PRACE IPPT · IFTR REPORTS 1/2006

Zenon Kulpa

DIAGRAMMATIC INTERVAL ANALYSIS WITH APPLICATIONS

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
WARSZAWA 2006

ISSN 0208-5658

Redaktor Naczelny:
doc. dr hab. Zbigniew Kotulski

Recenzent:
dr hab. Ewa Grabska

Praca wpłynęła do Redakcji 1 września 2005 r.

Praca habilitacyjna

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład: 100 egz. Ark. druk. 15,63
Oddano do druku w kwietniu 2006 roku

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

Preface

The sense of sight is undoubtedly the most important sense of human beings (and many animals too) with respect to the quantity and richness of perceived information. Most of the information we receive from the world, including that communicated by other human beings, is of visual nature. Hence there should be no doubt about the importance of studying this kind of information, and developing appropriate technical means—in recent times this means mostly computer hardware and software—to aid and facilitate its use.

Taking that into account, it may be surprising that despite the widespread use of visual methods in science and other areas of human activity, a serious scientific study of this representation, communication and reasoning tool has started only recently. Compare that with centuries of studying verbal language—the difference appears quite striking.

Fortunately, the profound importance of visual reasoning methods for the scientific work becomes recently acknowledged by philosophers of science:

> ... historians, philosophers, and sociologists of science are finally becoming aware of how much of science has been done, and increasingly is being done, using pictorial and diagrammatic modes of representation. ... It is my view that studying visual modes of representation in science provides an entrée into fundamental debates within the philosophy of science, ...
>
> [Ronald N. Giere, *Science without Laws* (1999)]

Finally, the discipline of *diagrammatics*, devoted to scientific investigation of diagrammatic representations and methods of reasoning with them, emerged. Growing numbers of researchers and publications in this area bring hope of filling yet another gap in our knowledge about means of representing and processing complex information in humans and machines. This also means the development of new diagrammatic tools and methods that will boost effectiveness of knowledge representation and processing, necessary to meet the challenges posed by the emerging Information Age.

Aims of the work. The main aim of the work is to present a novel diagrammatic representational system for interval algebra and computation developed by the author, and showing its applications. In particular, a suite of new or improved algorithms for characterizing solution sets of interval linear equations has been developed and implemented.

Contents of the work. The work consists of seven chapters. The first chapter starts with a general discussion of the field of using pictures as tools for information representation and communication. Then follows a short introduction to the recently established scientific discipline of *diagrammatics* that investigates representations and reasoning methods based on diagrams as a representation medium. The introduction puts an emphasis on applications in mathematics, and on computer implementation of diagrammatic representations. One of research directions of diagrammatics is the development, refinement and application of diagrammatic representational systems. Such a system, developed by the author for interval analysis and computation field, is presented in the rest of the work. Its various applications to represent and solve various problems in this domain, in particular characterizations of solution sets of linear interval equations, are also included.

The field of interval computations, introduced briefly in Chapter 2, is a relatively recent branch of algebra and analysis, still in the stage of active development. It has important applications, mostly in numerical computation domain, like the *guaranteed accuracy* computations, global optimization, and others. Albeit various simple diagrams appeared in the literature of the field, they played no significant role in its development. This stays in marked contrast to the development of complex number theory and analysis long ago, where the diagrammatic representational system based on the complex plane diagram (Argand diagram) played an important role in the acceptance of complex numbers and in the development of their theory. Even today new capabilities of this system are being discovered.

The diagrammatic system for interval algebra is based on a diagrammatic representation of the space of intervals, called an *MR-diagram* and described in detail in Chapter 3. The system has then been applied to several subareas of interval algebra, namely *interval relations* (Chapter 4), *interval arithmetic* (Chapter 5), and *interval linear equations* (Chapters 6 and 7). To meet specific needs of these subareas, additional diagrammatic tools have been developed and used. Finally, in Chapter 6 and especially in Chapter 7, various new methods and algorithms for *characterizing solution sets* of interval linear equations have been developed. Computer programs implementing these algorithms are listed in Appendix A. It is hoped that the diagrammatic system developed might play in further development of interval algebra a similar role as the complex plane diagram played in complex analysis research.

Bibliography. The bibliography is divided into two main parts. The first part contains works authored or co-authored by this author, referred to in the text by numerical indices in square brackets. The works are classified into several bibliographical categories and ordered in each category anti-chronologically (the most recent first). In addition to works cited in the main text, some other, more important papers are also included.

The second part contains works by other authors, divided into two categories. The first category contains general article collections and proceedings, referred to by [Name Year] references and ordered alphabetically by name. The second category contains the individual books and papers, referred to by [Author Year] references and ordered alphabetically by author.

Acknowledgements. The research leading to this work was conducted in collaboration with a number of people, to whom the author owes much and feels obliged to acknowledge their help and contribution. The author asks for forgiveness for any possible omissions.

First of all, the author is greatly indebted to Prof. Michał Kleiber for creating a friendly and stimulating workplace during the last twelve years, as well as for his direct collaboration with the author in the field of qualitative analysis of physical systems, and encouragement of the line of research which led to this work.

The early research, concerning mostly the computer image processing field, started within the department of pattern recognition headed by Prof. Juliusz L. Kulikowski whom I would like to thank for creating a creative and unrestrictive working environment. Special thanks are due to Michał (Michael) Sobolewski for his sharing of stimulating ideas and joint work on several artificial intelligence issues, also during our stay at Concurrent Engineering Research Center in Morgantown, WV.

The author is also most thankful to Dr. Ewa Grabska, who persuaded the author to start lecturing on diagrammatics. Dr. Wojciech Mokrzycki inspired and facilitated the edition of a special issue on diagrammatics of the *Machine GRAPHICS & VISION* journal [43]. The collaboration of Ph.D. students Karol Rosłaniec and Truong Lan Le is also appreciated.

Great thanks are also due to many researchers throughout the world who shared their ideas and provided freely their publications and advice. The author would like to express his gratitude especially to Prof. Svetoslav Markov from Sofia, Prof. Jiři Rohn from Prague, and Prof. Edgar Kaucher from Karlsruhe. Thanks are also due to Nathaniel Miller, Mark Greaves, and Yuri Engelhardt, as well as many other members of the <diagrams>, <reliable_computing>, and <infoDesignCafe> e-mail lists for many stimulating discussions. The author would also like to thank Prof. Tristan Needham for the inspiration provided by his award-winning book [Needham 1997].

Thanks are also due to my wife Elżbieta, whose loving attention has made the burden of life so much lighter.

— Zenon Kulpa

Summary

The main aim of the work has been the development of the novel diagrammatic representational system for interval algebra and computation, and showing its useful applications in solving theoretical and practical problems in this area. The results reported in the work can be divided into three parts:

- The development of a diagrammatic representational system for the field of interval algebra and computation, facilitating analysis, investigation, presentation and understanding of properties of interval algebra, in particular interval relations, interval arithmetic and interval linear equations.
- The application of the developed representational system to various problems in interval analysis, leading to several useful results concerning properties of interval algebra, especially the characterizations of classes of interval relations, the investigation of centred interval multiplication operations and the discovery and detailed description of structural types of interval linear equations.
- The development, with the help of these diagrammatic means, of a number of practical methods and algorithms for characterization and approximation of solution sets of interval linear equations.

The work starts from an introductory chapter about the emerging field of *diagrammatics*, which investigates methods and applications of diagrammatic representations for information encoding and processing (including diagrammatic reasoning). The chapter begins with a general discussion of using pictures as tools for information representation and communication. The discipline of diagrammatics is then defined, and its three main branches (*cognitive and psychological* issues, *theory* of diagrammatic representations, and *applications* of diagrams) are introduced. Then follows a short discussion of the problems with the definition of a diagram (still a hotly disputed issue). Applications of diagrammatic representations in mathematics are then discussed in more detail, starting from the main objections usually raised against their use there (the arguments of alleged *difficulty*, *unreliability* and *informality*). The two main types of mathematical diagrams (*static* and *dynamic* diagrams) are then introduced and their four usage modes discussed. The chapter concludes with the discussion of computer implementation of diagrammatic representations for mathematics, comprising diagram input and output, and two modes of internal representation and processing (*raster* and *graph* representations). Several types of computer tools facilitating the use of diagrammatic representations are then described, especially the novel "dynamic geometry" or "diagrammatic spreadsheet" tools.

Chapter 2 contains a brief introduction to basic notions of interval algebra and computations, starting from the basic definitions and notation. The nonstandard properties

of interval arithmetic are then introduced and the main technique of calculating *interval enclosures* for real functions is presented, concluding with the important problem of *overestimation* of such enclosures. The main reasons for applying interval methods are then presented, and the chapter concludes with a short justification of the usefulness of diagrammatic representations in interval research and applications.

With Chapter 3 starts the presentation of the main results of the work. After a brief survey of other proposals, the basic diagrammatic representation for the space of intervals (the *MR-diagram*) is introduced, followed by the discussion of main types of its possible applications in interval research. The *MR-diagram*, based on the (m, r) coordinate axes (representing the midpoint and the radius of an interval), is a two-dimensional representation of the interval space, in which intervals are represented as points on the plane. Several basic applications of the diagram are presented next. They start from the representation of interval types, interval ordering relations, and a new notion of *lozenge* (needed to specify convexity properties and characterizations of types of interval relations). Next, graphs for basic interval parameter functions are shown, especially the *extent functions*, including a new function which is better suited to the midpoint-radius coordinates used. The new *RR-diagram* based on this function is developed as a result. Finally, several basic constructions for *interval lattice* operations are presented.

Chapter 4 is devoted to the diagrammatic formulation of the theory of interval relations, especially the so-called *arrangement interval relations*, describing possible mutual arrangements of two intervals on the number axis. The chapter starts from the definition of these relations, and the *basic interval relations* from which other arrangement relations are constructed. With that, two new diagrammatic tools are introduced, namely the new *graphical symbols* for the basic relations and the *conjunction diagram* to represent formulae defining interval arrangement relations. Next, the new tool for representing the space of interval relations, called the *W-diagram*, is presented, with the system of *W-icons* for the diagrammatic representation of arrangement relations based on it. The W-diagram is obtained from the MR-diagram by marking in it images (or coimages) of some arbitrary thick interval under all basic interval relations. The shapes of the regions so obtained do not depend on the choice of the reference interval, but reflect properties of corresponding basic relations instead. Another tool representing the space of relations, the *L-diagram* which is a neighbourhood graph of regions in the W-diagram, is also introduced (it is a new version of similar graphs used by some other authors). Various representations of interval relations are then compared, using several characteristic examples. The way of performing operations on interval relations using the diagrammatic notation of W-icons is then shown, in particular the original diagrammatic algorithm for performing compositions of arrangement relations, and the resulting diagrammatic composition table for basic relations.

The developed tools and methods are then applied to classic qualitative reasoning with networks of interval relations. The diagrammatic representation of such networks and the way of solving diagrammatically the basic problems in this area are demonstrated with some classic examples. The analysis of several important classes of arrangement relations follows, namely the *convex*, *pointisable* and *pre-convex* relations. A number of diverse characterizations of these classes is presented and compared, including several new diagrammatic characterizations of them. The two theorems stating equivalence of these characterizations are proven with mostly diagrammatic means. A short note on the diagrammatic representation of certain more important non-arrangement interval relations is also included. The chapter is concluded with an introduction to several basic applications of the interval relations theory, which may use the diagrammatic tools developed (namely reasoning about events in time, qualitative spatial reasoning, technical diagnostics, and action scheduling).

Chapter 5 shows the application of interval space diagrams to interval arithmetic. Diagrammatic constructions for interval arithmetic operations developed there help to understand the structure and nonstandard behaviour of the operations and allow for finding and proving their new and useful properties. The operation of addition does not produce any nonstandard effects. Negation and subtraction behave already in a nonstandard way, so that interval subtraction ceases to be the opposite operation to addition, resulting in nonstandard properties of the simplest interval equation $a + x = b$. The diagrams explain clearly the underlying causes of that behaviour, helping to understand better the properties of interval calculations. The original diagrammatic construction for the much more complex operation of interval multiplication is developed and used for the diagrammatic analysis of properties of this operation. Among others, the diagrammatic characterization of basic multiplication cases is developed, with the diagrammatic proof of the "fast multiplication" formula. The basic properties of the important interval equation $a \cdot x = b$ are also presented. The detailed analysis of the equation and its multidimensional generalization is continued in Chapter 6. The original construction developed for interval division works properly also for the division by an interval containing zero, producing in such cases extervals used in Kahan arithmetic. Then follows an application of the diagrammatic analysis to the nonstandard arithmetic operations of *centred multiplication*. It resulted in the proper definition of the new operation of *centred inner multiplication* and the detailed analysis of inclusion isotonicity properties and approximation accuracy of both outer and inner centred multiplication operations. Short notes on the two main extensions of standard interval algebra (Kaucher and Kahan arithmetics) and applications of interval arithmetic diagrams conclude the chapter.

Chapter 6 presents the novel diagrammatic approach to interval linear equations, introducing also new diagrammatic tools useful in this domain. The diagrammatic tools to represent interval space, interval relations, and interval arithmetic operations are applied to the diagrammatic analysis of interval linear equations. First, the basic types of solution sets of such equations (*tolerance*, *control* and *united* solution sets) are defined and reinterpreted as solutions to certain interval relational expressions. Then the basic one-dimensional equation is analyzed. Constructions for its diagrammatic solution in different possible cases are developed. They reveal a rich structure of different configurations of the solution sets. All 6 basic types (with 16 subtypes), 47 intermediate types and 10 degenerate ones are catalogued, in several diagrammatic, tabular, and algorithmic (1DSET) forms. Next, the relation between the *interval solution* and the tolerance solution set is analyzed. The significance of these findings for the analysis of a general multidimensional case is established with the *radial cuts* theorem, stating that the arrangement of solution sets along any straight line going through the origin of the solution space is obtained as a solution of a one-dimensional equation with coefficients determined by the coefficients of the multidimensional equation and directional parameters of the cutting line. The algorithm for calculating such radial cuts is also given (RADCUT). Using these findings, the *boundary hyperplane selection rule* is formulated, which allows for finding full and exact descriptions of solution set shapes in the multidimensional solution space. The two-dimensional case is first used as an introduction to such an analysis. The algorithm for finding the complete description of solution sets for such equations (2DSETS) is developed and used to compile the catalogue of basic two-dimensional structural types. Finally, the algorithm is extended to the multidimensional case (BOUNDHYP). The chapter is concluded with a note on applications, presenting a thorough discussion of possible modes of application of the mathematical model based on interval linear equations.

Chapter 7 introduces various new characterizations and properties of the tolerance, control, and united solution sets, as obtained by the author with the application of the diagrammatic approach and diagrammatic tools introduced in the previous chapters, especially Chapter 6. The chapter starts from introducing a new tool, called the *butterfly diagram* (BUTTERFLY), which provides a two-dimensional representation of the structure of the multidimensional solution space. Then the manner of applying the diagram to analyze the structure and properties of solution sets is explained. Certain properties of the *midpoint hyperplane* and the *midpoint solution* are also formulated and proved, with the help of diagrammatic approach, as they are useful for further characterization of certain properties of solution sets. Then, with the application of the diagrammatic tools developed, individual types of solution sets are analyzed separately, resulting in refining some known conditions, and finding new ones, for testing *existence* or *emptiness* of the solution sets, both globally (TSGLOBAL, CSGLOBAL) and in certain regions of the solution space (TSLOCAL, CSLOCAL, USLOCAL). Other properties, like *unboundedness* and *connectivity*, are also investigated and the results presented. Algorithms for finding new *inner cross* and *orthoplex* approximations to the solution sets (TSINNER, CSINNER, USINNER) are also developed in this way, leading also to the general method of calculating arbitrary *parallel cuts* through the solution space (PARCUT), with straight lines parallel to any given coordinate axis. The reported results constitute the first batch of results obtained by the author with the diagrammatic approach. The further work with diagrammatic tools will likely reveal a number of new results. The chapter is concluded with the illustrative truss analysis example.

Appendix A contains a list of algorithms based on these developments. They were implemented as notebooks of Mathematica® 3.0 and constitute a preliminary version of a suite of modules planned for an interactive system of exploration of interval linear equations and their solution spaces. Names of the algorithms are cited above at appropriate places in the summary of the last two chapters.

Streszczenie

Głównym celem pracy było opracowanie nowego systemu reprezentacji diagramowej dla algebry przedziałów i obliczeń przedziałowych oraz pokazanie jego użytecznych zastosowań w rozwiązywaniu teoretycznych i praktycznych problemów w tej dziedzinie. Wyniki przedstawione w pracy można podzielić na trzy części:

- Opracowanie systemu reprezentacji diagramowej dla algebry przedziałów i obliczeń przedziałowych, wspomagającego analizę, badanie, prezentację i zrozumienie własności algebry przedziałów, w szczególności relacji przedziałowych, arytmetyki przedziałowej i liniowych równań przedziałowych.
- Zastosowanie opracowanego systemu reprezentacji do różnych problemów analizy przedziałowej, co pozwoliło uzyskać wiele użytecznych wyników dotyczących własności algebry przedziałów (w szczególności charakteryzacji klas relacji przedziałowych), a także zbadać tzw. scentrowane operacje mnożenia przedziałów oraz wykryć i szczegółowo opisać typy strukturalne liniowych równań przedziałowych.
- Opracowanie, przy pomocy tego systemu reprezentacji diagramowej, pewnej liczby praktycznych metod i algorytmów charakteryzacji i aproksymacji zbiorów rozwiązań liniowych równań przedziałowych.

Pracę rozpoczyna wstępny rozdział na temat rodzącej się dziedziny nauki zwanej *diagramatyką*, która bada metody reprezentacji diagramowych i ich zastosowania do kodowania i przetwarzania informacji (wnioskowania diagramowego). Rozdział rozpoczyna się ogólną dyskusją użycia obrazów jako narzędzi reprezentacji i komunikacji informacji. Następnie definiuje się diagramatykę jako dyscyplinę badawczą i jej trzy główne gałęzie (zagadnienia *kognitywne* i *psychologiczne*, *teoria* reprezentacji diagramowych i *zastosowania* diagramów). Po tym następuje krótka dyskusja problemów z definicją pojęcia diagramu (zagadnienie ciągle gorąco dyskutowane). Zastosowania reprezentacji diagramowych w matematyce sa następnie omówione bardziej szczegółowo, począwszy od głównych zastrzeżeń zwykle podnoszonych przeciwko ich używaniu (argumenty rzekomej *trudności* ich użycia, *zawodności* i *nieformalnej* natury). Następnie omawia się dwa główne typy diagramów matematycznych (diagramy *statyczne* i *dynamiczne*) oraz cztery sposoby ich praktycznego stosowania. Rozdział kończy się dyskusją komputerowych implementacji reprezentacji diagramowych dla zastosowań w matematyce, na które składa się *wprowadzanie* diagramów, ich *wyprowadzanie* oraz dwa sposoby wewnętrznej reprezentacji i przetwarzania w komputerze (reprezentacje *rastrowe* i *grafowe*). Kilka typów narzędzi komputerowych wspomagających używanie reprezentacji diagramowych omówiono na zakończenie rozdziału, w szczególności klasę narzędzi określanych nazwami „dynamicznej geometrii" lub „diagramowego arkusza kalkulacyjnego."

Rozdział 2 zawiera krótkie wprowadzenie do podstawowych pojęć algebry przedziałów i obliczeń przedziałowych, począwszy od podstawowych definicji i oznaczeń. Następnie

zaprezentowane są pewne niestandardowe własności arytmetyki przedziałowej oraz podstawowa technika wyznaczania *oszacowań przedziałowych* dla funcji rzeczywistych, wraz z ważnym problemem *przeszacowania* takich oszacowań. Na zakończenie zaprezentowane są najważniejsze powody stosowania metod przedziałowych, oraz krótkie uzasadnienie użyteczności reprezentacji diagramowych w badaniach i zastosowaniach metod przedziałowych.

Od rozdziału 3 rozpoczyna się prezentacja głównych rezultatów pracy. Po krótkim przeglądzie innych propozycji wprowadzono podstawową reprezentację diagramową przestrzeni przedziałów, tzw. *MR-diagram*, wraz z dyskusją głównych typów jego możliwych zastosowań w badaniach przedziałowych. MR-diagram przedstawia przestrzeń przedziałów w układzie współrzędnych (m, r) (środek i promień przedziału), w której przedziały reprezentowane są przez punkty na dwuwymiarowej płaszczyźnie. Dalej pokazano kilka podstawowych zastosowań tego diagramu, zaczynając od reprezentacji typów przedziałów i relacji uporządkowania przedziałów, w tym nowego pojęcia *metaregionu* (ang. "lozenge"), potrzebnego do specyfikacji własności wypukłości i charakteryzacji typów relacji przedziałowych. Następnie pokazano wykresy podstawowych funkcji określających parametry przedziałów, w szczególności *funkcji rozciągłości* przedziałów, wraz z nową funkcją, lepiej dostosowaną do używanych współrzędnych środek-promień przedziału. W rezultacie wprowadzono nowy diagram oparty na tej funkcji, zwany *RR-diagramem*. Na zakończenie pokazano kilka podstawowych konstrukcji dla operacji w *kracie przedziałów*.

Rozdział 4 poświęcony jest diagramowemu opracowaniu teorii relacji przedziałowych, szczególnie tzw. *relacjom ułożenia przedziałów*, opisującym możliwe wzajemne ułożenia dwóch przedziałów na osi liczbowej. Rozdział rozpoczyna się definicją tych relacji oraz *podstawowych relacji przedziałowych*, z których zbudowane są pozostałe relacje ułożenia. Wprowadzono tutaj dwa nowe narzędzia diagramowe, mianowicie nowe *symbole graficzne* dla relacji podstawowych oraz *diagram koniunkcji* dla reprezentacji formuł definiujących relacje ułożenia przedziałów. Następnie wprowadzono nowe narzędzie do reprezentacji przestrzeni relacji przedziałowych, nazwane *W-diagramem*, wraz z opartym na nim systemem *W-ikon* dla diagramowej reprezentacji relacji ułożenia przedziałów. W-diagram powstaje z MR-diagramu przez zaznaczenie na nim obrazów (lub przeciwobrazów) pewnego dowolnego grubego przedziału względem wszystkich podstawowych relacji przedziałowych. Kształty tak uzyskanych obszarów diagramu nie zależą od wyboru przedziału odniesienia, lecz odzwierciedlają własności odpowiednich relacji podstawowych. Wprowadzono także inne narzędzie reprezentacji przestrzeni relacji, tzw. *L-diagram*, będący grafem sąsiedztwa regionów MR-diagramu (jest to nowa wersja podobnej konstrukcji używanej przez niektórych innych autorów). Różne reprezentacje relacji ułożenia porównano używając kilku charakterystycznych przykładów. Pokazano następnie sposób wykonywania operacji na relacjach przedziałowych za pomocą diagramowej notacji W-ikon, w szczególności oryginalny algorytm diagramowej kompozycji relacji wraz z wynikową diagramową tablicą kompozycji relacji podstawowych.

Opracowane narzędzia i metody zostały następnie zastosowane do klasycznego jakościowego wnioskowania za pomocą sieci relacji przedziałowych. Diagramową reprezentację takich sieci i sposoby diagramowego rozwiązywania podstawowych problemów z tej dziedziny pokazano na kilku klasycznych przykładach. W kolejnej części rozdziału przeprowadzono analizę kilku ważnych klas relacji ułożenia przedziałów, mianowicie relacji *wypukłych*, *punktowo określonych* i *pre-wypukłych*. Podano i porównano szereg różnych charakteryzacji tych klas, w tym kilka nowych charakteryzacji diagramowych. Dwa twierdzenia o równoważności tych charakteryzacji udowodniono przy użyciu diagramów. Przedstawiono również krótko diagramowe reprezentacje niektórych relacji nie będących relacjami ułożenia przedziałów. Rozdział kończy wprowadzenie do niektórych podstawowych zastosowań teorii relacji przedziałowych, które mogą wykorzystywać opracowane narzędzia diagramowe, takich jak wnioskowanie o zdarzeniach w czasie, jakościowe wnioskowanie przestrzenne, diagnostyka techniczna oraz szeregowanie akcji.

Rozdział 5 pokazuje zastosowania diagramów przestrzeni przedziałów w arytmetyce przedziałowej. Opracowane tutaj diagramowe konstrukcje dla przedziałowych operacji arytmetycznych pomagają zrozumieć strukturę i niestandardowe zachowanie tych operacji i pozwalają znajdować ich nowe, użyteczne własności. Dodawanie przedziałów nie daje żadnych nietypowych efektów. Natomiast negacja (zmiana znaku) i odejmowanie zachowują się już niestandardowo, w rezultacie czego odejmowanie przestaje być operacją odwrotną do dodawania, co jest powodem nietypowych własności najprostszego równania przedziałowego $a+x=b$. Diagramy wyjaśniają tu naocznie głębsze przyczyny takiego zachowania się tych operacji, pomagając lepiej zrozumieć własności obliczeń przedziałowych. Oryginalną konstrukcję diagramową, opracowaną dla znacznie bardziej złożonej operacji mnożenia przedziałów, użyto następnie do diagramowego przeanalizowania własności tej operacji. Przedstawiono m.in. diagramową charakteryzację podstawowych przypadków mnożenia wraz z diagramowym dowodem formuły „szybkiego mnożenia." Podano też podstawowe własności ważnego równania przedziałowego $a \cdot x = b$. Szczegółowa analiza tego równania i jego wielowymiarowego uogólnienia jest kontynuowana w rozdziale 6. Opracowana następnie oryginalna diagramowa konstrukcja dla dzielenia przedziałów działa poprawnie także w przypadku dzielenia przez przedział zawierający zero, dając wtedy tzw. *przedział zewnętrzny* („eksterwał"), używany w arytmetyce Kahana. Następnie zastosowano analizę diagramową do niestandardowych operacji tzw. *scentrowanych operacji mnożenia* przedziałów. W wyniku tego udało się określić poprawną definicję nowej operacji tzw. *„scentrowanego mnożenia wewnętrznego"* oraz zbadać szczegółowo własności izotoniczności względem inkluzji i dokładności aproksymacji dla operacji zarówno zewnętrznego jak i wewnętrznego mnożenia scentrowanego. Rozdział kończą krótkie sekcje na temat dwóch głównych rozszerzeń standardowej algebry przedziałów (arytmetyki Kauchera i Kahana) oraz zastosowań diagramów arytmetyki przedziałowej.

Rozdział 6 prezentuje nowe, diagramowe podejście do liniowych równań przedziałowych, wprowadzając również nowe narzędzia diagramowe przydatne w tej dziedzinie. Narzędzia diagramowe dla reprezentacji przestrzeni przedziałów, relacji przedziałowych i przedziałowych operacji arytmetycznych zastosowano tutaj do diagramowej analizy liniowych równań przedziałowych. Najpierw podano definicje podstawowych typów zbiorów rozwiązań takich równań (zbiory rozwiązań *tolerowanych*, *kontrolowanych* i *zunifikowanych*) i zinterpretowano je na nowo jako rozwiązania pewnych przedziałowych wyrażeń relacyjnych. Następnie przeanalizowano podstawowe równanie jednowymiarowe. Opracowano konstrukcje jego diagramowego rozwiązywania dla różnych możliwych przypadków. Ujawniło to bogatą strukturę różnych możliwych konfiguracji zbiorów rozwiązań. Skatalogowano wszystkie 6 podstawowych typów konfiguracji (składających się z 16 podtypów), 47 typów pośrednich i 10 zdegenerowanych, w kilku postaciach: diagramowych, tabelarycznych i algorytmicznych (1DSET). Następnie przeanalizowano zależność pomiędzy tzw. *rozwiązaniem przedziałowym* a zbiorem rozwiązań tolerowanych. Znaczenie tych wyników dla analizy ogólnego przypadku wielowymiarowego wynika z przedstawionego następnie twierdzenia o *przecięciu radialnym* przestrzeni rozwiązań. Stwierdza ono, że układ zbiorów rozwiązań wzdłuż dowolnej lini prostej przechodzącej przez środek układu współrzędnych przestrzeni rozwiązań uzyskuje się jako rozwiązanie pewnego równania jednowymiarowego ze współczynnikami określonymi przez współczynniki równania wielowymiarowego i parametry kierunkowe linii przecięcia. Podano również algorytm obliczania przecięć radialnych (RADCUT). Na tej podstawie sformułowano *regułę selekcji hiperpłaszczyzn granicznych*, pozwalającą znajdować pełne i dokładne opisy kształtów zbiorów rozwiązań w wielowymiarowej przestrzeni rozwiązań. Jako wprowadzenia do analizy wielowymiarowej użyto następnie przypadku dwuwymiarowego. Opracowano algorytm pełnego opisu przestrzeni rozwiązań dla tego przypadku (2DSETS) i użyto go do stworzenia katalogu podstawowych typów strukturalnych równania dwuwymiarowego. Algorytm został następnie rozszerzony na przypadek wielowymiarowy (BOUNDHYP). Rozdział kończy sekcja na temat zastosowań, zawierająca wyczerpującą dyskusję możliwych sposobów stosowania modelu matematycznego opartego na liniowych równaniach przedziałowych.

Rozdział 7 wprowadza różne nowe charakteryzacje i własności tolerowanych, kontrolowanych i zunifikowanych zbiorów rozwiązań, uzyskane przez autora z zastosowaniem podejścia diagramowego i narzędzi diagramowych wprowadzonych w poprzednich rozdziałach, w szczególności w rozdziale 6. Rozdział rozpoczyna wprowadzenie nowego narzędzia zwanego *diagramem motylkowym* (BUTTERFLY), który przedstawia dwuwymiarową reprezentację struktury wielowymiarowej przestrzeni rozwiązań. Następnie omówiono sposoby stosowania tego diagramu do analizy struktury i własności zbiorów rozwiązań. Sformułowano i udowodniono z użyciem diagramów także szereg własności *hiperpłaszczyzny środkowej* i *rozwiązania środkowego*. Są one użyteczne dla charakteryzacji niektórych własności zbiorów rozwiązań. Następnie poszczególne typy rozwiązań analizowane są oddzielnie za pomocą opracowanych narzędzi diagramowych. Uzyskano w ten sposób ulepszenie niektórych istniejących warunków i znaleziono nowe warunki *istnienia* oraz *nieistnienia* tych zbiorów rozwiązań, obowiązujące globalnie (TSGLOBAL, CSGLOBAL), lub tylko w pewnych obszarach przestrzeni rozwiązań (TSLOCAL, CSLOCAL, USLOCAL). Badano również i zaprezentowano wyniki dotyczące niektórych innych własności tych zbiorów rozwiązań, takich jak *nieograniczoność* i *spójność*. Wyprowadzono także algorytmy znajdowania nowych, wewnętrznych aproksymacji *krzyżowych* i *ortopleksowych* zbiorów rozwiązań (TSINNER, CSINNER, USINNER), uzyskując także ogólną metodę wyznaczania *przecięć równoległych* przestrzeni rozwiązań (PARCUT) za pomocą prostych równoległych do dowolnej danej osi współrzędnych. Przedstawione wyniki stanowią pierwszą porcję rezultatów uzyskanych przez autora za pomocą podejścia diagramowego. Dalsza praca z użyciem narzędzi diagramowych zapewne doprowadzi do uzyskania szeregu nowych rezultatów. Rozdział kończy ilustracyjny przykład analizy kratownicy.

Dodatek A zawiera listę algorytmów opartych na uzyskanych wynikach. Zostały one zaimplementowane pod systemem Mathematica® 3.0 i stanowią wstępną wersję zestawu modułów dla planowanego interakcyjnego systemu eksploracji liniowych równań przedziałowych i ich przestrzeni rozwiązań. Nazwy algorytmów podano w odpowiednich miejscach w streszczeniu ostatnich dwóch rozdziałów powyżej.

Contents