g/\partial x_i$  w przypadku funkcji przemieszczeniowej równy jest zero, a więc wrażliwość funkcji granicznej (B.3) na zmienne projektowe typu moduł Younga, pole przekroju i współrzędne węzła oblicza się ze wzoru

$$\frac{dg}{dx_i} = -\Lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{q}, \quad (\text{B.25})$$

gdzie macierz  $\partial \mathbf{K}/\partial x_i$  tworzona jest tak jak w przypadku macierzy sztywności przez agregację macierzy elementowych  $\partial \mathbf{K}_e/\partial x_i$ . Wrażliwość funkcji (B.3) na zmianę granicy plastyczności materiału prętów  $\sigma^0$  wynosi zero natomiast wrażliwość na mnożnik obciążenia  $\lambda$  ( $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Q}^*$ ) oblicza się ze wzoru (B.8) uwzględniając postać wektora (B.24)

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda} = \text{sign}(q_i) \left[ 0, \dots, 0, -\frac{1}{q^a}, 0, \dots, 0 \right] \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}^* = -\frac{|q_i|}{\lambda q^a}. \quad (\text{B.26})$$

### B.1.3. Funkcja graniczna naprężeniowa / stateczności lokalnej

Naprężeniowa funkcja graniczna (B.4) wyrażona poprzez przemieszczenia węzłów pręta  $\mathbf{q}^i$  i  $\mathbf{q}^j$  (zob. rys. B.1) dana jest następująco:

$$g(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 1 - \frac{\text{sign}(\sigma_k) E_k}{l_k^2 \sigma_k^a(\mathbf{x})} (\Delta z_1 (q_1^j - q_1^i) + \Delta z_2 (q_2^j - q_2^i) + \Delta z_3 (q_3^j - q_3^i)), \quad (\text{B.27})$$

gdzie  $\sigma_k$  jest naprężeniem w  $k$ -tym pręcie, a  $E_k$  i  $l_k$  odpowiednio modułem Younga materiału pręta i jego długością. Wektor pseudo-obciążenia związany z powyższą funkcją ma postać

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\text{sign}(\sigma_k) E_k}{l_k^2 \sigma_k^a} \left[ \underbrace{0, \dots, 0}_{1 \times m}, \underbrace{\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3}_{\text{stopnie swobody węzła } i}, \underbrace{-\Delta z_1, -\Delta z_2, -\Delta z_3}_{\text{stopnie swobody węzła } j}, 0, \dots, 0 \right] \quad (\text{B.28})$$

W przeciwieństwie do funkcji przemieszczeniowej funkcja (B.28) zależy od zmiennych projektowych również w sposób jawny. ‘Jawne’ pochodne  $\partial g/\partial x_i$  dla poszczególnych, rozpatrywanych w pracy, zmiennych projektowych dane są następująco:

- pochodne względem modułu Younga materiału prętów  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n_e$

$$\frac{\partial g}{\partial E_i} = \begin{cases} \frac{|\sigma_k|}{\sigma_k^a} \left( \frac{1}{\sigma_k^a} \frac{\partial \sigma_k^a}{\partial E_k} - \frac{1}{E_k} \right) & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

$n_e$  oznacza liczbę elementów kratownicy.

- pochodne względem granicy plastyczności materiału prętów  $\sigma_i^0$ ,  $i = 1, \dots, n_e$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_i^0} = \begin{cases} \frac{\sigma_k}{(\sigma_k^0)^2} & i = k \text{ i } \sigma_k > 0 \\ -\frac{\sigma_k}{(\sigma_k^0)^2} & i = k \text{ i } \sigma_k < 0 \text{ i } |\sigma_k^0| < |\sigma_k^{cr}| \\ 0 & i \neq k \text{ lub } (i = k \text{ i } \sigma_k < 0 \text{ i } |\sigma_k^0| > |\sigma_k^{cr}|) \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

gdzie  $\sigma_k^{cr}$  jest eulerowskim naprężeniem krytycznym  $k$ -tego pręta.

- pochodne względem pól przekroju poprzecznego prętów  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n_e$

$$\frac{\partial g}{\partial A_i} = \begin{cases} \frac{|\sigma_k|}{(\sigma_k^a)^2} \frac{\partial \sigma_k^a}{\partial A_k} & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

- pochodne względem współrzędnych węzłów  $k$ -tego pręta  $z_\alpha^i, z_\alpha^j$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial g}{\partial z_\alpha^i} = \frac{|\sigma_k|}{(\sigma_k^a)^2} \frac{\partial \sigma_k^a}{\partial z_\alpha^i} - \frac{\text{sign}(\sigma_k)}{l_k^2 \sigma_k^a} [2\sigma_k \Delta z_\alpha + E_k (q_\alpha^i - q_\alpha^j)] \quad (\text{B.32a})$$

$$\frac{\partial g}{\partial z_\alpha^j} = \frac{|\sigma_k|}{(\sigma_k^a)^2} \frac{\partial \sigma_k^a}{\partial z_\alpha^j} + \frac{\text{sign}(\sigma_k)}{l_k^2 \sigma_k^a} [2\sigma_k \Delta z_\alpha + E_k (q_\alpha^i - q_\alpha^j)] \quad (\text{B.32b})$$

Pochodne względem współrzędnych pozostałych węzłów równe są zero.

- pochodna względem mnożnika obciążenia  $\lambda$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0 \quad (\text{B.33})$$

Obliczywszy wszystkie niezbędne pochodne cząstkowe, wrażliwość funkcji granicznej naprężeniowej na moduł Younga, granicę plastyczności, pole przekroju i współrzędne węzła otrzymuje się ze wzoru (B.10). Wrażliwość na mnożnik obciążenia, podobnie jak w przypadku funkcji przemieszczeniowej dana jest jako

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda} = -\frac{|\sigma_k|}{\lambda \sigma_k^a}. \quad (\text{B.34})$$

W powyższym wyrażeniu wykorzystano wektor pseudo-obciążenia dany wzorem (B.28). Występująca we wzorach (B.29), (B.31) i (B.32) pochodna naprężenia dopuszczalnego  $\partial \sigma_k^a / \partial x_i$  obliczana jest w zależności od znaku i wielkości naprężenia w pręcie jako

$$\frac{\partial \sigma_k^a}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_k^{cr}}{\partial x_i} & \sigma_k < 0 \text{ i } |\sigma_k^0| > |\sigma_k^{cr}| \\ 0 & \sigma_k > 0 \text{ lub } (\sigma_k < 0 \text{ i } |\sigma_k^0| < |\sigma_k^{cr}|) \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

#### B.1.4. Funkcja graniczna stateczności globalnej

Obliczenie wrażliwości funkcji granicznej stateczności globalnej, wyrażonej wzorem (B.5), wymaga policzenia wrażliwości krytycznego mnożnika obciążenia  $\lambda_{cr}$ . Zadanie to w ramach zlinearyzowanej analizy stateczności wiąże się z rozwiązaniem uogólnionego zagadnienia własnego postaci (zob. [62])

$$[\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*)] \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.36})$$

gdzie  $\mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*)$  jest macierzą sztywności geometrycznej, która utworzona jest przyjmując rozkład naprężeń w elementach wywołany obciążeniem konstrukcji pewną porównawczą wielkością obciążenia  $\mathbf{Q}^*$ . Przyjmuje się, że przykładane obciążenie  $\mathbf{Q}$  ma charakter proporcjonalny typu  $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Q}^*$ . Jeśli równanie (B.36) ma niezerowe rozwiązanie względem

$\mathbf{v}$ , to wielkość  $\lambda = \lambda_{cr}$  wyliczona na podstawie tego warunku pozwala stwierdzić, że  $\lambda_{cr} \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_{cr}$  prowadzi do wyboczenia analizowanej konstrukcji. W rozwijanym w ramach pracy systemie PSAP-T-NL problem własny postaci (B.36) rozwiązywany jest przy pomocy algorytmu iteracji odwrotnej [54].

Chcąc obliczyć wrażliwość krytycznego mnożnika obciążenia na parametry projektowe  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , należy zróżniczkować równanie (B.36) (zob. [51]). Otrzymujemy wtedy

$$[\mathbf{K} + \lambda_{cr} \mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*)] \frac{d\mathbf{v}}{dx_i} + \frac{d\lambda_{cr}}{dx_i} \mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*) \mathbf{v} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} + \lambda_{cr} \frac{d\mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*)}{dx_i} \right] \mathbf{v} \quad (\text{B.37})$$

Mnożąc lewostronnie powyższe równanie przez  $\mathbf{v}^T$ , wykorzystując symetrię macierzy geometrycznej i macierzy sztywności oraz wykorzystując równość (B.36), wzór na wrażliwość krytycznego mnożnika obciążenia przybiera postać

$$\frac{d\lambda_{cr}}{dx_i} = - \frac{\mathbf{v}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} + \lambda_{cr} \frac{d\mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*)}{dx_i} \right] \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*) \mathbf{v}}. \quad (\text{B.38})$$

Jak już wcześniej wspomniano (por. wzór (B.23)), w celu policzenia pochodnych macierzy geometrycznej  $d\mathbf{K}^g(\boldsymbol{\sigma}^*)/dx_i$  konieczne jest policzenie wrażliwości naprężeń  $d\boldsymbol{\sigma}^*/dx_i$  we wszystkich elementach rozpatrywanej konstrukcji. Analiza wrażliwości metodą układu sprzężonego wymaga w tym przypadku obliczenia  $n_e$  wektorów sprzężonych przemieszczeń  $\boldsymbol{\Lambda}$ , gdzie  $n_e$  jest liczbą prętów kratownicy.

## B.2. Wrażliwość w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych

Przyjęcie nieliniowej zależności pomiędzy odkształceniami, a gradientem przemieszczeń (tzw. modelu geometrycznie nieliniowego) wiąże się w ogólnym przypadku z koniecznością zastosowania metod przyrostowo-iteracyjnych dla określenia stanu równowagi konstrukcji. Rozpatrując typowy przyrost obciążenia od chwili  $t$  do  $t + \Delta t$  oraz typową iterację  $\omega$ , wektor sił nie zrównoważonych (residualnych)  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(\omega)}$ ,  $\omega = 0, 1, \dots$ , o wymiarze  $m \times 1$ , obliczony po  $\omega$  iteracjach Newtona-Raphsona ma postać

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(\omega)} = \mathbf{R}({}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega)}) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q} - \mathbf{F}({}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega)}), \quad (\text{B.39})$$

gdzie  $\mathbf{F}({}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega)})$  jest wektorem sił oddziaływania elementów na węzły, odpowiadającym przemieszczeniom  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega)}$ . Ze względu na liniowość związków fizycznych wektor sił residualnych jest funkcją przemieszczeń całkowitych  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega)}$  ponieważ w przeciwieństwie do np. problemów sprężysto-plastycznych rozpatrywane zagadnienie jest niezależne od ścieżki obciążenia. Chcąc obliczyć przyrost przemieszczeń  $\delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega+1)}$  rozwija się wektor (nieznanych) residuów odpowiadających iteracji  $\omega + 1$  w szereg Taylora w punkcie  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega)}$  i zakłada się, że poszukiwany przyrost przemieszczeń powoduje zerowanie się wektora  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(\omega+1)}$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(\omega+1)} \approx {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(\omega)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial \mathbf{q}} \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega+1)} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.40})$$



natomiast wrażliwość obliczona metodą układu sprzężonego (ASM) ma postać

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \mathbf{\Lambda}^T \left( \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}}{\partial x_i} - \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}}{\partial x_i} \right) \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{B.50})$$

$\begin{matrix} 1 \times m & m \times 1 & m \times 1 \end{matrix}$

gdzie  $\mathbf{\Lambda}$  jest wektorem sprzężonych przemieszczeń (por. (B.9) dla konstrukcji liniowych), będącym rozwiązaniem układu równań

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} \mathbf{\Lambda} = \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^T. \quad (\text{B.51})$$

$\begin{matrix} m \times m & m \times 1 & m \times 1 \end{matrix}$

Warto jest podkreślić kilka cech przedstawionych metod, które są istotne z punktu widzenia implementacji numerycznej (zob. [63]):

- styczna macierz sztywności, potrzebna do obliczenia pochodnych wektora przemieszczeń węzłowych (por. (B.48)), jest znana z rozwiązania problemu równowagi i nie wymaga budowania.
- ‘jawne’ pochodne wektorów  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}$  i  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ , tworzące wektor prawej strony równania (B.48), są znane.
- równanie (B.48) jest liniowe ze względu na  $d {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}/dx_i$  i nie wymaga rozwiązania iteracyjnego.
- analiza wrażliwości w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych nie wymaga podejścia przyrostowego, tzn. w celu obliczenia wrażliwości przemieszczeń w chwili  $t$  nie jest potrzebna znajomość wrażliwości w poprzednich chwilach czasowych, a co za tym idzie zajętość pamięci komputera nie zwiększa się w istotny sposób w porównaniu z analizą stanu równowagi.

### B.2.1. Element skończony kratownicy przestrzennej

W niniejszej pracy, do opisu geometrycznie nieliniowych konstrukcji prętowych przyjęto stacjonarny opis Lagrange’a (Total Lagrangian TL), w którym wszystkie niewiadome wielkości statyczne i kinematyczne odnosi się do początkowej (nieodkształconej) konfiguracji. Konsekwentnie, do opisu odkształceń i naprężeń używa się odpowiednio tensora Greena-Lagrange’a i drugiego tensora Pioli-Kirchhoffa. W prostym przypadku elementu kratownicy przestrzennej odkształcenie pręta dane jest wzorem

$$\varepsilon = \frac{{}^t l^2 - {}^0 l^2}{2 {}^0 l^2} = \frac{1}{{}^0 l^2} \left( \Delta z_1 \Delta q_1 + \Delta z_2 \Delta q_2 + \Delta z_3 \Delta q_3 + \frac{1}{2} (\Delta q_1^2 + \Delta q_2^2 + \Delta q_3^2) \right), \quad (\text{B.52})$$

gdzie  ${}^0 l$  jest początkową długością pręta,  ${}^t l$  jest długością w chwili  $t$ ,  $\Delta q_k = {}^t q_k^j - {}^t q_k^i$ ,  $k = 1, 2, 3$ , są różnicami przemieszczeń węzłów pręta (zob. rys. B.1), a  $\Delta z_k = {}^0 z_k^j - {}^0 z_k^i$ ,



$k = 1, 2, 3$ , różnicami współrzędnych węzłów w konfiguracji początkowej. Definiując następnie wektory

$$\Delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -\Delta z_1 \\ -\Delta z_2 \\ -\Delta z_3 \\ \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\Delta q_1 \\ -\Delta q_2 \\ -\Delta q_3 \\ \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.53})$$

styczna macierz sztywności elementu kratowego przyjmuje postać (zob. [15])

$$\mathbf{K}_e^{(T)}(t\mathbf{q}_e) = \mathbf{K}_e^{(T)\text{I}} + \mathbf{K}_e^{(T)\text{II}}(t\mathbf{q}_e) + \mathbf{K}_e^g(t\sigma(t\mathbf{q}_e)), \quad (\text{B.54})$$

gdzie  $t\mathbf{q}_e$  jest wektorem przemieszczeń węzłów elementu,  $\mathbf{K}_e^{(T)\text{I}}$  jest liniową macierzą sztywności (por. (B.11)) postaci

$$\mathbf{K}_e^{(T)\text{I}} = \frac{EA}{0l^3} \Delta \mathbf{z} \Delta \mathbf{z}^T, \quad (\text{B.55})$$

$\mathbf{K}_e^{(T)\text{II}}(t\mathbf{q}_e)$  jest macierzą wstępnych przemieszczeń daną jako

$$\mathbf{K}_e^{(T)\text{II}}(t\mathbf{q}_e) = \frac{EA}{0l^3} (\Delta \mathbf{z} \Delta \mathbf{q}^T + \Delta \mathbf{q} \Delta \mathbf{z}^T + \Delta \mathbf{q} \Delta \mathbf{q}^T), \quad (\text{B.56})$$

a  $\mathbf{K}_e^g(t\sigma(t\mathbf{q}_e))$  jest macierzą wstępnych naprężeń postaci

$$\mathbf{K}_e^g = \frac{t\sigma A}{0l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.57})$$

gdzie  $t\sigma$  jest naprężeniem w przecie. Wektor oddziaływania elementu na węzły (elementowy wektor sił wewnętrznych), obliczony w chwili  $t$  dany jest jako

$$\mathbf{F}_e(t\mathbf{q}_e) = \frac{t\sigma A}{0l} \begin{bmatrix} -\Delta z_1 - \Delta q_1 \\ -\Delta z_2 - \Delta q_2 \\ -\Delta z_3 - \Delta q_3 \\ \Delta z_1 + \Delta q_1 \\ \Delta z_2 + \Delta q_2 \\ \Delta z_3 + \Delta q_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.58})$$

Wprowadzając definicję uaktualnionych współrzędnych

$${}^t z_k^i = {}^0 z_k^i + t q_k^i, \quad {}^t z_k^j = {}^0 z_k^j + t q_k^j \quad k = 1, 2, 3, \quad (\text{B.59})$$

oraz wektor pomocniczy

$${}^t\Delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -(t z_1^j - t z_1^i) \\ -(t z_2^j - t z_2^i) \\ -(t z_3^j - t z_3^i) \\ t z_1^j - t z_1^i \\ t z_2^j - t z_2^i \\ t z_3^j - t z_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\Delta z_1 \\ -t\Delta z_2 \\ -t\Delta z_3 \\ t\Delta z_1 \\ t\Delta z_2 \\ t\Delta z_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.60})$$

macierz sztywności (B.54) wyrazić można w bardziej zwartej formie

$$\mathbf{K}_e^{(T)} = \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)} + \mathbf{K}_e^g, \quad (\text{B.61})$$

gdzie macierz  $\tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}$  jest postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)} &= \mathbf{K}_e^{(T)I} + \mathbf{K}_e^{(T)II} = \frac{EA}{0l^3} {}^t\Delta \mathbf{z} {}^t\Delta \mathbf{z}^T = \\ &= \frac{EA}{0l^3} \begin{bmatrix} {}^t\Delta z_1^2 & {}^t\Delta z_1 {}^t\Delta z_2 & {}^t\Delta z_1 {}^t\Delta z_3 & -{}^t\Delta z_1^2 & -{}^t\Delta z_1 {}^t\Delta z_2 & -{}^t\Delta z_1 {}^t\Delta z_3 \\ & {}^t\Delta z_2^2 & {}^t\Delta z_2 {}^t\Delta z_3 & -{}^t\Delta z_2 {}^t\Delta z_1 & -{}^t\Delta z_2^2 & -{}^t\Delta z_2 {}^t\Delta z_3 \\ & & {}^t\Delta z_3^2 & -{}^t\Delta z_3 {}^t\Delta z_1 & -{}^t\Delta z_3 {}^t\Delta z_2 & -{}^t\Delta z_3^2 \\ & & & {}^t\Delta z_1^2 & {}^t\Delta z_1 {}^t\Delta z_2 & {}^t\Delta z_1 {}^t\Delta z_3 \\ \text{sym.} & & & & {}^t\Delta z_2^2 & {}^t\Delta z_2 {}^t\Delta z_3 \\ & & & & & {}^t\Delta z_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Wektor sił wewnętrznych wyrażony przez współrzędne uaktualnione dany jest jako

$$\tilde{\mathbf{F}}_e = \frac{t\sigma A}{0l} {}^t\Delta \mathbf{z}. \quad (\text{B.63})$$

Obliczenie wrażliwości przemieszczeń węzłowych wymaga zróżniczkowania wektora sił wewnętrznych względem zmiennych projektowych. Po uwzględnieniu we wzorze (B.58) wyrażenia na odkształcenie pręta danego przez (B.52) wektor  $\mathbf{F}_e({}^t\mathbf{q}_e)$  przyjmuje postać

$$\mathbf{F}_e({}^t\mathbf{q}_e) = \frac{EA}{0l^3} \sum_{k=1}^3 (\Delta z_k \Delta q_k + \frac{1}{2} \Delta q_k^2) \begin{bmatrix} -\Delta z_1 - \Delta q_1 \\ -\Delta z_2 - \Delta q_2 \\ -\Delta z_3 - \Delta q_3 \\ \Delta z_1 + \Delta q_1 \\ \Delta z_2 + \Delta q_2 \\ \Delta z_3 + \Delta q_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.64})$$

Różniczkując powyższy wektor względem rozpatrywanych w pracy zmiennych dostajemy:

- pochodna względem modułu Younga materiału pręta  $E$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial E} = \frac{1}{E} \mathbf{F}_e \quad (\text{B.65})$$

- pochodna względem pola przekroju poprzecznego pręta  $A$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial A} = \frac{1}{A} \mathbf{F}_e \quad (\text{B.66})$$

- pochodne względem współrzędnych węzłów pręta  ${}^0z_k^i, {}^0z_k^j, k = 1, 2, 3$ .  
Poniżej podano pochodne trzech pierwszych wyrazów wektora:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial {}^0z_\alpha^i} = \frac{EA}{0l^5} ({}^0l^2 s + {}^t\Delta z_\alpha ({}^0l^2 \Delta q_\alpha - 3 s \Delta z_\alpha)) , \quad (\text{B.67a})$$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial {}^0z_\beta^i} = \frac{EA}{0l^5} {}^t\Delta z_\alpha ({}^0l^2 \Delta q_\beta - 3 s \Delta z_\beta) , \quad (\text{B.67b})$$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial {}^0z_\alpha^j} = -\frac{\partial F_\alpha}{\partial {}^0z_\alpha^i} , \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial {}^0z_\beta^j} = -\frac{\partial F_\alpha}{\partial {}^0z_\beta^i} , \quad (\text{B.67c})$$

$$\text{gdzie } s = \sum_{k=1}^3 (\Delta z_k \Delta q_k + \frac{1}{2} \Delta q_k^2) .$$

Indeksy  $\alpha$  i  $\beta$  należy wybierać (bez powtarzania) ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

Pochodne wektora (B.64) względem granicy plastyczności materiału pręta, jak również względem mnożnika obciążenia, są oczywiście równe zero.

Jak to zostanie pokazane w punkcie B.2.4, obliczenie wrażliwości krytycznego mnożnika obciążenia w przypadku utraty stateczności typu bifurkacyjnego wiąże się z policzeniem pochodnych stycznej macierzy sztywności (B.62) względem zmiennych projektowych oraz przemieszczeń węzłów elementu. Pochodne względem przemieszczeń węzłowych oblicza się wykorzystując zależności

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}}{\partial {}^tq_k^i} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}}{\partial {}^t\Delta z_k} , \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}}{\partial {}^tq_k^j} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}}{\partial {}^tq_k^i} \quad k = 1, 2, 3. \quad (\text{B.68})$$

Podobnie jak w przypadku macierzy (B.11) i (B.17) wystarczy zróżniczkować wyrazy z lewej górnej ćwiartki macierzy:

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^tq_\alpha^i} = -\frac{2EA}{0l^3} {}^t\Delta z_\alpha \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^tq_\alpha^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^tq_\alpha^i} \quad (\text{B.69a})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^tq_\beta^i} = \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^tq_\beta^j} = 0 \quad (\text{B.69b})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\alpha^i} = -\frac{EA}{0l^3} {}^t\Delta z_\beta \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\alpha^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\alpha^i} \quad (\text{B.69c})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\beta^i} = -\frac{EA}{0l^3} {}^t\Delta z_\alpha \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\beta^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\beta^i} \quad (\text{B.69d})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\gamma^i} = \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^tq_\gamma^j} = 0 \quad (\text{B.69e})$$

W powyższych wzorach za indeksy  $\alpha, \beta, \gamma$  należy podstawiać permutacje zbioru  $\{1, 2, 3\}$ . ‘Jawne’ (niezerowe) pochodne macierzy  ${}^t\tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}$  względem zmiennych projektowych, dane są następująco:

- pochodna względem modułu Younga materiału pręta  $E$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}}{\partial E} = \frac{1}{E} \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)} \quad (\text{B.70})$$

- pochodna względem pola przekroju poprzecznego pręta  $A$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)}}{\partial A} = \frac{1}{A} \tilde{\mathbf{K}}_e^{(T)} \quad (\text{B.71})$$

- pochodne względem współrzędnych węzłów pręta  ${}^0z_k^i, {}^0z_k^j, k = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^t z_\alpha^i} = \frac{EA}{0l^5} {}^t\Delta z_\alpha (3 {}^t\Delta z_\alpha \Delta z_\alpha - 2 {}^0l^2) \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^t z_\alpha^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^t z_\alpha^i} \quad (\text{B.72a})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^t z_\beta^i} = \frac{3EA}{0l^5} ({}^t\Delta z_\alpha)^2 \Delta z_\beta \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^t z_\beta^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{(T)}}{\partial {}^t z_\beta^i} \quad (\text{B.72b})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\alpha^i} = \frac{EA}{0l^5} {}^t\Delta z_\beta (3 {}^t\Delta z_\alpha \Delta z_\alpha - {}^0l^2) \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\alpha^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\alpha^i} \quad (\text{B.72c})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\beta^i} = \frac{EA}{0l^5} {}^t\Delta z_\alpha (3 {}^t\Delta z_\beta \Delta z_\beta - {}^0l^2) \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\beta^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\beta^i} \quad (\text{B.72d})$$

$$\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\gamma^i} = \frac{3EA}{0l^5} {}^t\Delta z_\alpha {}^t\Delta z_\beta \Delta z_\gamma \quad \frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\gamma^j} = -\frac{\partial \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(T)}}{\partial {}^t z_\gamma^i} \quad (\text{B.72e})$$

Podobnie jak w przypadku wzorów (B.69) za indeksy  $\alpha, \beta, \gamma$  przyjmuje się permutacje zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .

### B.2.2. Funkcja graniczna przemieszczeniowa

W przeciwieństwie do konstrukcji plastycznych, których zachowanie zależy od ścieżki obciążenia, analiza wrażliwości konstrukcji geometrycznie nieliniowych może być efektywnie przeprowadzona za pomocą metody układu sprzężonego. W celu policzenia wrażliwości funkcji przemieszczeniowej (B.3), wektor sprzężonych przemieszczeń  $\mathbf{\Lambda}$  wyliczany jest z równania (B.51), w którym wektor prawej strony  $\partial g / \partial \mathbf{q}$  jest identyczny jak w zagadnieniu liniowym i dany przez (B.24) natomiast macierz  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)}$  oznacza styczną macierz sztywności zbudowaną dla przemieszczeń  $\mathbf{q}$  odpowiadających obciążeniu całkowitemu  $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Q}^*$ , gdzie  $\lambda$  jest mnożnikiem obciążenia. Wrażliwość funkcji (B.3) na zmienne projektowe  $x_i$  typu moduł Younga, pole przekroju i współrzędne węzła oblicza się zatem ze wzoru (B.50) jako

$$\frac{dg}{dx_i} = -\mathbf{\Lambda}^T \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x_i}. \quad (\text{B.73})$$

Wrażliwość na zmianę granicy plastyczności materiału prętów  $\sigma^0$  wynosi zero, natomiast wrażliwość na mnożnik obciążenia wyraża się wzorem

$$\frac{dg}{d\lambda} = \mathbf{\Lambda}^T \frac{d\mathbf{Q}}{d\lambda} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{Q}^*. \quad (\text{B.74})$$

### B.2.3. Funkcja graniczna naprężeniowa / stateczności lokalnej

Uwzględniając w funkcji naprężeniowej (B.4) odkształcenie pręta dane wzorem (B.52) funkcja ta przyjmuje postać

$$g(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 1 - \frac{\text{sign}(\sigma_k) E_k}{{}^0l_k^2 \sigma_k^a(\mathbf{x})} \sum_{l=1}^3 (\Delta z_l \Delta q_l + \frac{1}{2} \Delta q_l^2), \quad (\text{B.75})$$

gdzie, tak jak w przypadku liniowym,  $\sigma_k$  jest naprężeniem w  $k$ -tym pręcie natomiast  ${}^0l_k$  długością pręta w konfiguracji początkowej. Funkcji (B.75) odpowiada następujący wektor pseudo-obciążenia

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\text{sign}(\sigma_k) E_k}{{}^0l_k^2 \sigma_k^a} \left[ \underbrace{0, \dots, 0, \overset{\text{stopnie swobody wężła } i}{\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3}, 0, \dots, 0}_{1 \times m}, \underbrace{-\Delta z_1, -\Delta z_2, -\Delta z_3, 0, \dots, 0}_{\text{stopnie swobody wężła } j} \right] \quad (\text{B.76})$$

Wzory na pochodne funkcji granicznej wynikające z jawnej zależności  $g$  od zmiennych projektowych są takie same jak w przypadku funkcji naprężeniowej w analizie konstrukcji liniowych (por. punkt B.1.3). Wrażliwość funkcji naprężeniowej na zmianę mnożnika obciążenia  $\lambda$  obliczana jest ze wzoru (B.74), w którym wektor  $\mathbf{\Lambda}$  jest rozwiązaniem układu sprzężonego (B.51) dla wektora pseudo-obciążenia danego przez (B.76).

### B.2.4. Funkcja graniczna stateczności globalnej

W przypadku konstrukcji geometrycznie nieliniowych utrata stateczności globalnej spowodowana być może bifurkacją stanu równowagi lub zjawiskiem przeskoku związanym z wystąpieniem na ścieżce stanów równowagi punktu granicznego (lokalnego maksimum obciążenia). Ogólnie można powiedzieć, że punkt  ${}^c\mathbf{q}$  jest punktem krytycznym (bifurkacji lub granicznym) jeśli w punkcie tym

$$\det {}^c\mathbf{K}^{(T)} = 0 \quad (\text{B.77})$$

lub równoważnie

$${}^c\mathbf{K}^{(T)} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.78})$$

gdzie  $\mathbf{v}$  jest wektorem własnym odpowiadającym zerowej wartości własnej macierzy  $\mathbf{K}^{(T)}$ . Istnieje wiele metod precyzyjnego wyznaczania punktu krytycznego. Spośród nich warto wymienić metodę układu rozszerzonego (zob. [126]), w której podstawowy układ równań metody elementów skończonych powiększany jest o równania  $\mathbf{K}^{(T)}(\mathbf{q}, \lambda) \mathbf{v} = \mathbf{0}$  stanowiące

ograniczenie dla przyrostu mnożnika obciążenia. Tak zmodyfikowany układ równań nieliniowych rozwiązywany jest w sposób iteracyjny dając w wyniku wektor przemieszczeń  ${}^c\mathbf{q}$ , krytyczny mnożnik obciążenia  $\lambda_{cr}$  oraz wektor własny  $\mathbf{v}$ . W niniejszej pracy do lokalizacji punktu krytycznego zastosowana została metoda bisekcji w połączeniu z metodą stałego promienia (arc-length method) [15]. Zaimplementowany algorytm bazuje na tym, iż przekroczenie punktu krytycznego objawia się zmianą znaku wyznacznika stycznej macierzy sztywności (pojawieniem się ujemnych wyrazów w diagonalnej macierzy  $\mathbf{D}$  otrzymywanej z dekompozycji  $\mathbf{LDL}^T$  Cholesky'ego). W takim przypadku krok przyrostowy, który 'wyprowadził' układ poza punkt krytyczny zostaje powtórzony ze zmniejszoną długością promienia. Algorytm ten, chociaż nie posiada zalety kwadratowej zbieżności metody układu rozszerzonego, jest łatwy w implementacji i okazał się wystarczająco efektywny w analizowanych w ramach pracy przykładach numerycznych.

W celu otrzymania wyrażenia na wrażliwość krytycznego mnożnika obciążenia, wzór (B.48) należy zapisać w punkcie  ${}^c\mathbf{q}$  uwzględniając proporcjonalny charakter obciążenia typu  ${}^c\mathbf{Q} = \lambda_{cr}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^*$

$${}^c\mathbf{K}^{(T)} \frac{d {}^c\mathbf{q}}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} [\lambda_{cr}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^*] - \frac{\partial {}^c\mathbf{F}}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.79})$$

Mnożąc lewostronnie powyższe równanie przez transponowany wektor własny  $\mathbf{v}^T$ , wykorzystując symetrię macierzy  ${}^c\mathbf{K}^{(T)}$  oraz warunek (B.78) otrzymuje się

$$\frac{d\lambda_{cr}}{dx_i} = \left( \mathbf{v}^T \frac{\partial {}^c\mathbf{F}}{\partial x_i} \right) \left( \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^* \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.80})$$

Ponieważ w przypadku punktu krytycznego typu bifurkacyjnego  $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^* = 0$  (zob. [123]), zatem powyższy wzór może być zastosowany jedynie do analizy wrażliwości krytycznego mnożnika obciążenia odpowiadającego punktowi granicznemu. Konieczne jest więc, aby po znalezieniu punktu krytycznego i rozwiązaniu zagadnienia własnego dla macierzy  ${}^c\mathbf{K}^{(T)}$  sprawdzić typ punktu krytycznego z warunku

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^* = \begin{cases} = 0 & \text{punkt bifurkacji} \\ \neq 0 & \text{punkt graniczny} \end{cases} \quad (\text{B.81})$$

Wzory na wrażliwość mnożnika  $\lambda_{cr}$  w przypadku bifurkacji stanu równowagi wymagają więc osobnego wyprowadzenia. Należy jednak podkreślić, że przedstawione wzory dotyczyć będą jedynie takich zagadnień, w których małe zaburzenie wartości zmiennej projektowej nie powoduje zmiany typu punktu krytycznego.

Zakładając liniowe zachowanie konstrukcji na przyroście  $[t, t + \Delta t]$ , gdzie  $t$  jest taką chwilą czasową, że odpowiadające jej przemieszczenia  ${}^t\mathbf{q}$  bezpośrednio poprzedzają punkt krytyczny  ${}^c\mathbf{q}$ , warunek (B.78) zapisany być może w następującej, przybliżonej postaci:

$$\left[ \tilde{\mathbf{K}}^{(T)}({}^t\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + \mathbf{K}^g({}^t\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + \Delta\lambda_{cr}(\mathbf{x})\mathbf{K}^g(\mathbf{q}^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \right] \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.82})$$

gdzie elementowe macierze  $\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}$  i  $\mathbf{K}^g$  zdefiniowane są w punkcie B.2.1, a  $\mathbf{K}^g(\mathbf{q}^*(\mathbf{x}), \mathbf{x})$  jest macierzą geometryczną, zbudowaną dla przemieszczeń będących rozwiązaniem układu liniowego postaci

$${}^t\mathbf{K}^{(T)}\mathbf{q}^* = {}^t\mathbf{Q}^*. \quad (\text{B.83})$$

Różniczkując równanie (B.82) względem zmiennych projektowych  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  otrzymuje się

$$\left( \frac{d {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}}{dx_i} + \frac{d {}^t\mathbf{K}^g}{dx_i} + \frac{d\Delta\lambda_{cr}}{dx_i} {}^*\mathbf{K}^g + \Delta\lambda_{cr} \frac{d {}^*\mathbf{K}^g}{dx_i} \right) \mathbf{v} + {}^c\mathbf{K}^{(T)} \frac{d\mathbf{v}}{dx_i} = \mathbf{0} \quad (\text{B.84})$$

gdzie

$${}^*\mathbf{K}^g = {}^t\mathbf{K}^g(\mathbf{q}^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}). \quad (\text{B.85})$$

Uwzględniając proporcjonalny charakter obciążenia oraz zakładając, że  ${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\lambda\boldsymbol{\sigma}^*$ , gdzie  $\boldsymbol{\sigma}^*$  oznacza naprężenia w konstrukcji wywołane obciążeniem  $\mathbf{Q}^*$ , równanie (B.84) można zapisać jako

$$\left( \frac{d {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}}{dx_i} + \frac{d\lambda_{cr}}{dx_i} {}^*\mathbf{K}^g + \lambda_{cr} \frac{d {}^*\mathbf{K}^g}{dx_i} \right) \mathbf{v} + {}^c\mathbf{K}^{(T)} \frac{d\mathbf{v}}{dx_i} = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.86})$$

Podobnie jak w przypadku równania (B.79), mnożąc lewostronnie powyższe równanie przez  $\mathbf{v}^T$ , wykorzystując symetrię  ${}^c\mathbf{K}^{(T)}$  oraz warunek (B.78) dostajemy

$$\frac{d\lambda_{cr}}{dx_i} = \frac{\mathbf{v}^T \left( \frac{d {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}}{dx_i} + \lambda_{cr} \frac{d {}^*\mathbf{K}^g}{dx_i} \right) \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T {}^*\mathbf{K}^g \mathbf{v}} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.87})$$

Występująca w powyższym wzorze pochodna macierzy  ${}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}$  po rozpisaniu przyjmuje postać

$$\frac{d {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}}{dx_i} = \frac{\partial {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dx_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{B.88})$$

gdzie wyrażenia na pochodne  $\partial {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}/\partial \mathbf{x}$  oraz  $\partial {}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}/\partial \mathbf{q}$  dla elementu skończonego kratownicy dane są odpowiednio przez (B.70)–(B.72) i (B.69). Jak widać z powyższego wzoru, konieczne jest także policzenie wrażliwości wszystkich przemieszczeń. We wzorze (B.87) występuje również pochodna macierzy geometrycznej  ${}^*\mathbf{K}^g$ . Dla elementu kratowego macierz ta jest postaci (por. (B.57))

$${}^*\mathbf{K}_e^g = \frac{\sigma^* A}{0l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^* A}{0l} \mathbf{P}, \quad (\text{B.89})$$

gdzie naprężenie w pręcie  $\sigma^*$  dane jest jako

$$\sigma^* = \frac{E}{0l^2} \sum_{l=1}^3 (\Delta z_l \Delta q_l^* + \frac{1}{2} \Delta q_l^{*2}), \quad (\text{B.90})$$

a przez  $\Delta q_l^* = q_l^{*j} - q_l^{*i}$ ,  $l = 1, 2, 3$  oznaczono różnice przemieszczeń węzłów elementu, otrzymanych z rozwiązania układu liniowego (B.83). Podobnie jak w przypadku macierzy  ${}^t\tilde{\mathbf{K}}^{(T)}$ , pochodne  $d^*\mathbf{K}^g/dx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  dane są wzorem

$$\frac{d^*\mathbf{K}^g}{dx_i} = \frac{\partial^*\mathbf{K}^g}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^*\mathbf{K}^g}{\partial q_k^*} \frac{dq_k^*}{dx_i}. \quad (\text{B.91})$$

Pochodne  $d\mathbf{q}^*/d\mathbf{x}$  otrzymuje się rozwiązując liniowy problem analizy wrażliwości postaci

$${}^t\mathbf{K}^{(T)} \frac{d\mathbf{q}^*}{dx_i} = -\frac{\partial^t\mathbf{K}^{(T)}}{\partial x_i} \mathbf{q}^* \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.92})$$

Niezerowe, 'jawne' pochodne macierzy  ${}^*\mathbf{K}_e^g$  dane są następująco:

$$\frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial q_l^{*i}} = -\frac{E(\Delta z_l + \Delta q_l^*)}{0l^2 \sigma^*} {}^*\mathbf{K}_e^g \quad \frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial q_l^{*j}} = -\frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial q_l^{*i}} \quad l = 1, 2, 3. \quad (\text{B.93})$$

$$\frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial A} = \frac{1}{A} {}^*\mathbf{K}_e^g \quad (\text{B.94})$$

$$\frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial E} = \frac{1}{E} {}^*\mathbf{K}_e^g \quad (\text{B.95})$$

$$\frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial z_l^i} = \frac{A}{0l^3} [3\sigma^* \Delta z_l - E \Delta q_l^*] \mathbf{P} \quad \frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial z_l^j} = -\frac{\partial^*\mathbf{K}_e^g}{\partial z_l^i} \quad l = 1, 2, 3. \quad (\text{B.96})$$



## Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

### Rozkład normalny

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (gaussowskiego) jednej zmiennej ma postać

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x - X^0)^2}{2\sigma_X^2}\right], \quad (\text{C.1})$$

gdzie  $X^0$  i  $\sigma_X$  są odpowiednio, wartością średnią oraz odchyleniem standardowym zmiennej  $X$ . Te dwa parametry w sposób jednoznaczny definiują rozkład normalny, który oznacza się czasem  $N(X^0, \sigma_X)$ . Wygodną alternatywą dla opisu zmiennej losowej przy pomocy rozkładu (C.1) jest zdefiniowanie standaryzowanej zmiennej losowej

$$Y = \frac{X - X^0}{\sigma_X}, \quad (\text{C.2})$$

dla której  $Y^0 = 0$  i  $\sigma_Y = 1$  oraz wprowadzenie standardowego rozkładu normalnego

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (\text{C.3})$$

Dystrybuanta rozkładu standardowego dana jest jako

$$\Phi(y) = F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt \quad (\text{C.4})$$

W przypadku  $n$  wymiarowego wektora zmiennych losowych  $\mathbf{X}$  łączna gęstość rozkładu prawdopodobieństwa ma postać

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_{\mathbf{X}}}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{X}^0)^T \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{X}^0) \right], \quad (\text{C.5})$$

gdzie  $\mathbf{X}^0$  jest wektorem wartości średnich, a  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$  macierzą kowariancji postaci

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

W powyższej macierzy  $\text{Var}(X_i) = \sigma_{X_i}^2$  oznacza wariancję zmiennej  $X_i$ , a kowariancja zmiennych  $X_i$  oraz  $X_j$  zdefiniowana jest następująco:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[(X_i - X_i^0)(X_j - X_j^0)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - X_i^0)(x_j - X_j^0) f_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

gdzie  $f_{X_i X_j}(x_i, x_j)$  jest brzegowym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa postaci

$$f_{X_i X_j}(x_i, x_j) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-2} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n. \quad (\text{C.8})$$

Rozkład normalny jest najważniejszym rozkładem w teorii prawdopodobieństwa (zob. [5]). Jedną z istotnych jego zalet jest to, że każda liniowa kombinacja niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Odgrywa on także fundamentalną rolę w analizie niezawodności. Przyjmując jednak, że zmienne losowe opisujące problem niezawodnościowy są typu gaussowskiego należy pamiętać, iż rozkład ten daje niezerowe wartości prawdopodobieństwa dla ujemnych realizacji zmiennej losowej. Można więc używać go do modelowania wielkości losowych nieujemnych ze swej fizycznej natury, jedynie przy założeniu, że prawdopodobieństwo przyjmowania przez nie wartości mniejszych od zera jest pomijalnie małe. W pracy rozkład normalny przyjmowano do opisu losowości położenia węzłów konstrukcji, jak również losowości mnożnika obciążeń stałych. Obciążenia stałe działające na konstrukcje generowane są jako suma wielu obciążeń pochodzących najczęściej od ciężaru własnego elementów konstrukcji. Zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym do opisu takiego obciążenia można użyć rozkładu normalnego.

### Rozkład logarytmiczno-normalny

Rozkład logarytmiczno-normalny jest rozkładem zmiennej losowej  $X = e^Y$ , gdzie  $Y$  jest normalną zmienną losową o parametrach  $Y^0$  i  $\sigma_Y$ . Ponieważ  $Y = \ln(X)$  ma rozkład

$N(Y^0, \sigma_Y)$ , to dystrybuanta rozkładu logarytmiczno-normalnego jest postaci

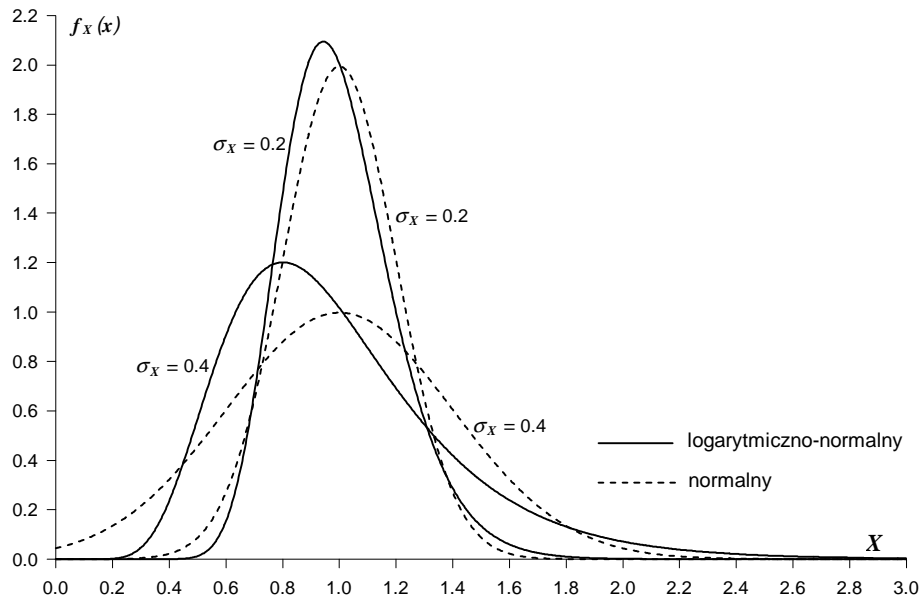
$$F_X(x) = \Phi \left[ \frac{\ln(x) - Y^0}{\sigma_Y} \right]; \quad x > 0, \quad (\text{C.9})$$

gdzie funkcja  $\Phi(\cdot)$  dana jest wzorem (C.4). Funkcja gęstości rozkładu zmiennej  $X$  wyrażona przez parametry rozkładu zmiennej  $Y$  dana jest jako

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x \sigma_Y} \exp \left[ -\frac{(\ln(x) - Y^0)^2}{2\sigma_Y^2} \right]; \quad x > 0, \quad (\text{C.10})$$

a wartość średnia i odchylenie standardowe mają postać

$$X^0 = \exp \left( Y^0 + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \right), \quad \sigma_X = \left[ \exp(2Y^0 + \sigma_Y^2) (\exp(\sigma_Y^2) - 1) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.11})$$



Rys. C.1. Funkcje gęstości rozkładu normalnego i logarytmiczno-normalnego dla  $X^0 = 1$

Korzystając z tego, że mediana rozkładu (C.10) równa jest  $\hat{X} = \exp(Y^0)$  oraz wprowadzając logarytmiczny współczynnik zmienności, dany jako

$$\delta_X = \sqrt{\ln(1 + \nu_X^2)}, \quad (\text{C.12})$$

gdzie  $\nu_X$  jest współczynnikiem zmienności zmiennej  $X$ , można wzory (C.9)–(C.11) wyrazić w innej, często spotykanej postaci

$$F_X(x) = \Phi \left[ \frac{\ln(x) - \ln(\hat{X})}{\delta_X} \right]; \quad x > 0, \quad (\text{C.13})$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x \delta_X} \exp \left[ -\frac{(\ln(x) - \ln(\hat{X}))^2}{2\delta_X^2} \right]; \quad x > 0, \quad (\text{C.14})$$

$$X^0 = \hat{X} \exp\left(\frac{\delta_X^2}{2}\right), \quad \sigma_X = \hat{X} \exp\left(\frac{\delta_X^2}{2}\right) \sqrt{\exp(\delta_X^2) - 1}. \quad (\text{C.15})$$

W przeciwieństwie do rozkładu normalnego, zmienna losowa typu logarytmiczno-normalnego może przyjmować jedynie wartości dodatnie. W pracy rozkład ten stosowany jest najczęściej do opisu losowych parametrów materiałowych, pól przekrojów prętów oraz mnożników niektórych obciążeń. Na rysunku C.1 porównano wykresy rozkładów normalnego i logarytmiczno-normalnego dla  $X^0 = 1$  i odchyłeń standardowych równych odpowiednio 0.2 i 0.4.

### Rozkład Gumbela

Rozkład Gumbela należy do grupy tzw. rozkładów maksimum I typu. Opisuje on rozkład prawdopodobieństwa zmiennej  $X$  będącej maksimum  $n$  niezależnych zmiennych losowych  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  jednakowego typu, których funkcja rozkładu prawdopodobieństwa dąży eksponencjalnie do 0 przy  $y \rightarrow \infty$  (np. rozkład normalny). Dla  $n \rightarrow \infty$  otrzymuje się postać funkcji gęstości rozkładu Gumbela

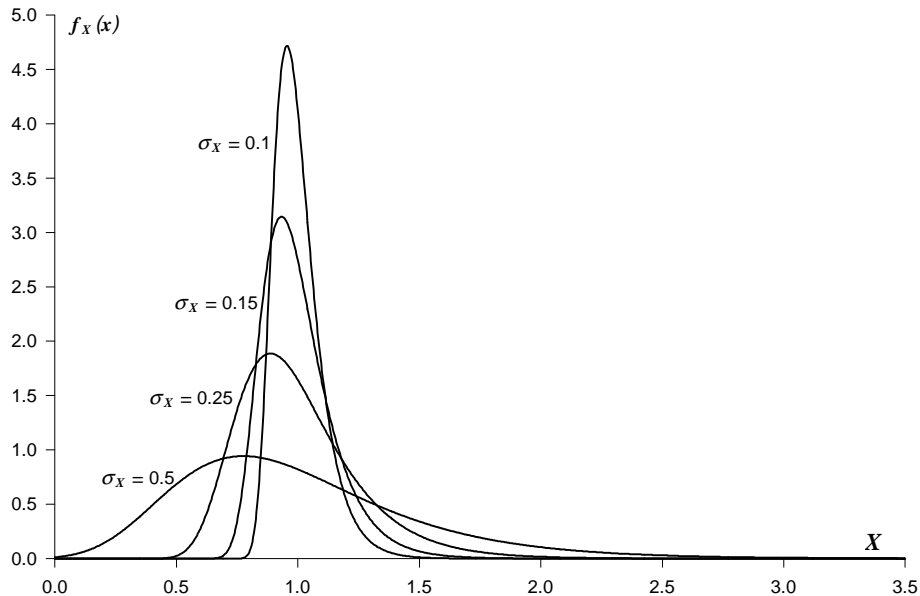
$$f_X(x) = \alpha \exp(-\alpha(x - u) - \exp(-\alpha(x - u))); \quad -\infty < x < \infty, \quad (\text{C.16})$$

gdzie  $u$  i  $\alpha > 0$  są parametrami. Dystrybuanta tego rozkładu dana jest jako

$$F_X(x) = \exp(-\exp(-\alpha(x - u))). \quad (\text{C.17})$$

Wartość średnia oraz odchylenie standardowe wyrażają się wzorami

$$X^0 = u + \frac{0.5772}{\alpha}, \quad \sigma_X = \frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha}. \quad (\text{C.18})$$



Rys. C.2. Funkcje gęstości rozkładu Gumbela dla  $X^0 = 1$

Rozkład Gumbela stosowany jest najczęściej do opisu zmienności maksymalnych wartości obciążeń występujących w rozpatrywanym okresie czasu, np. rocznych maksimum parcia wiatru (zob. [3, 90]). Na rysunku C.2 przedstawiono wykresy funkcji gęstości rozkładu Gumbela dla  $X^0 = 1$  i odchyłeń standardowych równych odpowiednio 0.1, 0.15, 0.25 i 0.5.

## Rozkład Frecheta

Rozkład Frecheta jest rozkładem maksimów II typu. Podobnie jak rozkład Gumbela stosowany jest on często w opisie maksimów obciążeń zmiennych działających na konstrukcję. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Frecheta ma postać

$$f_X(x) = \frac{k}{u} \left(\frac{u}{x}\right)^{k+1} \exp\left[-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right]; \quad 0 < x < \infty, \quad (\text{C.19})$$

gdzie  $u > 0$  i  $k > 2$  są parametrami rozkładu, a dystrybuanta dana jest wzorem

$$F_X(x) = \exp\left[-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right]; \quad 0 < x < \infty. \quad (\text{C.20})$$

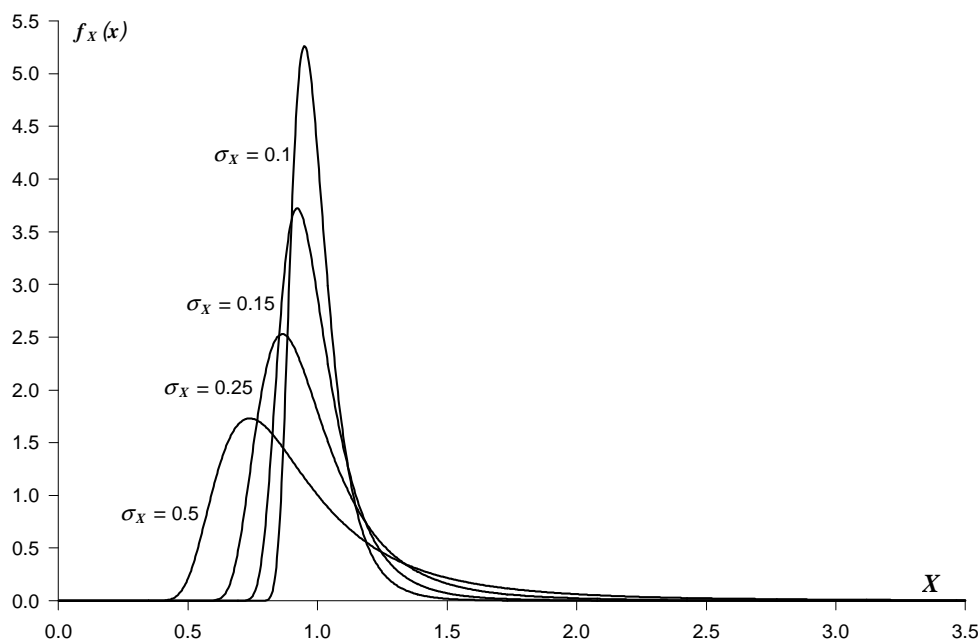
Wartość średnia oraz odchylenie standardowe dane są następująco:

$$X^0 = u\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad \sigma_X = u\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.21})$$

gdzie  $\Gamma(\cdot)$  jest funkcją gamma Eulera postaci

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (\text{C.22})$$

Rysunek C.3 przedstawia kilka przykładowych rozkładów Frecheta o wartości średniej  $X^0 = 1$  i różnych odchyleniach standardowych. Można spostrzec, że analogiczne rozkłady Gumbela (por. rys.C.2) dają większy rozrzut zmiennej losowej niż rozkłady Frecheta.



Rys. C.3. Funkcje gęstości rozkładu Frecheta dla  $X^0 = 1$

### Rozkład Weibulla

Rozkład Weibulla jest rozkładem minimów III typu. Często stosowany jest do opisu losowych parametrów materiałowych. Tzw. 3-parametrowy rozkład Weibulla pozwala na wprowadzenie dolnego ograniczenia zmienności zmiennej losowej,  $\epsilon$ . Funkcja gęstości tego rozkładu zdefiniowana jest jako

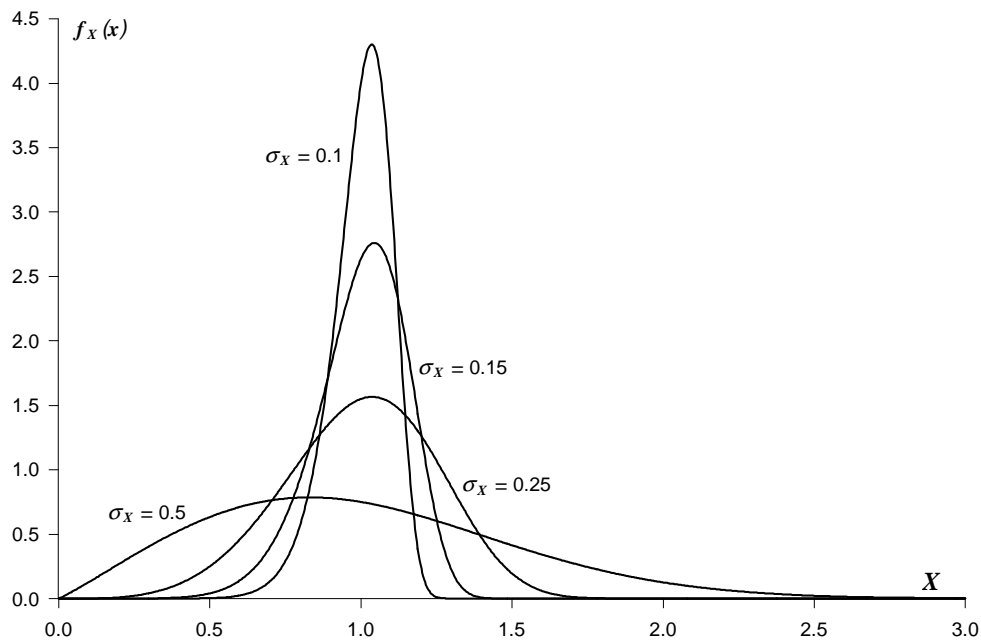
$$f_X(x) = \frac{k}{u - \epsilon} \left( \frac{x - \epsilon}{u - \epsilon} \right)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{x - \epsilon}{u - \epsilon} \right)^k \right]; \quad \epsilon \leq x < \infty, \quad (\text{C.23})$$

gdzie  $u > \epsilon \geq 0$  oraz  $k > 1$ . Dystrybuanta, wartość średnia oraz odchylenie standardowe wyrażają się wzorami

$$F_X(x) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - \epsilon}{u - \epsilon} \right)^k \right]; \quad \epsilon \leq x < \infty, \quad (\text{C.24})$$

$$X^0 = \epsilon + (u - \epsilon) \Gamma \left( 1 + \frac{1}{k} \right), \quad \sigma_X = (u - \epsilon) \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{k} \right) - \Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.25})$$

Poniżej, na rysunku C.4 pokazano przykładowe wykresy funkcji rozkładu Weibulla otrzymane dla  $X^0 = 1$  i  $\epsilon = 0$ .



Rys. C.4. Funkcje gęstości rozkładu Weibulla dla  $X^0 = 1$  i  $\epsilon = 0$

---

# Literatura

---

1. T. Abdo, R. Rackwitz. *Reliability of uncertain structural systems*. w: *Proc. Finite Elements in Engineering Applications*, 161–176, Stuttgart, 1990. INTES GmbH.
2. J.S. Arora. *Introduction to Optimum Design*. McGraw-Hill, 1989.
3. G. Augusti, A. Baratta, F. Casciati. *Probabilistic Methods in Structural Engineering*. Chapman and Hall, 1984.
4. P. Bjerager, S. Krenk. *Parametric sensitivity in first order reliability theory*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 115:1577–1582, 1989.
5. D. Bobrowski. *Probabilistyka w Zastosowaniach Technicznych*. WNT, 1986.
6. W. Bogucki, M. "Zyburtowicz. *Tablice do Projektowania Konstrukcji Stalowych, Wyd. IV*. Arkady, 1976.
7. D. Bojczuk. *Analiza wra"zliwo"sci spr"e"zystych konstrukcji pr"etowych i belkowych*. *Rozprawy In"zynierskie*, 35:171–204, 1987.
8. D. Bojczuk, Z. Mr"oz. *Sensitivity analysis for non-linear beams and frames*. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 32:867–886, 1994.
9. A. Borri, E. Speranzini. *Structural reliability analysis using a standard deterministic finite element code*. *Structural Safety*, 19:361–382, 1997.
10. K. Breitung. *Asymptotic approximations for multinormal integrals*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 110:357–366, 1984.
11. C.G. Bucher, U. Bourgund. *A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems*. *Structural Safety*, 7:57–66, 1990.
12. *COMREL-TI: User's manual*. RCP GmbH, Barrer Strasse 48, Munich, Germany, 1992.
13. C.A. Cornell. *A probability-based structural code*. *Journal of American Concrete Institute*, 66:974–985, 1969.
14. *COSSAN: Computational Stochastic Structural Analysis - User's Manual*. Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Austria, 1996.

15. M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials*. Wiley, 1991.
16. H.J. Dagher, Q. Lu, A.H. Peyrot. *Reliability of transmission structures including nonlinear effects*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 124:966–973, 1998.
17. A. Der Kiureghian. *Measures of structural safety under imperfect states of knowledge*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 115:1119–1140, 1989.
18. A. Der Kiureghian, T. Dakessian. *Multiple design points in first and second-order reliability*. Structural Safety, 20:37–49, 1998.
19. A. Der Kiureghian, J.-B. Ke. *Finite-element based reliability analysis of frame structures*. w: Proc. 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, Kobe, Japan, Part I, 395–404, 1985.
20. A. Der Kiureghian, J.-B. Ke. *The stochastic finite element method in structural reliability*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 112:85–104, 1986.
21. A. Der Kiureghian, H.-Z. Lin, S.-J. Hwang. *Second-order reliability approximations*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 113:1208–1225, 1987.
22. A. Der Kiureghian, P.-L. Liu. *Structural reliability under incomplete probability information*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 112:85–104, 1986.
23. A. Der Kiureghian, E. Polak. *Reliability-based optimal structural design: a decoupled approach*. w: A.S. Nowak (ed.), *Reliability and Optimization of Structural Systems, Proc. 8th IFIP WG 7.5 Conf., Cracow, 11–13 May 1998*, 197–205. The University of Michigan, Ann Arbor, 1998.
24. O. Ditlevsen. *Structural reliability codes for probabilistic design - a debate paper based on elementary reliability and decision analysis concepts*. Structural Safety, 19:253–270, 1997.
25. O. Ditlevsen, H.O. Madsen. *Proposal for a code for the direct use of reliability methods in structural design*. Working document, Joint Committee on Structural Safety (JCSS), Zürich, 1989.
26. O. Ditlevsen, H.O. Madsen. *Structural Reliability Methods*. Wiley, 1996.
27. O. Ditlevsen, Bjerager P. *Methods of structural system reliability*. Structural Safety, 3:195–229, 1986.
28. K. Doliński. *First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: critical review and alternative approach*. Structural Safety, 1:211–231, 1983.
29. K. Doliński. *Importance sampling techniques in reliability calculations*. Prace IPPT, 37, 1988.
30. K. Doliński. *Stochastyczny model wzrostu szczeliny zmiennej*. Prace IPPT, 43, 1992.
31. D.C. Dowson, A. Wragg. *Maximum entropy distributions having prescribed first and second moments*. IEEE Transactions on Information Theory, 19:689–693, 1973.



- 
32. K. El-Tawil, M. Lemaire, J.-P. Muzeau. *Reliability method to solve mechanical problems with implicit limit states*. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11–13 September 1991*, 181–190. Springer-Verlag, 1992.
  33. B.R. Ellingwood. *Probability-based codified design: past accomplishments and future challenges*. *Structural Safety*, 13:159–176, 1994.
  34. I. Enevoldsen. *Reliability-based optimization as an information tool*. *Mechanics of Structures and Machines*, 22:117–135, 1994.
  35. I. Enevoldsen, J.D. Sørensen. *Strategies for optimal design of structural systems*. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11–13 September 1991*, 191–206. Springer-Verlag, 1992.
  36. I. Enevoldsen, J.D. Sørensen. *Reliability-based optimization of series systems of parallel systems*. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 119:1069–1084, 1993.
  37. I. Enevoldsen, J.D. Sørensen. *Decomposition techniques and effective algorithms in reliability-based optimization*. w: P.D. Spanos (ed.), *Computational Stochastic Mechanics*, 149–156. Balkema, 1995.
  38. I. Enevoldsen, J.D. Sørensen, G. Sigurdsson. *Reliability-based shape optimization using stochastic finite element method*. w: A. Der Kiureghian, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '90, Proc. 3rd WG 7.5 IFIP Conf., Berkeley, 26–28 March 1990*, 75–88, Berlin, 1991.
  39. S.P. Engelstad, J.N. Reddy. *Probabilistic nonlinear finite element analysis of composite structures*. *AIAA Journal*, 31:362–369, 1993.
  40. B. Fiessler, H.-J. Neumann, R. Rackwitz. *Quadratic limit states in structural reliability*. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 105:661–676, 1979.
  41. Z. Fortuna, B. Macukow, J. W"asowski. *Metody Numeryczne*. WNT, 1993.
  42. D.M. Frangopol. *Interactive reliability-based structural optimization*. *Computers and Structures*, 19:559–563, 1984.
  43. D.M. Frangopol. *Multicriteria reliability-based structural optimization*. *Structural Safety*, 3:23–28, 1985.
  44. A.M. Freudenthal. *Safety and probability of structural failure*. *Transactions, ASCE*, 121:1337–1375, 1956.
  45. T.V. Galambos. *System reliability and structural design*. *Structural Safety*, 7:101–108, 1990.
  46. M. Gasser, G.I. Schuëller. *Reliability-based optimization of structural systems*. *Mathematical Methods of Operations Research*, 46:287–307, 1997.

47. M. Gasser, G.I. Schuëller. *Some basic principles of reliability-based optimization (RBO) of structures and mechanical components*. w: K. Marti, P. Kall (eds.), *Stochastic Programming Methods and Technical Applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 458*, 80–103. Springer Verlag, 1998.
48. P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, 1981.
49. H.S. Gopalakrishna, E. Donaldson. *Practical reliability analysis using a general purpose finite element program*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 10:75–87, 1991.
50. M.A. Gutiérrez, J. Carmeliet, R. De Borst. *Finite element reliability methods using DIANA*. w: G.M.A. Kusters, M.A.N. Hendriks (eds.), *Proc. of the First International DIANA Conference on Computational Mechanics, Delft, The Netherlands, 24–25 October 1994*, 255–263. Kluwer Academic Publishers, 1994.
51. R.T. Haftka, Z. Gürdal. *Elements of Structural Optimization*. Kluwer, 1992.
52. M.E. Harr. *Reliability-Based Design in Civil Engineering*. McGraw-Hill, 1987.
53. A.M. Hasofer, N.C. Lind. *Exact and invariant second moment code format*. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 100:111–121, 1974.
54. T.D. Hien, H.X. Hung. *Ocena efektywności numerycznej algorytmu analizy stateczności konstrukcji za pomocą programu POLSAP*. *Mechanika i Komputer*, 10:139–167, 1991.
55. M. Hohenbichler, R. Rackwitz. *Non-normal dependent vectors in structural safety*. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 107:1227–1238, 1981.
56. M. Hohenbichler, R. Rackwitz. *Sensitivity and importance measures in structural reliability*. *Civil Engineering Systems*, 3:203–209, 1986.
57. M. Hohenbichler, R. Rackwitz. *Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling*. *Journal of the Engineering Mechanics, ASCE*, 114:2195–2199, 1988.
58. *ISPUD: Importance Sampling Using Design Points - User's Manual*. Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Austria, 1997.
59. S. Jendo, J. Putresza. *Multicriteria optimization of elasto-plastic bar structures*. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11–13 September 1991*, 240–249. Springer-Verlag, 1992.
60. S. Jendo, J. Putresza. *Multicriterion reliability-based optimization of bar structures by stochastic programming*. *Archives of Civil Engineering*, 42:3–17, 1996.
61. M.R. Khalessi, Y.-T. Wu, T.Y. Torng. *Most-probable-point-locus reliability method in standard normal space*. w: T.H. Service (ed.), *Reliability, Stress Analysis and Failure Prevention, Proc. 9th Biennial Conf. on Reliability Stress Analysis and Failure Prevention, Miami, Florida, USA, September 1991*, 15–20. ASME Trans, DE-Vol 30, 1991.
62. M. Kleiber. *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. PWN Warszawa-Poznań, 1989.

- 
63. M. Kleiber, H. Antúnez, T.D. Hien, P. Kowalczyk. *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics; Theory and Finite Element Computations*. Wiley, 1997.
64. M. Kleiber, H. Antúnez, P. Kowalczyk, R. Stocki. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics and heat transfer with applications in reliability, optimization and stochastic FEM*. w: *Proc. ECCM '99 31 August – 3 September 1999*,. na CD-ROM, 1999.
65. M. Kleiber, T.D. Hien. *The Stochastic Finite Element Method*. Wiley, 1992.
66. M. Kleiber, A. Siemaszko, R. Stocki. *Interactive stability-oriented reliability-based design optimization*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168:243–253, 1999.
67. M. Kleiber, C. Woźniak. *Nonlinear Mechanics of Structures*. Kluwer - PWN, 1991.
68. N. Kogiso, S. Shao, Y. Murotsu. *Reliability-based optimization of symmetric laminated composite plate subject to buckling load*. w: *Proc. 19th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Kyoto, Japan*, 207–214, 1996.
69. N. Kuschel, R. Rackwitz. *Two basic problems in reliability-based structural optimization*. *Mathematical Methods of Operations Research*, 46:309–333, 1997.
70. N. Kuschel, R. Rackwitz. *Structural optimization under time-variant reliability constraints*. w: A.S. Nowak (ed.), *Reliability and Optimization of Structural Systems, Proc. 8th IFIP WG 7.5 Conf., Cracow, 11–13 May 1998*, 27–38. The University of Michigan, Ann Arbor, 1998.
71. N. Kuschel, R. Rackwitz, A. Pieracci. *Multiple  $\beta$ -points in structural reliability*. w: P.D. Spanos (ed.), *Computational Stochastic Mechanics*, 181–190. Balkema, 1999.
72. J-C. Lee, A.H-S. Ang. *Finite element fracture reliability of stochastic structures*. *Structural Engineering and Mechanics*, 3:1–10, 1995.
73. C.-C. Li, A. Der Kiureghian. *Optimal discretization of random fields*. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 119:1136–1154, 1993.
74. P.-L. Liu, A. Der Kiureghian. *Optimization algorithms for structural reliability*. *Structural Safety*, 9:161–177, 1991.
75. P.-L. Liu, A. Der Kiureghian. *Finite element reliability of geometrically nonlinear uncertain structures*. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 117:1806–1825, 1992.
76. P.-L. Liu, H.-Z. Lin, A. Der Kiureghian. *CALREL user manual*. Report No. UCB/SEMM-89/18, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1989.
77. X. Lu, R.V. Grandhi. *ASTROS for reliability-based multidisciplinary structural analysis and optimization*. *Computers and Structures*, 62:737–745, 1997.
78. M. "Lubi"nski, A. Filipowicz, W. "Z"o"ltowski. *Konstrukcje Metalowe, cz. I*. Arkady, 1986.
79. H.O. Madsen. *Omission sensitivity factors*. *Structural Safety*, 5:35–45, 1988.

80. H.O. Madsen, P. Friis Hansen. *A comparison of some algorithms for reliability based structural optimization and sensitivity analysis*. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11-13 September 1991*, 443-451. Springer-Verlag, 1992.
81. H.O. Madsen, S. Krenk, Lind N.C. *Methods of Structural Safety*. Prentice-Hall, 1986.
82. S. Mahadevan, S. Mehta. *Dynamic reliability of large frames*. *Computers and Structures*, 47:57-67, 1993.
83. H.G. Matthies, C.E. Brenner, C.G. Bucher, C. Guedes Soares. *Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids*. *Structural Safety*, 19:283-336, 1997.
84. G. Maymon. *Direct computation of the design point of a stochastic structure using a finite element code*. *Structural Safety*, 14:185-202, 1994.
85. R.E. Melchers. *Simulation in time-invariant and time-variant reliability problems*. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11-13 September 1991*, 39-82. Springer-Verlag, 1992.
86. R.E. Melchers. *Structural Reliability Analysis and Predictions, 2nd Ed.* Wiley, 1999.
87. H.R. Millwater, Y.T. Yu, J.B. Dias, R.C. McClung, S.T. Raveendra, B.H. Thacker. *The NESSUS software system for probabilistic structural analysis*. w: A.H-S. Ang, M. Shinozuka, G.I. Schuëller (eds.), *Proc. International Conference on Structural Safety and Reliability*, 2283-2290. ASCE, 1990.
88. Z. Mr"oz, D. Bojczuk. *Sensitivity analysis of truss and frame structures in critical states*. *Mechanics of Structures and Machines*, 24:105-134, 1996.
89. Y. Murotsu, M. Kishi, H. Okada, M. Yonezawa, K. Taguchi. *Probabilistically optimum design of frame structures*. w: P. Thoft-Christensen (ed.), *Proc. 11th IFIP Conf. on System Modelling and Optimization*, 545-554. Springer-Verlag, 1984.
90. J.M. Murzewski. *Niezawodno"s"c konstrukcji in"zyniarskich*. Arkady, 1989.
91. X.Q. Peng, L. Geng, W. Liyan, G.R. Liu, K.Y. Lam. *A stochastic finite element method for fatigue reliability analysis of gear teeth subjected to bending*. *Computational Mechanics*, 21:253-261, 1998.
92. E. Postek, T.D. Hien. *On the application of the sensitivity analysis to the design of spatial bar structures*. *Archives of Civil Engineering*, 38:17-33, 1992.
93. M.J.D. Powell. *A fast algorithm for nonlinearity constrained optimization calculations*. w: G.A. Watson (ed.), *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, 1978.
94. *PROBAN: The Probabilistic Analysis Program Manuals*. Reports of Det Norske Veritas Research, Hovik, Norway, 1989.
95. J. Putresza. *Optymalizacja konstrukcji z uwzgl"ednieniem jej niezawodno"sci*. Praca Dokt., IPPT PAN, 1992.

- 
96. R. Rackwitz, B. Fiessler. *Structural reliability under combined random load sequences*. Computers and Structures, 9:484–494, 1978.
  97. H.S. Rajagopalan, R.V. Grandhi. *Reliability-based structural analysis and optimization in X window environment*. Computers and Structures, 60:1–10, 1997.
  98. M.R. Rajashekhar, B.R. Ellingwood. *A new look at the response surface approach for reliability analysis*. Structural Safety, 12:205–220, 1993.
  99. E. Ramm, K.-U. Bletzinger, R. Reitinger, K. Maute. *The challenge of structural optimization*. w: B.H.V. Topping, M. Papadrakakis (eds.), *Advances in Structural Optimization, Proc. Int. Conference on Computational Structures Technology, Athens, August, 1994*, 27–52. Civil Comp Press, 1994.
  100. D.S. Riha, H.R. Millwater, B.H. Thacker. *Probabilistic structural analysis using a general purpose finite element program*. Finite Elements in Analysis and Design, 11:201–211, 1992.
  101. M. Rosenblatt. *Remarks on multivariate transformation*. The Annals of Mathematical Statistics, 23:470–472, 1952.
  102. R.Y. Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley, 1981.
  103. J.L.T. Santos, A. Siemaszko, J.M.B. Cardoso, P.M.S. Barros. *Interactive - computer aided reliability engineering*. w: *Proc. of 5th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 581–589, Panama City, 1994.
  104. J.L.T. Santos, A. Siemaszko, S. Gollwitzer, R. Rackwitz. *Continuum sensitivity method for reliability-based structural design and optimization*. Mechanics of Structures and Machines, 23:497–520, 1995.
  105. V.E. Saoma, E.S. Sikiotis. *Interactive graphics nonlinear constrained optimization*. Computers and Structures, 21:759–769, 1985.
  106. K. Schittkowski. *The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented lagrangian type line search function, Part 1: Convergence analysis, Part 2: An efficient implementation with linear least squares subproblems*. Numerische Mathematik, 38:83–127, 1981.
  107. K. Schittkowski. *User's guide for the nonlinear programming code NLPQL*. Handbook to optimization program package NLPQL, University of Stuttgart - Institute for Informatics, Germany, 1985.
  108. K. Schittkowski, C. Zillober, R. Zotemantel. *Numerical comparison of nonlinear programming algorithms for structural optimization*. Structural Optimization, 7:1–19, 1994.
  109. G.I. Schuëller, M. Gasser, J. Hartl, G. Lener. *Reliability based optimization - a tool for practical design*. w: A.D. Belegundu, F. Mistree (eds.), *Proc. Conf. Optimization in Industry, Palm Coast, Florida 23–27 March 1997*, 169–176, 1997.
  110. G.I. Schuëller, R. Stix. *A critical appraisal of methods to determine failure probabilities*. Structural Safety, 4:293–309, 1987.



111. K.E. Shahroudi. *Design by continuous collaboration between manual and automatic optimization*. Computer Modeling and Simulation in Engineering, 3:1–11, 1998.
112. S. Shao, Y. Murotsu. *Reliability evaluation methods for systems with complex limit states*. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11–13 September 1991*, 325–338. Springer-Verlag, 1992.
113. J.D. Sørensen, P. Thoft-Christensen, A. Siemaszko, J.M.B. Cardoso, J.L.T. Santos. *Interactive reliability-based optimal design*. w: R. Rackwitz, G. Augusti, A. Borri (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 6th IFIP WG 7.5 Conf., Assisi, Italy 7–9 September 1994*. Chapman & Hall, 1994.
114. R. Stocki, A. Siemaszko, M. Kleiber. *Interactive methodology for reliability-based structural design and optimization*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 6:39–62, 1999.
115. *STRUREL: Structural Reliability Analysis Program Package, User's manual*. RCP GmbH, Barrer Strasse 48, Munich, Germany, 1999.
116. A. Surahman, K.B. Rojiani. *Reliability based optimum design of concrete frames*. Journal of Structural Division, ASCE, 109:741–757, 1983.
117. B.H. Thacker, S.V. Harren, H.R. Millwater. *Combined stress and resistance modeling with the NESSUS software system*. w: T.H. Service (ed.), *Reliability, Stress Analysis and Failure Prevention, Proc. 9th Biennial Conf. on Reliability Stress Analysis and Failure Prevention, Miami, Florida, USA, September 1991*, 49–54. ASME Trans, DE-Vol 30, 1991.
118. P. Thoft-Christensen. *On reliability-based structural optimization*. w: A. Der Kiureghian, P. Thoft-Christensen (eds.), *Reliability and Optimization of Structural Systems, Proc. 3rd IFIP WG 7.5 Conf., Berkeley, 26–27 March 1990*, 387–402. Springer-Verlag, 1990.
119. P. Thoft-Christensen, M.J. Baker. *Structural Reliability Theory and its Applications*. Springer-Verlag, 1982.
120. P. Thoft-Christensen, Y. Murotsu. *Application of Structural Systems Reliability Theory*. Springer-Verlag, 1986.
121. P. Thoft-Christensen, J.D. Sørensen. *Recent advances in optimal design of structures from a reliability point of view*. International Journal of Quality & Reliability Management, 4:19–31, 1987.
122. L. Tvedt. *Distribution of quadratic forms in normal space – application to structural reliability*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 116:1183–1197, 1990.
123. Z. Wawszczyszyn, C. Cicho"n, M. Radwa"nska. *Metoda Element"ow Sko"nczonych w Stateczno"sci Konstrukcji*. Arkady, 1990.
124. W. Wierzbicki. *W sprawie bezpiecze"nstwa pr"eta wyci"aganego osiowo*. Czasopismo techniczne, 50:273–277, 1937.

125. R. Wit. *Metody Programowania Nieliniowego*. WNT, 1986.
126. P. Wriggers, W. Wagner, C. Miehe. *A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70:329–347, 1988.
127. Y.-T. Wu, O.H. Burnside, J. Dominguez. *Efficient probabilistic fracture mechanics analysis*. w: *Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, 85–100. Pineridge Press, Swansea, United Kingdom, 1987.
128. Y.-T. Wu, H.R. Millwater, T.A. Cruse. *Advanced probabilistic structural analysis method for implicit performance functions*. *AIAA Journal*, 28:1663–1669, 1990.
129. Y. Zhang, A. Der Kiureghian. *Finite element reliability methods for inelastic structures*. Report No. UCB/SEMM-97/05, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1997.
130. T.-L. Zhu. *A cell technique for computing the failure probabilities of structural systems*. *Computers and Structures*, 46:1001–1005, 1993.
131. J. "Zmuda. *Podstawy Projektowania Konstrukcji Metalowych*. Arkady, 1997.

## Normy projektowe cytowane w tekście

- |               |  |
|---------------|--|
| PN-82/B-02000 | Obciążenia budowli. Zasady ustalania wartości.   |
| PN-82/B-02001 | Obciążenia budowli. Obciążenia stałe.  |
| PN-82/B-02003 | Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne. Podstawowe obciążenia technologiczne i montażowe. |
| PN-82/B-02004 | Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne. Obciążenia pojazdami.                             |
| PN-80/B-02010 | Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie śniegiem.  |
| PN-77/B-02011 | Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem.   |
| PN-87/B-02013 | Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe. Obciążenie oblodzeniem.                             |
| PN-88/B-02014 | Obciążenia budowli. Obciążenie gruntem.  |
| PN-86/B-02015 | Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe. Obciążenie temperaturą.                             |
| PN-76/B-03001 | Konstrukcje i podłoża budowli. Ogólne zasady obliczeń.   |
| PN-90/B-03200 | Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.   |