Rozdział 3

Przykłady złożonych operacji morfologicznych

W niniejszym rozdziale przedstawimy kilka użytecznych i częściej spotykanych złożonych operacji morfologicznych. Operacje te można wykonać przy użyciu operacji podstawowych, opisanych szczegółowo w rozdz. 2. Z kolei sposób wykonania operacji złożonych jest przedstawiony w dodatku A, przy okazji omawiania zawartości katalogu MORPH\RESULTS na CD ROMie.

Omówione niżej przykłady obejmują następujące, często używane operacje:

1. Operacja trafi – nie trafi (podkatalog HITMISS).
2. Powłoka wypukła (podkatalog CONVHULL).
3. Szkielet (podkatalog SKELETON).
4. Gradient morfologiczny (podkatalog GRADIENT).

Trzy pierwsze z tych operacji stosuje się do obrazów binarnych, a ostatnią – do obrazów z gradacją szarości. Podstawy teoretyczne odnoszące się do powyższych operacji można znaleźć w wielu źródłach, z których w tym miejscu wymienimy tylko wyczerpującą w tym zakresie książkę H. Heijmansa [121].

Ponieważ począwszy od niniejszego rozdziału wszystkie operacje morfologiczne będą ilustrowane wynikami obliczeń otrzymanymi za pomocą załączonego oprogramowania, więc dalsze rozważania będą zapisane w notacji Haralicka/Sternberga. W związku z tym, zgodnie z przyjętą umową, indeks h przy symbolach operacji $\oplus$ oraz $\ominus$ będzie pominięty.

3.1 Operacja trafi – nie trafi

Jedną z bardzo często używanych i niezbędnych w praktyce operacji jest operacja trafi – nie trafi, która oddziałuje jednocześnie na obiekt i jego tło w obrazie. Załóżmy, że są dane dwa elementy strukturujące $A, B \subseteq \mathbf{E}^d$, takie $A \cap B = \emptyset$. Operacja trafi – nie trafi jest zdefiniowana za pomocą równania

$$X \bigotimes (A, B) = \{h \in \mathbf{E}^d : \; A_h \subseteq X \text{ oraz } B_h \subseteq X^c\}. \tag{3.1}$$

Piksel h należy do zbioru $X \bigotimes (A, B)$, jeżeli przecięcie zbioru A_h ze zbiorem X^c oraz przecięcie B_h z X są zbiorami pustymi $\emptyset$. Jeżeli warunek $A \cap B = \emptyset$ nie jest spełniony, to wynik operacji jest zawsze zbiorem pustym. Operacja trafi – nie trafi nadaje się szczególnie dobrze do wykrywania pewnych charakterystycznych punktów w obrazie, takich jak punkty izolowane, punkty krawędziowe, narożniki i połączenia w kształcie litery T. Na rysunku 3.1 przedstawiono dwa przykłady zastosowania operacji trafi – nie trafi do znalezienia, odpowiednio, (a) lewego dolnego oraz (b) prawego górnego narożnika kwadratu.

Dla przypadku (a) na rys. 3.1 elementy strukturujące A i B można przedstawić za pomocą macierzy

$$(A, B) = \begin{bmatrix} & T & \\ N & \underline{T} & T \\ N & N & \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

w której symbol T oznacza piksele należące do elementu strukturującego A, natomiast N oznacza piksele należące do elementu B. Początek układu współrzędnych znajduje się w pikselu, którego symbol jest podkreślony ($\underline{T}$).

Natomiast dla przypadku (b) na tym samym rysunku elementy strukturujące A i B można przedstawić za pomocą macierzy

$$(A, B) = \begin{bmatrix} & N & N \\ T & \underline{T} & N \\ & T & \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Operacja trafi – nie trafi posiada kilka dość oczywistych własności, które można ująć w następujący lemat.

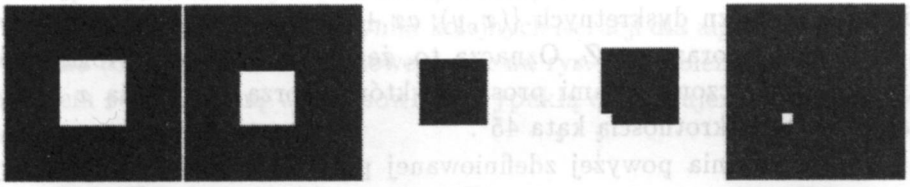
Lemat 3.1 *Niech* $A, B, X \subseteq \mathbf{E}^d$, $h \in \mathbf{E}^d$, $r \in \mathbf{E}$, $r > 0$. *Zachodzą wtedy zależności*

$$X_h \bigotimes (A, B) = [X \bigotimes (A, B)]_h, \tag{3.4}$$

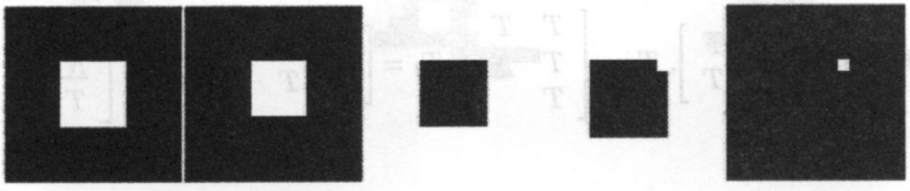
$$X^c \bigotimes (A, B) = X \bigotimes (B, A), \tag{3.5}$$

$$X \bigotimes (A_h, B_h) = [X \bigotimes (A, B)]_h, \tag{3.6}$$

$$rX \bigotimes (rA, rB) = r[X \bigotimes (A, B)]. \tag{3.7}$$



a)



b)

Rysunek 3.1: Przykłady operacji trafi – nie trafi. (a) Wykrywanie lewego dolnego narożnika. (b) Wykrywanie prawego górnego narożnika. Kolejne rysunki w danym wierszu przedstawiają: zbiór X, $X \ominus A$, X^c, $X^c \ominus B$, zbiór wynikowy $X \bigotimes (A, B)$.

Poniżej będą przedstawione dwie dalsze operacje niemonotoniczne, które otrzymuje się z operacji trafi – nie trafi. Są to:

- operacja pogrubiająca, zdefiniowana następująco

$$X \bigoplus (A, B) = X \bigcup (X \bigotimes (A, B)), \tag{3.8}$$

- operacja pocieniająca, zdefiniowana równaniem

$$X \bigodot (A, B) = X \backslash (X \bigotimes (A, B)). \tag{3.9}$$

Operacja pogrubiająca i pocieniająca są operacjami komplementarnymi, co wyraża poniższa zależność

$$X^c \bigoplus (A, B) = (X \bigodot (B, A))^c. \tag{3.10}$$

Operacja pogrubiająca będzie zastosowana poniżej do znajdowania powłoki wypukłej danego zbioru, a operacja pocieniająca – do znajdowania szkieletu.

3.2 Powłoka wypukła

W przypadku ogólnym wypukłość brył jest zwykle definiowana w odniesieniu do brył w przestrzeni euklidesowej n–wymiarowej. Poniżej rozpatrzona będzie pewna modyfikacja definicji wypukłości wynikająca z faktu, że mamy do czynienia z obiektami dyskretnymi w przestrzeni $\mathbf{Z}^2$, i że są one modyfikowane przy użyciu skończonych elementów strukturujących. Dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbf{Z}^2$ zdefiniujemy powłokę wypukłą jako przecięcie półpłaszczyzn dyskretnych $\{(x,y)\colon ax + by \leq c,\ x,y \in \mathbf{Z}\}$, przy czym $a,b = -1,0,1$ oraz $c \in \mathbf{Z}$. Oznacza to, że rozpatrywana powłoka wypukła jest ograniczona liniami prostymi, które tworzą kąt z osią x będący całkowitą wielokrotnością kąta 45^o.

Do utworzenia powyżej zdefiniowanej powłoki wypukłej można użyć następujących ośmiu elementów strukturujących

$$T_1 = \begin{bmatrix} T & T & T \\ & \underline{N} & T \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} T & T \\ T & \underline{N} \\ T & \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} T & \underline{N} & \\ T & T & T \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} & T \\ \underline{N} & T \\ T & T \end{bmatrix},$$

$$T_5 = \begin{bmatrix} T & T & T \\ T & \underline{N} & \end{bmatrix}, \quad T_6 = \begin{bmatrix} T & \\ T & \underline{N} \\ T & T \end{bmatrix}, \quad T_7 = \begin{bmatrix} & \underline{N} & T \\ T & T & T \end{bmatrix}, \quad T_8 = \begin{bmatrix} T & T \\ \underline{N} & T \\ & T \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Algorytm znajdowania powłoki wypukłej ma postać

$$\psi(X) = \left(\ldots((X \bigoplus T_1) \bigoplus T_2) \bigoplus \ldots \bigoplus T_8\right). \tag{3.12}$$

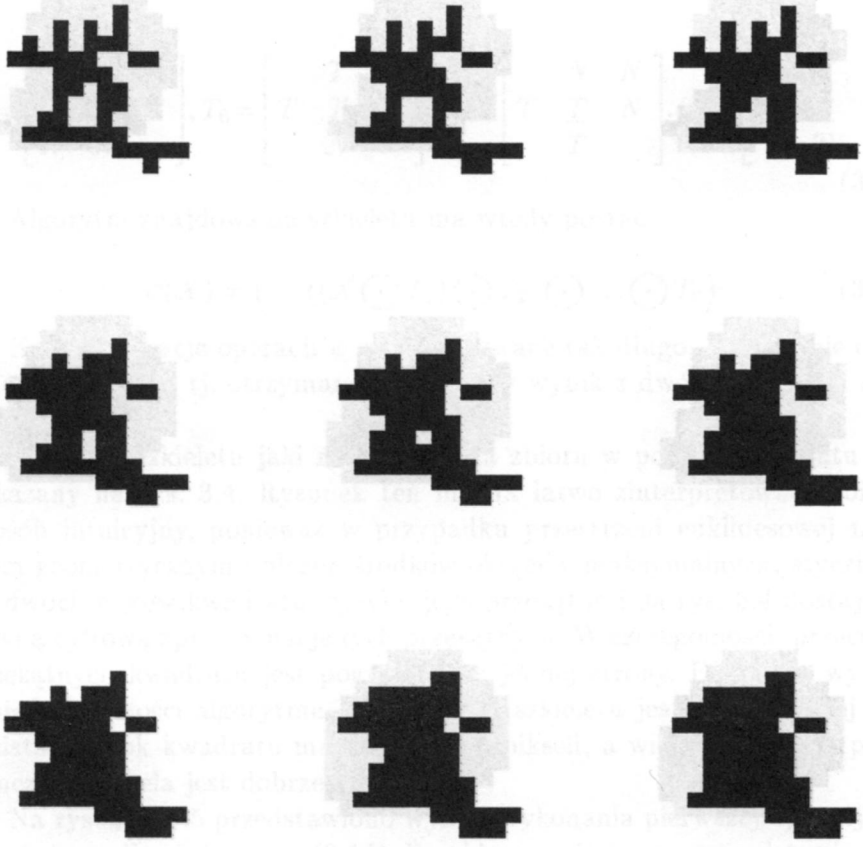
Kolejne iteracje operacji ψ są wykonywane tak długo, aż zostanie osiągnięta zbieżność, tj. otrzymamy identyczny wynik z dwóch kolejnych operacji.

Na rysunku 3.2 przedstawiono wyniki wykonania pierwszej operacji algorytmu według równania (3.12) dla zbioru wejściowego przedstawionego na lewej górnej pozycji na tym rysunku. Kolejne wyniki są uszeregowane wierszami.

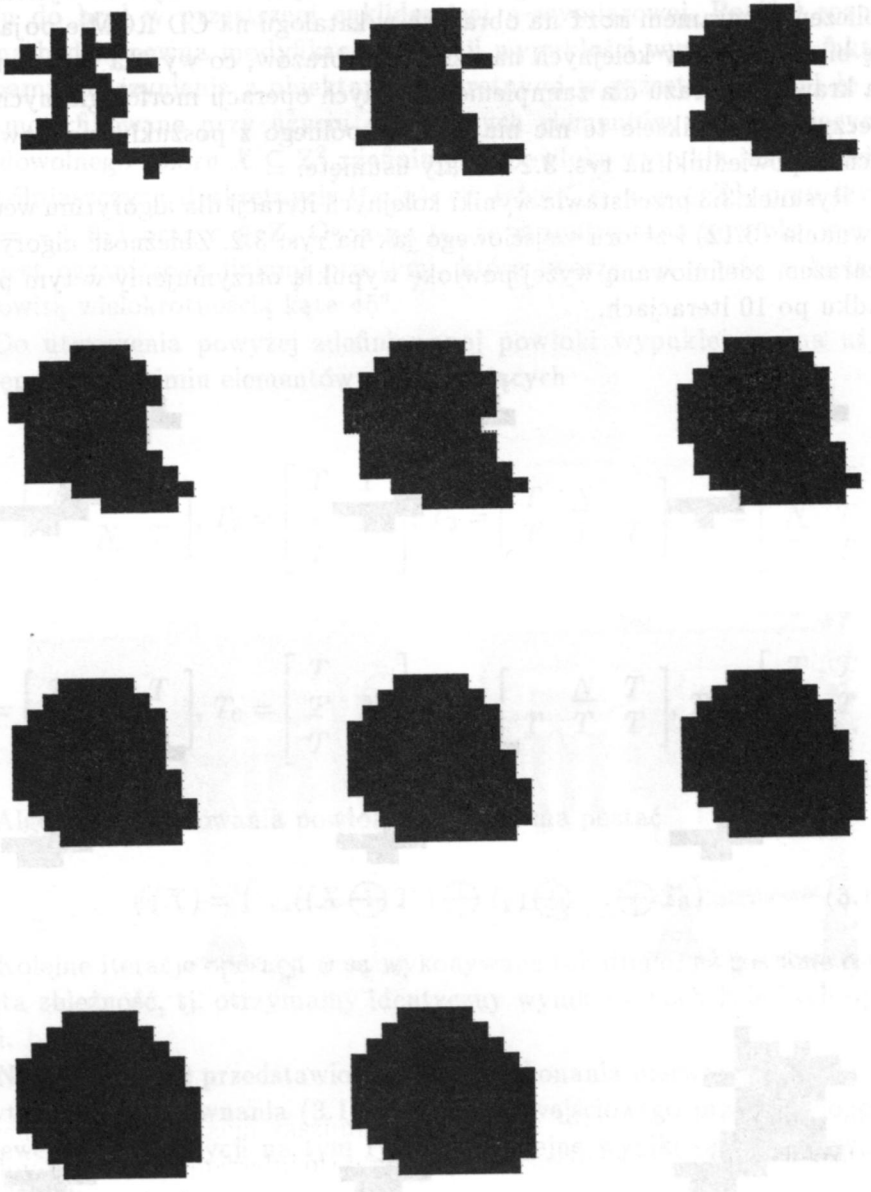
Do wyników tych jest potrzebny następujący komentarz. Porównując rysunek 3.2 z obrazami zamieszczonymi na CD ROMie w katalogu MORPH\RESULTS\CONVHULL stwierdzamy, że obrazy na rys. 3.2 zostały zanegowane w stosunku do obrazów z CD ROMu, tj. poziom szarości 0 został zastąpiony przez 255 (logiczną jedynkę), a poziom szarości 255

został zastąpiony przez 0 (logiczne zero). Negacje takie będą często stosowane w dalszych rozważaniach, ponieważ pozwalają na polepszenie wizualizacji wyników. Prócz tego można zauważyć, że w wyniku wykonania obliczeń programem `morf` na obrazach w katalogu na CD ROMie pojawiły się białe piksele w kolejnych narożnikach obrazów, co wynika z warunków na krawędzi obrazu dla zaimplementowanych operacji morfologicznych. W rzeczywistości piksele te nie mają nic wspólnego z poszukiwaną powłoką i ich odpowiedniki na rys. 3.2 zostały usunięte.

Rysunek 3.3 przedstawia wyniki kolejnych iteracji dla algorytmu według równania (3.12) i zbioru wejściowego jak na rys. 3.2. Zbieżność algorytmu i zarazem zdefiniowaną wyżej powłokę wypukłą otrzymujemy w tym przypadku po 10 iteracjach.



Rysunek 3.2: Wyniki wykonania operacji w pierwszej iteracji algorytmu znajdującego powłokę wypukłą. Na lewej górnej pozycji jest obraz wejściowy.



Rysunek 3.3: Wyniki poszczególnych iteracji algorytmu znajdującego powłokę wypukłą. Na lewej górnej pozycji jest obraz wejściowy.

3.3 Szkielet

W przestrzeni euklidesowej szkielet zbioru X jest definiowany jako zbiór środków okręgów maksymalnych mieszczących się w zbiorze X. Przez okrąg maksymalny rozumiemy przy tym taki okrąg, który nie zawiera się w innym okręgu, który leży całkowicie w zbiorze X.

Do znalezienia dyskretnej wersji szkieletu można zastosować algorytm pocieniający używający następujących ośmiu elementów strukturujących

$$T_1=\begin{bmatrix} T & T & T \\ & \underline{T} & \\ N & N & N \end{bmatrix}, T_2=\begin{bmatrix} T & & N \\ T & \underline{T} & N \\ T & & N \end{bmatrix}, T_3=\begin{bmatrix} N & N & N \\ & \underline{T} & \\ T & T & T \end{bmatrix}, T_4=\begin{bmatrix} N & & T \\ N & \underline{T} & T \\ N & & T \end{bmatrix}.$$

$$T_5=\begin{bmatrix} & T & \\ N & \underline{T} & T \\ N & N & \end{bmatrix}, T_6=\begin{bmatrix} & T & \\ T & \underline{T} & N \\ & N & N \end{bmatrix}, T_7=\begin{bmatrix} & N & N \\ T & \underline{T} & N \\ & T & \end{bmatrix}, T_8=\begin{bmatrix} N & N & \\ N & \underline{T} & T \\ & T & \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

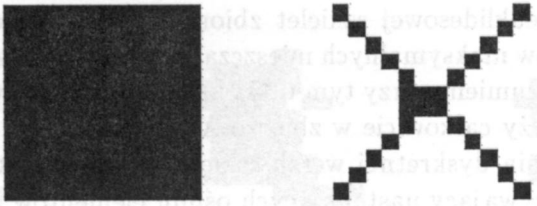
Algorytm znajdowania szkieletu ma wtedy postać

$$\psi(X)=\left(\ldots((X \odot T_1) \odot T_2) \odot \ldots \odot T_8\right). \tag{3.14}$$

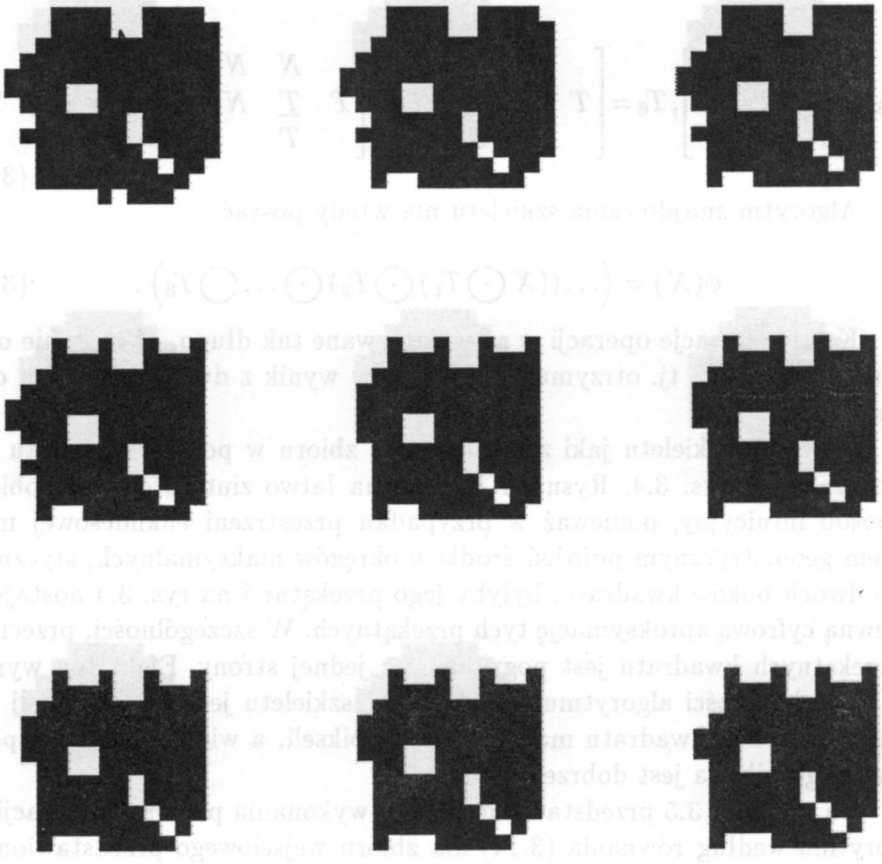
Kolejne iteracje operacji ψ są wykonywane tak długo, aż zostanie osiągnięta zbieżność, tj. otrzymamy identyczny wynik z dwóch kolejnych operacji.

Przykład szkieletu jaki znaleziono dla zbioru w postaci kwadratu jest pokazany na rys. 3.4. Rysunek ten można łatwo zinterpretować sobie w sposób intuicyjny, ponieważ w przypadku przestrzeni euklidesowej miejscem geometrycznym położeń środków okręgów maksymalnych, stycznych do dwóch boków kwadratu, byłyby jego przekątne i na rys. 3.4 dostajemy pewną cyfrową aproksymację tych przekątnych. W szczególności, przecięcie przekątnych kwadratu jest pogrubione z jednej strony. Efekt ten wynika z niedoskonałości algorytmu. Nieidealność szkieletu jest tym bardziej wyrazista, że bok kwadratu ma zaledwie 12 pikseli, a więc błąd nawet pojedynczego piksela jest dobrze widoczny.

Na rysunku 3.5 przedstawiono wyniki wykonania pierwszej operacji algorytmu według równania (3.14) dla zbioru wejściowego przedstawionego na lewej górnej pozycji na tym rysunku. Kolejne wyniki są uszeregowane wierszami.

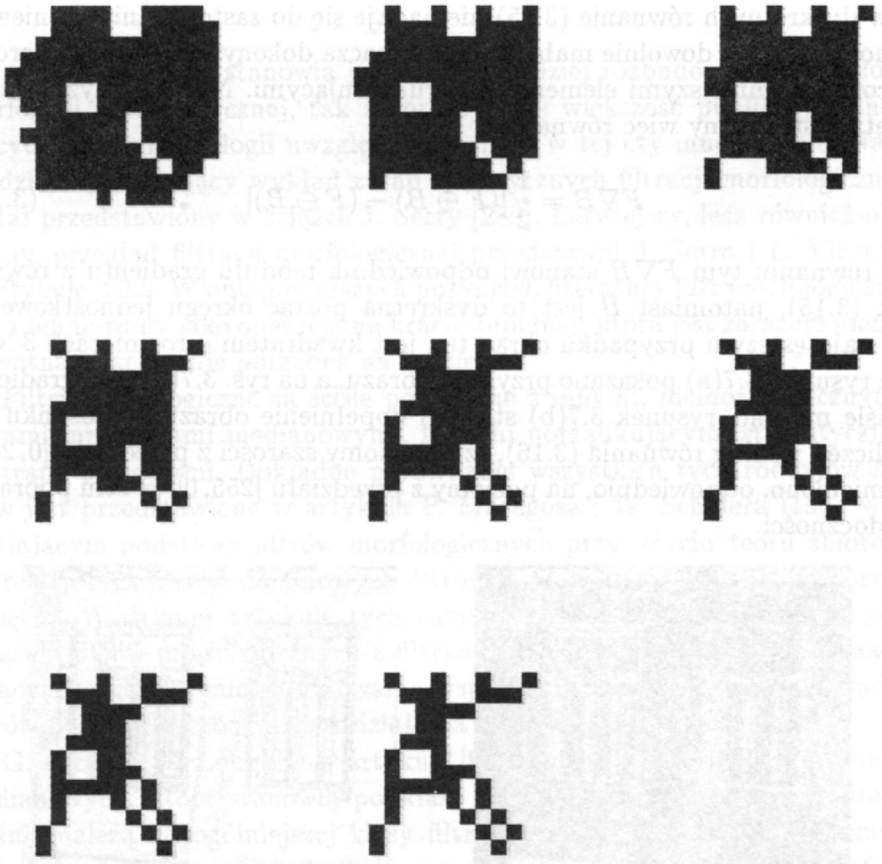


Rysunek 3.4: Przykład znalezionego szkieletu kwadratu.



Rysunek 3.5: Wyniki wykonania operacji w pierwszej iteracji algorytmu znajdującego szkielet. Na lewej górnej pozycji jest obraz wejściowy.

Na rysunku 3.6 pokazano wyniki kolejnych iteracji dla algorytmu według równania (3.14) i zbioru wejściowego jak na rys. 3.5. Zbieżność algorytmu i zarazem zgodny z podaną definicją szkielet otrzymujemy w tym przypadku po 7 iteracjach. Jak można zaobserwować, otrzymany szkielet nieco przypomina szkielet kwadratu, ponieważ również zbiór wejściowy na lewej górnej pozycji ma kształt trochę podobny do kwadratu. Jednak w zbiorze tym są dziury w prawej dolnej ćwiartce i szkielet je „omywa", w wyniku czego powstają tak jakby dwie gałęzie równoległe szkieletu.



Rysunek 3.6: Wyniki poszczególnych iteracji algorytmu znajdującego szkielet. Na lewej górnej pozycji jest obraz wejściowy.

3.4 Gradient morfologiczny

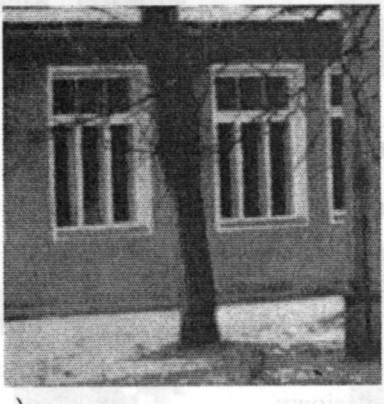
Przypomnijmy z analizy, że dla funkcji F dwóch zmiennych x_1, x_2 o ciągłych pochodnych cząstkowych gradient grad(F) jest zdefiniowany jako 2-wymiarowy wektor $[\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}]$. Wynika stąd, że przez analogię można by zdefiniować gradient morfologiczny jako

$$\text{grad}(F) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} [(F \oplus rB) - (F \ominus rB)], \tag{3.15}$$

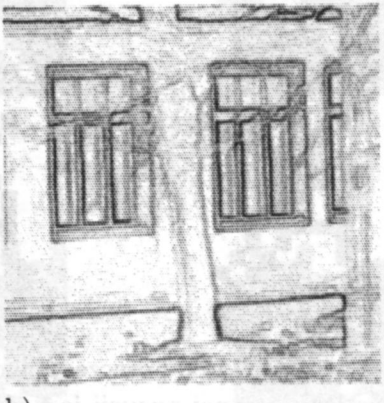
przy czym B – okrąg o promieniu 1, r – liczba rzeczywista. Dla obrazów dyskretnych równanie (3.15) nie nadaje się do zastosowania, ponieważ mnożenie przez dowolnie małą liczbę r oznacza dokonywanie dylacji i erozji z coraz to mniejszymi elementami strukturującymi. Na płaszczyźnie dyskretnej stosujemy więc równanie

$$F \nabla B = \frac{1}{2} [(F \oplus B) - (F \ominus B)]. \tag{3.16}$$

W równaniu tym $F \nabla B$ stanowi odpowiednik modułu gradientu z równania (3.15), natomiast B jest to dyskretna postać okręgu jednostkowego. W najczęstszym przypadku okrąg ten jest kwadratem o rozmiarach 3×3. Na rysunku 3.7(a) pokazano przykład obrazu, a na rys. 3.7(b) jego gradient. Ściśle mówiąc, rysunek 3.7(b) stanowi dopełnienie obrazu w stosunku do obliczeń według równania (3.16), tzn. poziomy szarości z przedziału $[0, 255]$ zamieniono, odpowiednio, na poziomy z przedziału $[255, 0]$, w celu poprawy widoczności.



a)



b)

Rysunek 3.7: Przykład gradientu morfologicznego. (a) Obraz wejściowy. (b) Wynik obliczenia gradientu, po pomnożeniu wartości w pikselach przez współczynnik 4.

Rozdział 4

Filtracja morfologiczna

Filtry morfologiczne stanowią jeden z najbardziej rozbudowanych działów morfologii matematycznej, tak że praktycznie większość publikacji odnoszących się do morfologii uwzględnia te filtry w tej czy innej formie. Najbardziej wyczerpujący wykład zasad teoretycznych filtracji morfologicznej został przedstawiony w książce J. Serry [289]. Łatwiejszy, lecz również obszerny, przegląd filtracji morfologicznej przedstawili J. Serra i L. Vincent w artykule [292]. W obu powyższych pozycjach literatury filtr morfologiczny jest zdefiniowany jako operacja na kracie zupełnej, która jest zarazem idempotentna i zachowuje porządek na kracie.

Filtry morfologiczne są ściśle powiązane z innymi, niemorfologicznymi filtrami, np. filtrami medianowymi, filtrami porządkującymi statystycznie i filtrami stosowymi. Dokładne porównanie wszystkich tych rodzajów filtrów jest przedstawione w artykule P. Maragosa i W. Schafera [196], wyjaśniającym podstawy filtrów morfologicznych przy użyciu teorii zbiorów i w relacji tych filtrów do liniowych filtrów niezmienniczych względem przesunięcia. W drugim artykule tych samych autorów [197] omówiony jest związek filtrów morfologicznych z filtrami medianowymi i filtrami porządkującymi statystycznie. Studiowanie wspomnianych wyżej różnych typów filtrów pomaga w zrozumieniu działania filtrów morfologicznych.

G. Arce i P. McLoughlin w artykule [9] przedstawili teorię filtrów max/-medianowych, które stanowią podklasę filtrów morfologicznych, a jednocześnie należą do ogólniejszej klasy filtrów porządkujących statystycznie. Filtry max/medianowe są skuteczne w usuwaniu szumu i zachowują informację geometryczną w obrazie.

N. Gallagher i G. Wise w artykule [97] przedstawili teoretyczną analizę 1-wymiarowego filtru medianowego. Autorzy udowodnili, że każdy sygnał może być przefiltrowany do jednego i tylko jednego pierwiastka, tj. sygnału niezmienniczego względem filtracji medianowej, przy czym dojście

do pierwiastka jest możliwe po ograniczonej liczbie filtracji. Warunkiem koniecznym i wystarczającym by dany sygnał był pierwiastkiem jest to, by składał się on wyłącznie z sąsiedztw stałych oraz krawędzi, tj. obszarów o zmienności monotonicznej.

K. Ataman i inn. w artykule [13] przeanalizowali własności statystyczne 1-wymiarowego filtru medianowego w przypadku mieszanki szumu impulsowego i szumu gaussowskiego.

J. Astola i inn. w artykule [12] zbadali strukturę pierwiastków standardowych filtrów medianowych, rekursywnych filtrów medianowych oraz hybrydowych filtrów medianowych o skończonej odpowiedzi na impuls (FIR). W szczególności, w artykule [12] omówiono pierwiastki oscylacyjne takich filtrów.

H. Dőhler w artykule [74] przedstawił algorytm generowania sygnałów pierwiastkowych 2-wymiarowych filtrów medianowych o dowolnym kształcie okna. Algorytm ten wykorzystuje ideę specjalnego binarnego sygnału pierwiastkowego, nazwanego najmniejszym obiektem nieznikającym.

T. Nodes i N. Gallagher w artykule [231] przeanalizowali strukturę pierwiastków 2-wymiarowych separowalnych filtrów medianowych. Autorzy udowodnili, że niemal wszystkie obrazy są zbieżne do pierwiastka w wyniku wielokrotnej filtracji separowalnym filtrem medianowym. Podobną analizę przeprowadzili M. McLoughlin i G. Arce w artykule [203] dla rekursywnych, separowalnych filtrów medianowych. Autorzy użyli metody dekompozycji progowej i wykazali, że pierwiastki otrzymane za pomocą filtrów rekursywnych są różne od pierwiastków otrzymywanych przy użyciu filtrów nierekursywnych.

W. Boles i inn. w artykule [38] przedstawili heurystyczny algorytm filtru medianowego dla obrazów binarnych, który charakteryzuje się zmniejszonym zniekształcaniem krawędzi. Filtr ten łączy w sobie własności wygładzające filtru medianowego o wybranej wielkości okna z własnościami zachowywania cech obrazu, charakterystycznymi dla innego filtru medianowego – o oknie mniejszych rozmiarów.

A. Bovik i inn. w artykule [44] rozważyli wpływ filtracji medianowej na następującą po niej estymację i detekcję krawędzi. Autorzy obliczyli prawdopodobieństwa wykrycia fałszywych krawędzi wzdłuż linii poziomych, pionowych oraz ukośnych dla obszarów o stałym poziomie szarości, w przypadku filtrów z oknem o zmiennej wielkości i o kształcie kwadratu, krzyża lub litery x. Ponadto w artykule wyznaczono też prawdopodobieństwo nietrafienia na krawędź w oknie. W artykule założono, że w obrazie występuje addytywny szum gaussowski, który ma niezależny i jednakowy rozkład prawdopodobieństwa w każdym pikselu.

E. Davies w artykule [70] obliczył przesunięcie krawędzi spowodowane

przez filtrację w ciągłych obrazach binarnych i w obrazach z gradacją szarości. W szczególności, autor przeanalizował oddziaływanie filtru medianowego z okrągłym oknem na obiekty okrągłe. W artykule wykazano, że filtr medianowy może wprowadzić znaczne przesunięcie krawędzi w kierunku do środka okręgu. Przesunięcie to występuje również w przypadku, gdy nie istnieje szum w obrazie. Przykłady przefiltrowanych obrazów potwierdzają zmniejszenie wielkości dziur występujących w obiektach. Zjawisko to powoduje, że filtr medianowy nie nadaje się do zastosowania w przemysłowych pomiarach i badaniach obiektów.

G. Yang i T. Huang w artykule [366] przeanalizowali wpływ filtracji medianowej na dokładność estymacji położenia krawędzi 1-wymiarowej przy użyciu metody najmniejszych kwadratów. Krawędź oryginalną stanowi tu funkcja skokowa lub narastająca liniowo, która jest następnie zakłócona przez szum gaussowski, bądź też przez binarny szum symetryczny kanału przesyłowego. W artykule udowodniono, że w przypadku szumu gaussowskiego filtracja medianowa nie poprawia dokładności estymacji, natomiast w przypadku szumu binarnego filtracja medianowa poprawia dokładność estymacji krawędzi przedstawionej funkcją narastającą liniowo.

A. Bovik i inn. w artykule [43] przeanalizowali klasę filtrów używających kombinację liniową filtrów porządkujących statystycznie. Autorzy podali współczynniki takich kombinacji dla przypadku sygnału stałego zakłóconego szumem o uogólnionym rozkładzie wykładniczym, jednakowym i niezależnym w każdym pikselu.

F. Pasian w artykule [241] przedstawił wyniki doświadczalne odnoszące się do wydajności filtrów porządkujących statystycznie. Wyniki te wskazują na to, że wydajność filtrów zależy silnie od algorytmu sortującego.

P. Wendt i inn. w artykule [350] przeanalizowali klasę filtrów stosowych, tj. filtrów do których można stosować dekompozycję względem progowania oraz nakładania stosowego. Własność ta jest również charakterystyczna dla filtrów uśredniających, porządkujących statystycznie i filtrów morfologicznych. Autorzy omówili własności deterministyczne 1-wymiarowych filtrów stosowych, szczególnie w odniesieniu do sygnałów pierwiastkowych. Ponadto w artykule przeanalizowano własności statystyczne 1-wymiarowych filtrów stosowych.

Q. Wang i inn. w artykule [347] przeanalizowali własności deterministyczne pierwiastków filtrów morfologicznych typu otwarcie, domknięcie, a także filtrów typu domknięcie-otwarcie CO oraz otwarcie-domknięcie OC. Własności te autorzy wykorzystali przy kodowaniu obrazów poddanych kompresji.

M. Chen i P. Yan w artykule [57] udowodnili, że filtry morfologiczne są korzystniejsze od filtrów gaussowskich. Autorzy przeprowadzili analizę mor-

fologicznego otwarcia obrazu binarnego za pomocą ciągu dysków o zwiększającym się współczynniku skali (tj. promieniu dysku). W artykule udowodniono, że liczba przejść przez zero funkcji krzywizny konturu obiektu nie zwiększa się przy zwiększaniu promienia dysku.

D. Schonfeld i J. Goutsias w artykule [287] przedstawili analizę teoretyczną filtrów morfologicznych zastosowanych do restauracji obrazu. W artykule omówiono dwie klasy filtrów. Pierwsza z nich to klasa filtrów przemiennych, która obejmuje m.in. filtry CO oraz OC rozważane poniżej. Druga klasa to klasa sekwencyjnych filtrów przemiennych o wzrastających rozmiarach. Autorzy wykazali, że sekwencyjne filtry przemienne najlepiej w pewnym sensie zachowują gładkość kształtów geometrycznych w obrazach niezaszumionych, a zarazem najlepiej usuwają szum.

J. Song i E. Delp w artykule [311] przeanalizowali działanie filtrów z wielokrotnymi funkcjami strukturującymi. Dokładny opis działania tego rodzaju filtrów będzie przedstawiony w podrozdziale 4.2.

W. Gong i inn. w artykule [106] przedstawili filtr, który używa elementu strukturującego typu kontur – struktura i skutecznie usuwa szum impulsowy nie wprowadzając zniekształceń w obrazie.

I. Pitas i A. Venetsanopoulos w artykule [246] opisali strukturę uogólnionego filtru medianowego, łączącą w sobie filtr medianowy, filtr porządkujący statystycznie oraz filtr morfologiczny. Moduł filtru ugólnionego charakteryzuje się przy tym dużą równoległością obliczeń, a jego działanie jest podobne do filtru medianowego w połączeniu z filtrem liniowym o skończonej odpowiedzi impulsowej.

C. Rey i R. Ward w artykule [263] przeanalizowali własności sparametryzowanej rodziny filtrów, dla której można wybrać poziom równowagi między efektywnością usuwania szumu a dokładnością odtwarzania krawędzi. Poziom szarości w pikselu obrazu wyjściowego jest obliczany jako ważona suma poziomów szarości w sąsiedztwie, przy czym użyte wagi są zależne od poziomów szarości w sąsiedztwie. W przypadku tym można użyć mediany jako miary ufności w otrzymaną wartość szarości dla rozważanego piksela.

F. Cheng i A. Venetsanopulos w artykule [61] omówili adaptacyjne filtry morfologiczne. W artykule tym wprowadzono dwie nowe operacje morfologiczne: nową operację otwarcia NOP oraz nową operację domknięcia NCP. Operacje te są wykonywane przy użyciu płaskiego elementu strukturującego, który jest charakteryzowany za pomocą liczby n wskazującej, ile pikseli należy do spójnego obszaru stanowiącego element strukturujący. NOP daje jako wartość wyjściową w danym pikselu najwyższą wartość otrzymaną w wyniku zwyczajnego otwarcia (opisanego w rozdz. 2) z dowolnym elementem strukturującym, ale posiadającym n pikseli należących

do obszaru spójnego. Wyniki otrzymywane przy użyciu NOP, podobnie jak i NCP, nie zależą od kierunku na płaszczyźnie i są zależne od liczby pikseli w elemencie strukturującym. Idea nowych operacji otwarcia i domknięcia została zastosowana do budowy filtru adaptacyjnego. Filtr ten pozostawia w obrazie wszystkie obiekty, które mają więcej lub tyle samo pikseli co element strukturujący, a jednocześnie usuwa wszystkie detale, które mają mniej pikseli.

W niniejszym rozdziale przedstawimy zasady filtracji morfologicznej i podamy szereg twierdzeń i przykładów ilustrujących działanie wybranych filtrów. W szczególności, będą uwzględnione następujące rodzaje filtrów:

1. Filtry CO i OC.
2. Filtry z wielokrotną funkcją strukturującą (podkatalog MULTFILT w katalogu MORPH\RESULTS na CD ROMie).
3. Przemienne filtry sekwencyjne (podkatalog ALTFILT).

4.1 Przykłady filtracji morfologicznej

Filtrację morfologiczną zademonstrujemy na przykładzie często stosowanych filtrów typu domknięcie-otwarcie CO oraz otwarcie-domknięcie OC.

Filtr CO można przedstawić za pomocą równania

$$g = (f \bullet k) \circ k, \tag{4.1}$$

w którym f oznacza wejściowy obraz z gradacją szarości, k – funkcję strukturującą, natomiast g jest to obraz wyjściowy.

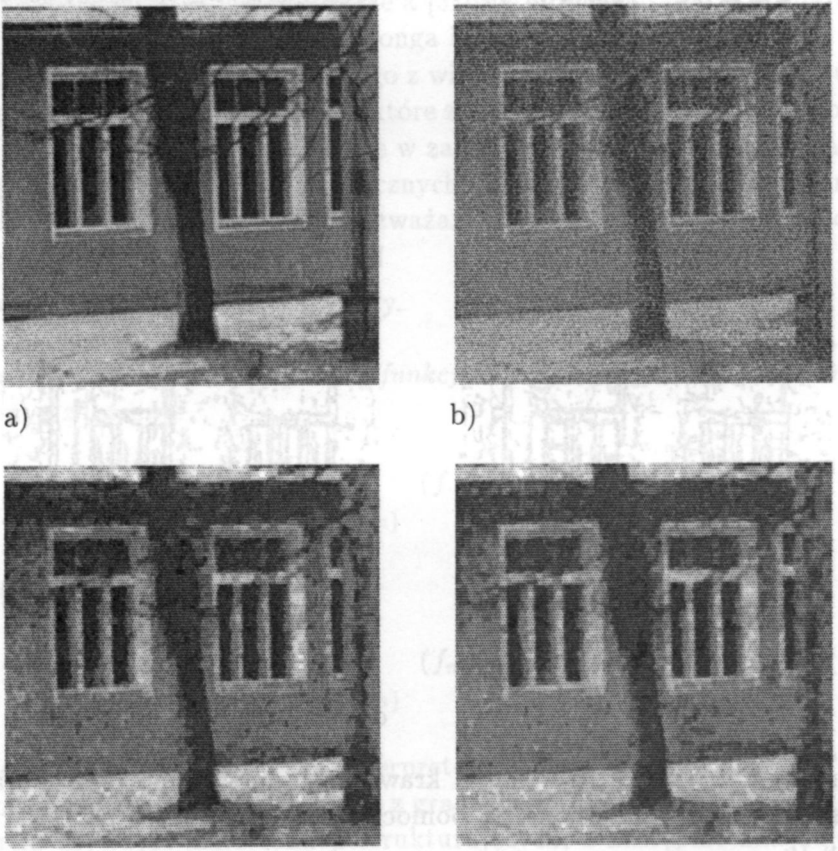
Podobne równanie dla filtru OC ma postać

$$g = (f \circ k) \bullet k. \tag{4.2}$$

Przykład morfologicznej filtracji szumu w obrazach rzeczywistych jest pokazany na rys. 4.1(a)–(d). Rysunek 4.1(a) przedstawia oryginalny obraz domku (o 64 poziomach szarości), natomiast rys. 4.1(b) pokazuje ten sam obraz po zaszumieniu addytywnym szumem gaussowskim o wartości średniej 0 i wariancji 16. Wyniki filtracji z płaskim elementem strukturującym o rozmiarach 3×3 dla filtru CO i OC są zilustrowane, odpowiednio, na rys. 4.1(c) oraz (d). Można zauważyć, że zaszumiony obraz z rys. 4.1(b) ma bardzo drobną teksturę, ponieważ wartość w każdym pikselu zmienia się niezależnie. Obrazy z rysunków (c) i (d) są podobne do oryginału z rys. (a), ale zawierają teksturę bardziej zgrubną, będącą wynikiem filtracji. Rysunek 4.1 można do pewnego stopnia porównać z rys. 2.5, ponieważ rys. 4.1(a) jest powtórzeniem rys. 2.5(a), z tą różnicą, że w rozdz. 2 rozważano obraz niezaszumiony. Wniosek jaki nasuwa się z tych porównań jest następujący. Zastosowanie pojedynczej operacji, np. otwarcia czy domknięcia powoduje powstanie w obrazie stosunkowo dużych obszarów o stałym poziomie szarości. Oznacza to, że operacja taka jest mało „subtelna" i wprowadza dość duże zmiany w obrazie dając wynik, który nie wygląda naturalnie. W przeciwieństwie do operacji pojedynczej, zastosowanie operacji złożonej CO lub OC wywołuje mniejsze zmiany, które są bardziej subtelne. Z tego powodu filtry CO i OC są dość często stosowane.

Jak stwierdzono w [316], filtr morfologiczny, podobnie jak dowolny inny filtr, powinien usunąć szum pozostawiając nienaruszone krawędzie obiektów. Stabilność krawędzi obiektów przy filtracji morfologicznej można potwierdzić analizując mapy krawędzi dla obrazów z rys. 4.1(a)–(d), pokazane, odpowiednio, na rys. 4.2(a)–(d). Rysunek 4.2 przedstawia wyniki surowe otrzymane za pomocą operatora Sobela ([14]). Użyty operator Sobela miał standardową maskę 3×3. Wartości bezwzględne wyjścia detektora dla krawędzi pionowych i poziomych zostały dodane i otrzymana suma

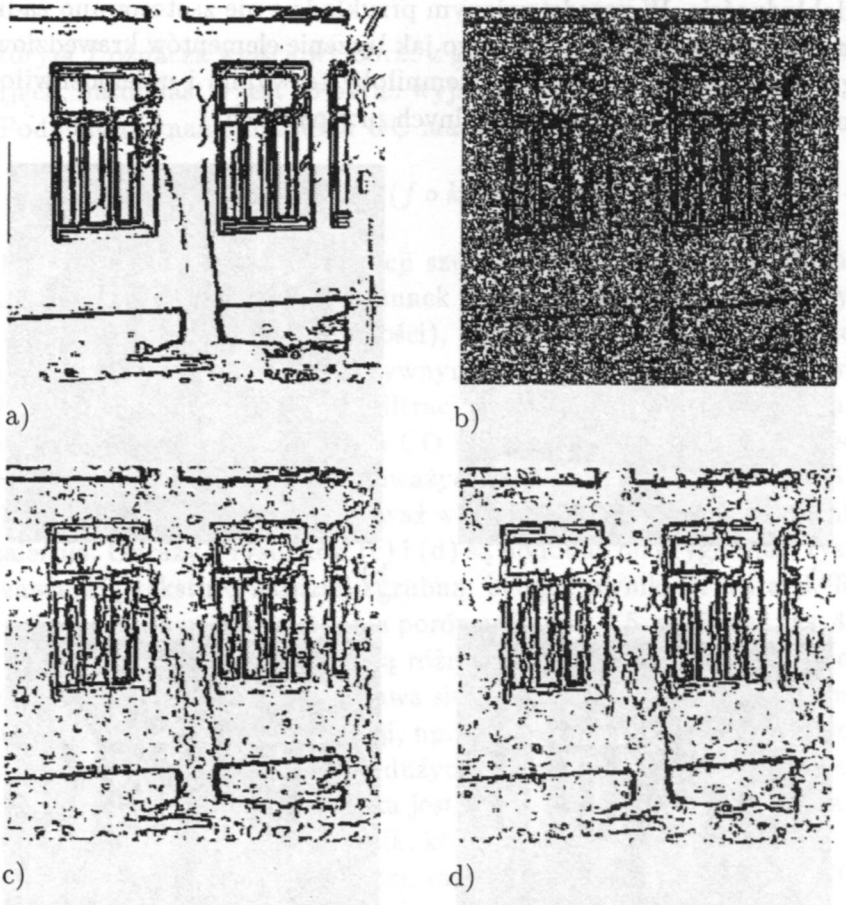
była porównywana z wartością progową dobraną eksperymentalnie. W obrazie zaszumionym wykryto dużą liczbę prawdziwych bądź fałszywych elementów krawędziowych. Obrazy przefiltrowane okazały się znacznie lepsze pod tym względem, ponieważ zawierają dużo mniej fałszywych elementów krawędziowych i w ogólnym zarysie krawędzie na nich przedstawione przypominają krawędzie w obrazie wejściowym (niezaszumionym) z niezłą dokładnością. W przedstawionym przykładzie nie zastosowano żadnego przetwarzania dodatkowego, takiego jak łączenie elementów krawędziowych (ang. edge linking), ponieważ zaciemniłoby to wyniki i uniemożliwiło porównywanie krawędzi w poszczególnych przypadkach.



a) b)

c) d)

Rysunek 4.1: Wyniki filtracji morfologicznej z elementem strukturującym 3×3. (a) Oryginalny obraz domku. (b) Obraz zaszumiony szumem gaussowskim. (c) Filtr CO. (d) Filtr OC.



Rysunek 4.2: (a),...,(d) Mapy krawędzi, odpowiednio, dla obrazów z rys. 4.1(a)–(d), znalezione za pomocą operatora Sobela przy wartości progu 16.

4.2 Filtry morfologiczne z wielokrotną funkcją strukturującą

Wadą filtrów morfologicznych rozpatrywanych powyżej jest to, że wprowadzają one teksturę o elementach przypominających wielkością i kształtem elementy strukturujące. Bardziej nowoczesne filtry usuwają szum nie wprowadzając tego rodzaju tekstury. Filtry te używają wielokrotnego elementu strukturującego w miejsce elementu pojedynczego, jak miało to miejsce powyżej, a ponadto łączą w sobie operacje morfologiczne z innymi operacjami na funkcjach lub zbiorach. Jeden przykład takiej filtracji jest wspomniany w artykule R. Stevensona i G. Arce'a [316], a drugi opisany znacznie bardziej wyczerpująco w artykule J. Songa i E. Delpa [311].

Koncepcja filtru morfologicznego z wielokrotnym elementem strukturującym wynika z czterech lematów, które zostały dowiedzione przez J. Songa i E. Delpa w artykule [311], a które w zasadzie są stwierdzeniem własności idempotentnych operacji morfologicznych z wielokrotnym elementem strukturującym. W lematach tych są rozważane obrazy z gradacją szarości oraz funkcje strukturujące.

Lemat pierwszy jest następujący.

Lemat 4.1. *Dla skończonej liczby funkcji strukturujących* $k_1, \ldots, k_n$ *wprowadźmy oznaczenie*

$$f_n = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (f \circ k_i). \tag{4.3}$$

Zachodzi wówczas zależność

$$f_n = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (f_n \circ k_i). \tag{4.4}$$

Powyższe równania można zinterpretować w następujący sposób. Przypuśćmy, że bierzemy dowolny obraz z gradacją szarości f i dokonujemy jego otwarcia używając kilku funkcji strukturujących, a następnie znajdujemy maksimum w każdym pikselu z uzyskanych obrazów. Otrzymany w ten sposób obraz f_n można poddać ponownie tej samej operacji przy użyciu tych samych funkcji strukturujących i otrzymany nowy obraz będzie identyczny z f_n.

Następny lemat jest dualny w stosuku do poprzedniego w tym sensie, że otwarcie jest zastąpione przez domknięcie, a maksimum w każdym pikselu z otrzymanych obrazów zostaje zastąpione przez minimum.

Lemat 4.2. *Dla skończonej liczby funkcji strukturujących $k_1, \ldots, k_n$ wprowadźmy oznaczenie*

$$f_n = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} (f \bullet k_i). \tag{4.5}$$

Zachodzi wówczas zależność

$$f_n = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} (f_n \bullet k_i). \tag{4.6}$$

Dwa następne lematy są stwierdzeniem idempotentności złożeń operacji opisanych w lematach 4.1 i 4.2.

W lemacie 4.3 przeprowadzana jest najpierw operacja według lematu 4.1, a następnie według lematu 4.2.

Lemat 4.3. *Wprowadźmy oznaczenia:*

$$f_{k^n} = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (f \circ k_i), \tag{4.7}$$

$$f^{k^n} = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} (f \bullet k_i) \tag{4.8}$$

oraz

$$g = (f_{k^n})^{k^n}. \tag{4.9}$$

Zachodzi wówczas zależność

$$g = (g_{k^n})^{k^n}. \tag{4.10}$$

Otrzymany obraz g można poddać ponownej operacji przy użyciu tych samych elementów strukturujących i otrzymany obraz ponownie będzie tym samym obrazem g.

Następny lemat jest dualny w stosunku do lematu 4.3.

Lemat 4.4. *Niech f_{k^n} oraz f^{k^n} będą zdefiniowane według równań (4.7) i (4.8). Zachodzi wówczas zależność*

$$g = (g^{k^n})_{k^n}. \tag{4.11}$$

Wniosek, jaki nasuwa się z podanych lematów jest następujący. Wybierając zbiór funkcji strukturujących i wykonując żądane operacje morfologiczne otrzymujemy natychmiast wynik końcowy i dalsze powtarzanie filtracji jest niecelowe.

Intuicyjne wyobrażenie sobie, jak właściwie działa filtr z wielokrotną funkcją strukturującą nie jest łatwe. W celu uwidocznienia działania takiego filtru podano niżej szczegółowy przykład filtracji obrazu binarnego.

Przykład 4.1

Niech będzie dany następujący zbiór czterech elementów strukturujących $K_1, \ldots, K_4$:

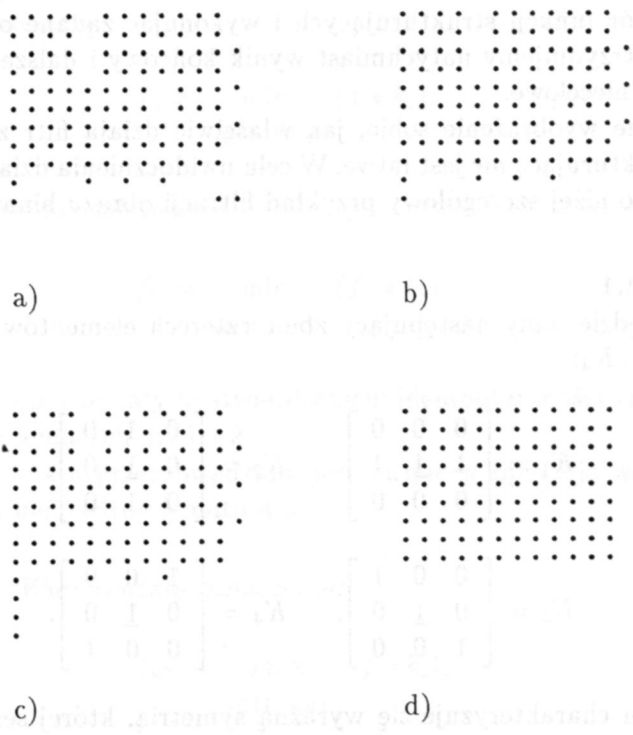
$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zbiór ten charakteryzuje się wyraźną symetrią, której sens polega na tym, by nie uprzywilejować żadnego kierunku na płaszczyźnie.

Obraz binarny, który ma być przefiltrowany jest pokazany na rys. 4.3(a). Obiekt przedstawiony na tym obrazie ma dosyć skomplikowany kształt. W szczególności, brzeg prawy i dolny mają charakter zygzakowaty. Ponadto, używając terminologii geograficznej, występuje też zatoczka oraz półwysep. Obiekt posiada małą dziurę, a w prawym, dolnym rogu występuje wyspa otoczona przez tło.

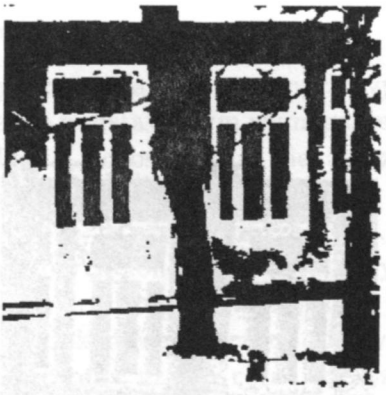
Rysunek 4.3(b) przedstawia sumę teoriomnogościową otwarć obrazu z rys. 4.3(a) przy użyciu danego zbioru elementów strukturujących. Można zauważyć, że wyspa zniknęła. Rysunek 4.3(c) pokazuje wynik przecięcia domknięć obrazu z rys. 4.3(b) przy użyciu tego samego zbioru elementów strukturujących. W wyniku końcowym, na rys. 4.3(c), dziura w obiekcie zniknęła. W przedstawionym przykładzie dwa miejsca zaszumione, tj. wyspa i dziura zostały usunięte, natomiast zatoczka, półwysep i granica zygzakowata pozostały nietknięte. Jest więc oczywistym, że przedstawiony filtr jest efektywny w usuwaniu szumu impulsowego. Dla porównania, rys. 4.3(d) przedstawia wynik filtracji OC przy użyciu pojedynczego elementu strukturującego o rozmiarach 3×3. W przypadku tym dziura i wyspa są również usunięte, ale przy okazji zniknęła zatoczka i półwysep, a krawędź zygzakowata została wyprostowana.



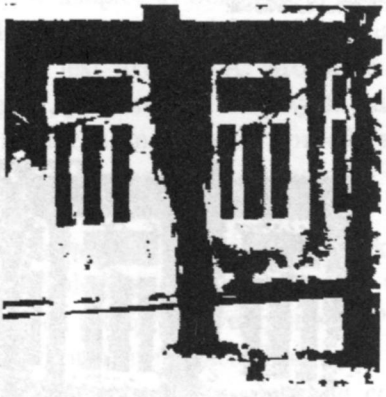
Rysunek 4.3: Filtracja z wielokrotnym elementem strukturującym. (a) Obraz oryginalny. (b) Obraz po otwarciu za pomocą elementu wielokrotnego. (c) Obraz po domknięciu za pomocą elementu wielokrotnego. (d) Obraz z rys. 4(a) po filtracji OC pojedynczym elementem strukturującym 3×3. ■

Na rysunku 4.4 przedstawiono przykład filtracji niezaszumionego obrazu binarnego, natomiast na rys. 4.5 – obrazu zaszumionego. Związek między obrazem wejściowym z rys. 4.4(a) i 4.5(a) jest następujący. Obraz z rys. 4.4(a) otrzymano przez sprogowanie nie pokazanego obrazu z gradacją szarości. Zaszumiając tenże obraz z gradacją szarości addytywnym szumem gaussowskim o identycznym, niezależnym rozkładzie w każdym pikselu otrzymano obraz, który po sprogowaniu ma postać jak na rys. 4.5(a). Obydwa obrazy z rys. 4.4(a) i 4.5(a) poddano filtracji przy użyciu wielokrotnych elementów strukturujących jak w przykładzie 4.1. Rysunki 4.4(b) i 4.5(b) przedstawiają sumę teoriomnogościową otwarć dokonanych przy użyciu elementów $K_1, \ldots, K_4$. Natomiast rysunki 4.4(c) i 4.5(c) pokazują wyniki końcowe, tj. przecięcie domknięć dokonanych przy użyciu tych samych elementów $K_1, \ldots, K_4$.

Podane przykłady są stosunkowo proste. W artykule J. Songa i E. Delpa



a)

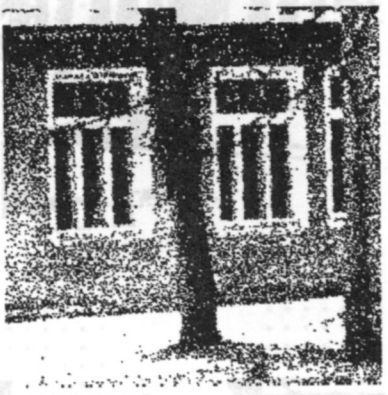


b)

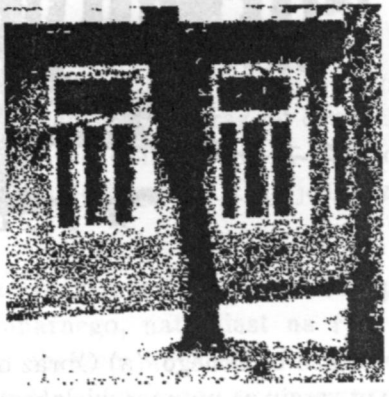
c)

Rysunek 4.4: Filtracja niezaszumionego obrazu binarnego. (a) Obraz oryginalny. (b) Wynik pośredni otrzymany po otwarciu za pomocą wielokrotnego elementu strukturującego. (c) Wynik końcowy.

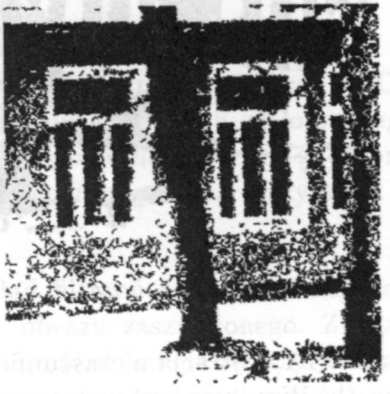
[311] rozważono przypadek 8 elementów strukturujących. Wydaje się, że stosując bardziej skomplikowane zbiory elementów strukturujących można usuwać szum w bardziej skomplikowanych sytuacjach, unikając jednocześnie zmian kształtu i krawędzi obiektów. Można by również rozważyć analizę statystyczną filtrów morfologicznych z wielokrotnymi elementami strukturującymi, choć problem ten bynajmniej nie jest łatwy.



a)



b)



c)

Rysunek 4.5: Filtracja zaszumionego obrazu binarnego. (a) Obraz oryginalny. (b) Wynik pośredni otrzymany po otwarciu za pomocą wielokrotnego elementu strukturującego. (c) Wynik końcowy.

4.3 Przemienne filtry sekwencyjne

4.3.1 Wprowadzenie

Filtry morfologiczne, podobnie jak i filtry innych typów, powinny spełniać szereg wymagań. Zupełnie podstawowym wymaganiem jest to, że filtr powinien usunąć szum z obrazu, pozostawiając nienaruszoną strukturę obrazu, a w szczególności niezmienione kontury obiektów. Zwykle wymaganie to może być spełnione jedynie w przybliżony sposób. Przemienne filtry sekwencyjne są filtrami, których koncepcja została wynaleziona w ostatnich latach. Nazwa przemiennych filtrów sekwencyjnych (ASF) wzięła się stąd, że operacje na obrazach dokonywane przez te filtry stanowią zwykle ciąg złożeń otwarć i domknięć przy użyciu coraz większych elementów strukturujących. Przemienne filtry sekwencyjne pozwalają w znacznym stopniu usuwać szum z obrazu bez zmiany konturów obiektów. Koncepcja przemiennych filtrów sekwencyjnych została przedstawiona w artykule S. Sternberga [315], w książce J. Serry [289] oraz w książce H. Heijmansa [121].

Przykładem pogłębionej analizy przemiennych filtrów filtrów sekwencyjnych jest artykuł A. Moralesa i inn. [212], w którym autorzy znaleźli związek, jaki istnieje między filtrami ASF a twierdzeniami o próbkowaniu morfologicznym obrazów, przedstawionymi w artykule R. Haralicka i inn. [116]. Próbkowanie morfologiczne będzie przedmiotem szczegółowych rozważań w rozdz. 6.

W artykule [212] autorzy wykazali, że można wykorzystać próbkowanie morfologiczne do zwiększenia wydajności obliczeniowej realizacji przemiennych filtrów sekwencyjnych. Pokrótce, zasada postępowania jest w tym przypadku następująca. Ponieważ w kolejnych iteracjach przemiennego filtru sekwencyjnego są używane coraz większe elementy strukturujące, to powoduje to szybki wzrost nakładu obliczeniowego. Dzięki zastosowaniu próbkowania morfologicznego jest możliwe zmniejszenie obrazu przy utrzymaniu niezmiennej wielkości elementu strukturującego i otrzymanie bardzo zbliżonego wyniku. W konsekwencji, nakład obliczeniowy związany z przemiennymi filtrami sekwencyjnymi znacznie spada.

W rozdziale 4.3.2 przedstawiono podstawy teoretyczne przemiennych filtrów sekwencyjnych. Natomiast w rozdz. 4.3.3 pokazano przykłady filtracji przy użyciu tego rodzaju filtrów. Opisane w dodatku A oprogramowanie, a dokładniej sekwencje sterujące dla programu `morf`, stanowią realizację przemiennych filtrów sekwencyjnych ściśle według definicji tych filtrów. Oprogramowanie to umożliwia łatwe wprowadzanie zmian parametrów i własności filtrów. Można też wykorzystać program `morf` do realizacji filtrów według teorii przedstawionej w artykule A. Moralesa i inn. [212].

4.3.2 Podstawy teoretyczne przemiennych filtrów sekwencyjnych

W niniejszym podrozdziale przyjmiemy definicje zgodne z terminologią zastosowaną w książce H. Heijmansa [121], w której filtry są definiowane jako odwzorowania na kratach. W przypadku obrazów cyfrowych kratę zastąpimy zbiorem poziomów szarości T. Natomiast obraz jest to funkcja zdefiniowana jako odwzorowanie przyjętego zbioru pikseli D w zbiór poziomów szarości T. Każdy obraz odpowiada wtedy pewnej funkcji należącej do przestrzeni T^D wszystkich odwzorowań zbioru D w zbiór T. Niech będą dane dwa obrazy f i g. Mówimy, że obraz $f \leq g$, jeśli $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in D$. W przedstawionych poniżej rozważaniach używamy nazwy filtr w zastosowaniu do operacji, która jest monotoniczna i idempotentna. Niech bedą dane dwa filtry ψ i ϕ. Mówimy, że filtr $\phi \leq \psi$, jeśli $\phi(f) \leq \psi(f)$ dla każdego $f \in T^D$. Przyjmujemy też, że złożenie $\phi\psi$ dwóch filtrów ϕ oraz ψ oznacza, że najpierw do jakiegoś obrazu jest zastosowany filtr ψ, a następnie do uzyskanego wyniku jest zastosowany filtr ϕ.

W praktyce, przemienne filtry sekwencyjne są realizowane w postaci złożeń kolejnych otwarć i domknięć.

Niech ψ_n, $n = 1, \ldots, N$, będzie ciągiem filtrów spełniających jeden z następujących dwóch warunków

$$\psi_n\psi_m \leq \psi_n \leq \psi_m\psi_n, \qquad 1 \leq m \leq n \leq N, \tag{4.12}$$

lub

$$\psi_m\psi_n \leq \psi_n \leq \psi_n\psi_m, \qquad 1 \leq m \leq n \leq N. \tag{4.13}$$

Można wówczas sformułować następujący lemat.

Lemat 4.5 *Rozważmy ciąg filtrów $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ spełniających warunek (4.12) lub (4.13). Niech n, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ będą wskaźnikami takimi, że $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n \leq N$. Zachodzi wtedy równość*

$$\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}} \ldots \psi_{i_1}\psi_n = \psi_n, \tag{4.14}$$

a złożenie $\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}} \ldots \psi_{i_1}$ jest filtrem.

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (4.12), to $\psi_n\psi_{i_k} \leq \psi_n$. Stąd $\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}} \leq \psi_n\psi_{i_{k-1}} \leq \psi_n$. Powtarzając przytoczone rozumowanie otrzymujemy $\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}}\psi_{i_{k-2}} \leq \psi_n\psi_{i_{k-2}} \leq \psi_n$. Wykonując dalsze podstawienia znajdujemy ostatecznie $\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}} \ldots \psi_{i_1}\psi_n \leq \psi_n$.

Podobnie $\psi_{i_1}\psi_n \geq \psi_n$, a stąd $\psi_{i_2}\psi_{i_1}\psi_n \geq \psi_{i_2}\psi_n \geq \psi_n$. Po dokonaniu dalszych podstawień otrzymujemy ostatecznie $\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}}\ldots\psi_{i_1}\psi_n \geq \psi_n$.

Ponieważ obie nierówności $\leq$ oraz $\geq$ są prawdziwe, więc równanie (4.14) zostało udowodnione.

Jeżeli złożenie $\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}}\ldots\psi_{i_1}$ jest filtrem, to musi spełniać warunek idempotentności. Ponieważ iloczyn dwóch takich złożeń jest równy $\psi_n\psi_{i_k}\psi_{i_{k-1}}\ldots\psi_{i_1}$, więc warunek idempotentności jest spełniony. ■

Niech $\psi_1,\ldots,\psi_N$ będą filtrami oraz $1 \leq n \leq N$. Wprowadzimy teraz następujące oznaczenie

$$(\psi)_n = \psi_n\psi_{n-1}\ldots\psi_1. \tag{4.15}$$

Z lematu 4.5 wynika bezpośrednio poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 *Rozważmy filtry $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_N$.*
1) Jeżeli jest spełniony warunek (4.12), to $(\psi)_n$ jest filtrem oraz $(\psi)_n \leq \psi_n$.
2) Jeżeli jest spełniony warunek (4.13), to $(\psi)_n$ jest filtrem oraz $(\psi)_n \geq \psi_n$.

Można też sformułować dalsze twierdzenie, którego dowód będzie podany szczegółowo, a mianowicie

Twierdzenie 4.2 *Rozważmy filtry $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_N$.*
1) Jeżeli jest spełniony warunek (4.12), to

$$(\psi)_n(\psi)_m = (\psi)_n \leq (\psi)_m(\psi)_n, \quad n \geq m.$$

2) Jeżeli jest spełniony warunek (4.13), to

$$(\psi)_n(\psi)_m = (\psi)_n \geq (\psi)_m(\psi)_n, \quad n \geq m.$$

Dowód. Udowodnimy najpierw równość w części 1) powyższego twierdzenia. Jeżeli warunek (4.12) jest spełniony, to

$$\begin{aligned}(\psi)_n(\psi)_m &= \psi_n\psi_{n-1}\ldots\psi_1 \ \psi_m\psi_{m-1}\ldots\psi_1 = \\ &= \psi_n\psi_{n-1}\ldots\psi_{m+1}\psi_m\psi_{m-1}\ldots\psi_1 \ \psi_m\psi_{m-1}\ldots\psi_1 \\ &= \psi_n\psi_{n-1}\ldots\psi_{m+1}\psi_m\psi_{m-1}\ldots\psi_1 = (\psi)_n.\end{aligned}$$

Dowód nierówności $(\psi)_n \leq (\psi)_m(\psi)_n$ w części 1) powyższego twierdzenia jest następujący. Ponieważ $\psi_1\psi_n \geq \psi_n$, więc $\psi_2\psi_1\psi_n \geq \psi_2\psi_n \geq \psi_n$. Kontynuując podobne rozważania otrzymujemy ostatecznie $(\psi)_m\psi_n \geq \psi_n$. Stąd $(\psi)_m(\psi)_n = (\psi)_m\psi_n\psi_{n-1}\ldots\psi_1 \geq \psi_n\psi_{n-1}\ldots\psi_1 = (\psi)_n$. ■

Praktyczną metodą otrzymania zbioru filtrów spełniających warunki (4.12) lub (4.13) jest użycie rodziny otwarć i domknięć.

Niech $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ będą zbiorem filtrów w postaci otwarć oraz niech zbiór ten ma następującą własność, zwaną własnością półgrupy

$$\alpha_n\alpha_m = \alpha_n \qquad \text{dla} \qquad n \geq m. \tag{4.16}$$

Podobnie niech $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ będą zbiorem filtrów w postaci domknięć oraz niech zbiór ten ma własność półgrupy

$$\beta_n \beta_m = \beta_n \qquad \text{dla} \qquad n \geq m. \tag{4.17}$$

Dla przyjętego zbioru otwarć $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, posiadającego własność półgrupy (4.16) nierówność w punkcie 1) twierdzenia 4.1 można zastąpić równością $(\alpha)_n = \alpha_n$, wynikającą z faktu, że $\alpha_n \alpha_m = \alpha_m \alpha_n = \alpha_n$ dla $n \geq m$.

Zbiór złożeń $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_N\alpha_N$ spełnia warunek (4.12)

$$(\alpha_n\beta_n)(\alpha_m\beta_m) \leq (\alpha_n\beta_n) \leq (\alpha_m\beta_m)(\alpha_n\beta_n), \qquad 1 \leq m \leq n \leq N. \tag{4.18}$$

Pierwsza nierówność w powyższym wzorze wynika z następujących przekształceń

$$\alpha_n\beta_n\alpha_m\beta_m \leq \alpha_n\beta_n\beta_m = \alpha_n\beta_n.$$

Natomiast nierówność druga wynika z przekształceń

$$\alpha_m\beta_m\alpha_n\beta_n \geq \alpha_m\alpha_n\beta_n = \alpha_n\beta_n.$$

Podobnie można udowodnić, że zbiór złożeń $\beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_2, \ldots, \beta_N\alpha_N$ spełnia warunek (4.13).

Z twierdzenia 4.1 wynika, że złożenie

$$(\alpha\beta)_n = (\alpha_n\beta_n)(\alpha_{n-1}\beta_{n-1})\ldots(\alpha_1\beta_1) \tag{4.19}$$

jest filtrem. Natomiast z twierdzenia 4.2 wynika, że

$$(\alpha\beta)_n(\alpha\beta)_m = (\alpha\beta)_n \leq (\alpha\beta)_m(\alpha\beta)_n, \qquad n \geq m. \tag{4.20}$$

Podobne, dualne zależności otrzymuje się również dla złożenia zdefiniowanego wzorem

$$(\beta\alpha)_n = (\beta_n\alpha_n)(\beta_{n-1}\alpha_{n-1})\ldots(\beta_1\alpha_1), \tag{4.21}$$

które również jest filtrem.

Filtry dane równaniami (4.19) i (4.21) należą do zbioru przemiennych filtrów sekwencyjnych. Filtry te używają elementów strukturujących zwiększających się wraz ze wzrostem n.

Istnieją filtry, które nie spełniają warunków (4.12) i (4.13). Przykładem takich filtrów są filtry $\beta_n\alpha_n\beta_n$ oraz $\alpha_n\beta_n\alpha_n$. Jednakże rodziny omawianych filtrów warunki takie spełniają. W omawianym przypadku sekwencyjnymi filtrami przemiennymi są $(\beta\alpha\beta)_n$ oraz $(\alpha\beta\alpha)_n$.

Rozpatrzmy teraz złożenie $(\beta\alpha\beta)_n$.

Dowód, że $(\beta\alpha\beta)_n(\beta\alpha\beta)_n \geq (\beta\alpha\beta)_n$ jest następujący. Ponieważ zachodzą zależności

$$\begin{aligned}(\beta\alpha\beta)_n &= (\beta_n\alpha_n\beta_n)(\beta_{n-1}\alpha_{n-1}\beta_{n-1})\ldots(\beta_1\alpha_1\beta_1)\\ &= \beta_n(\alpha_n\beta_n\beta_{n-1})(\alpha_{n-1}\beta_{n-1})\ldots(\alpha_2\beta_2\beta_1)(\alpha_1\beta_1)\\ &= \beta_n(\alpha_n\beta_n)(\alpha_{n-1}\beta_{n-1})\ldots(\alpha_1\beta_1) = \beta_n(\alpha\beta)_n,\end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned}(\beta\alpha\beta)_n(\beta\alpha\beta)_n &= \beta_n(\alpha\beta)_n\beta_n(\alpha\beta)_n \geq \beta_n(\alpha\beta)_n(\alpha\beta)_n\\ &= \beta_n(\alpha\beta)_n = (\beta\alpha\beta)_n.\end{aligned}$$

Dowód, że $(\beta\alpha\beta)_n(\beta\alpha\beta)_n \leq (\beta\alpha\beta)_n$ jest natomiast następujący. Ponieważ

$$(\beta\alpha\beta)_n \leq \beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_1 = \beta_n,$$

więc

$$(\beta\alpha\beta)_n(\beta\alpha\beta)_n \leq \beta_n(\beta\alpha\beta)_n = (\beta\alpha\beta)_n.$$

Z udowodnionych nierówności $\leq$ oraz $\geq$ wynika, że $(\beta\alpha\beta)_n$ spełnia warunek idempotentności i jest filtrem.

Można również udowodnić, że filtr $(\beta\alpha\beta)_n$ spełnia warunek podobny do (4.13), a mianowicie

$$(\beta\alpha\beta)_m(\beta\alpha\beta)_n \leq (\beta\alpha\beta)_n = (\beta\alpha\beta)_n(\beta\alpha\beta)_m, \qquad n \geq m. \tag{4.22}$$

Różnica między warunkiem (4.13) a (4.22) polega na tym, że w pierwszym występują dwie nierówności $\leq$, natomiast w drugim występuje jedna nierówność $\leq$ oraz jedna równość $=$.

Podane wyżej wyrażenia analityczne pozwalają na konstruowanie przemiennych filtrów sekwencyjnych. Przykłady takich filtrów są podane w następnym podrozdziale.

4.3.3 Przykłady działania przemiennych filtrów sekwencyjnych (ASF)

Poniżej rozpatrzymy wyniki filtracji obrazów wygenerowanych komputerowo. Obrazy te mają rozmiary 256×256 pikseli oraz 256 poziomów szarości. Do filtracji we wszystkich przypadkach zastosowano elementy strukturujące w postaci kwadratu, a mianowicie

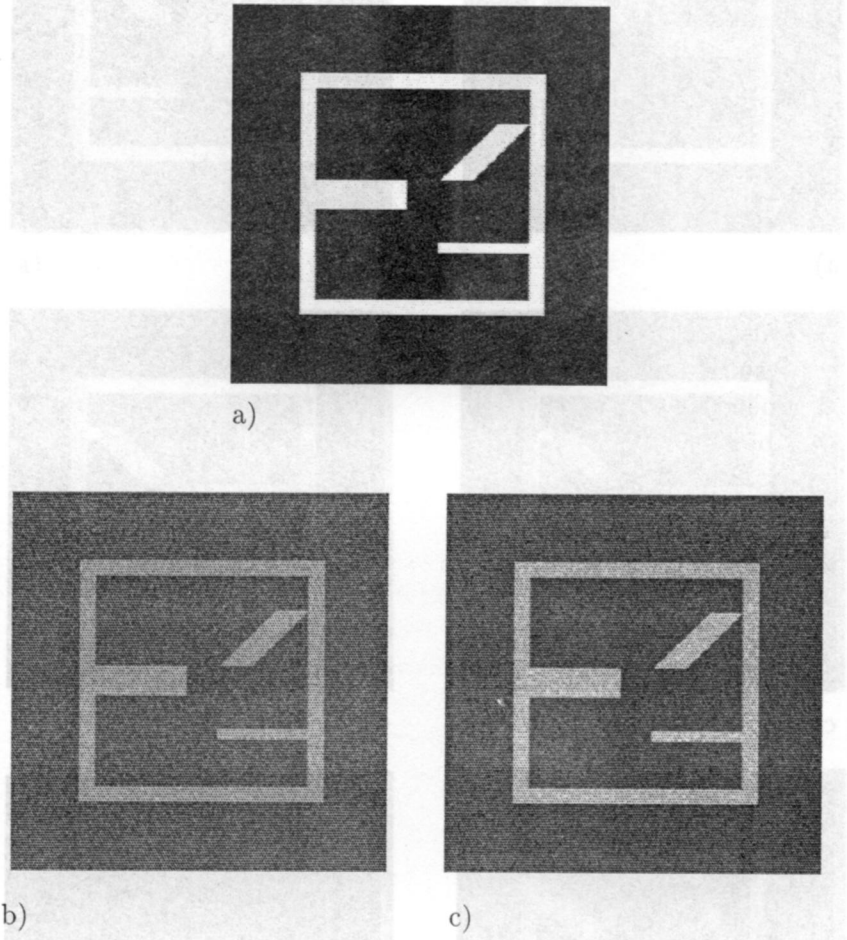
dla n=1 – kwadrat 3 × 3,
dla n=2 – kwadrat 5 × 5,
.....
dla n=6 – kwadrat 13 × 13.

Rysunek 4.6(a) pokazuje oryginalny obraz niezaszumiony. Tło ma poziom szarości 80, a jasny obiekt – poziom 175. Rysunek 4.6(b) przedstawia obraz z rys. 4.6(a) po zaszumieniu szumem normalnym. Szum ten ma niezależny i identyczny w każdym pikselu rozkład o wartości średniej 0 i wariancji 400. Rysunek 4.6(c) przedstawia obraz z rys. 4.6(a) dla przypadku, gdy szum normalny z rys. (b) zastąpiono szumem o rozkładzie równomiernym z przedziału [-60, 60].

Rysunki 4.7(a)–(f) pokazują wyniki filtracji dla obrazu z rys. 4.6(a). Jak można zaobserwować, bardziej istotne zniekształcenia przedstawionego obiektu występują dopiero od rys. 4.7(d), na którym całkowicie zniknął biały pasek w dolnej prawej części obrazu. Natomiast na rysunku 4.7(f) pozostał już tylko biały pasek po lewej stronie.

Rysunki 4.8(a)–(f) pokazują wyniki filtracji dla obrazu z rys. 4.6(b). Deformacja obiektu na kolejnych rysunkach 4.8(a)–(f) ma podobny charakter jak na rys. 4.7. Jednak wygładzający efekt filtracji w stosunku do szumu jest niewątpliwie widoczny, zarówno w obszarze tła jak i obiektu.

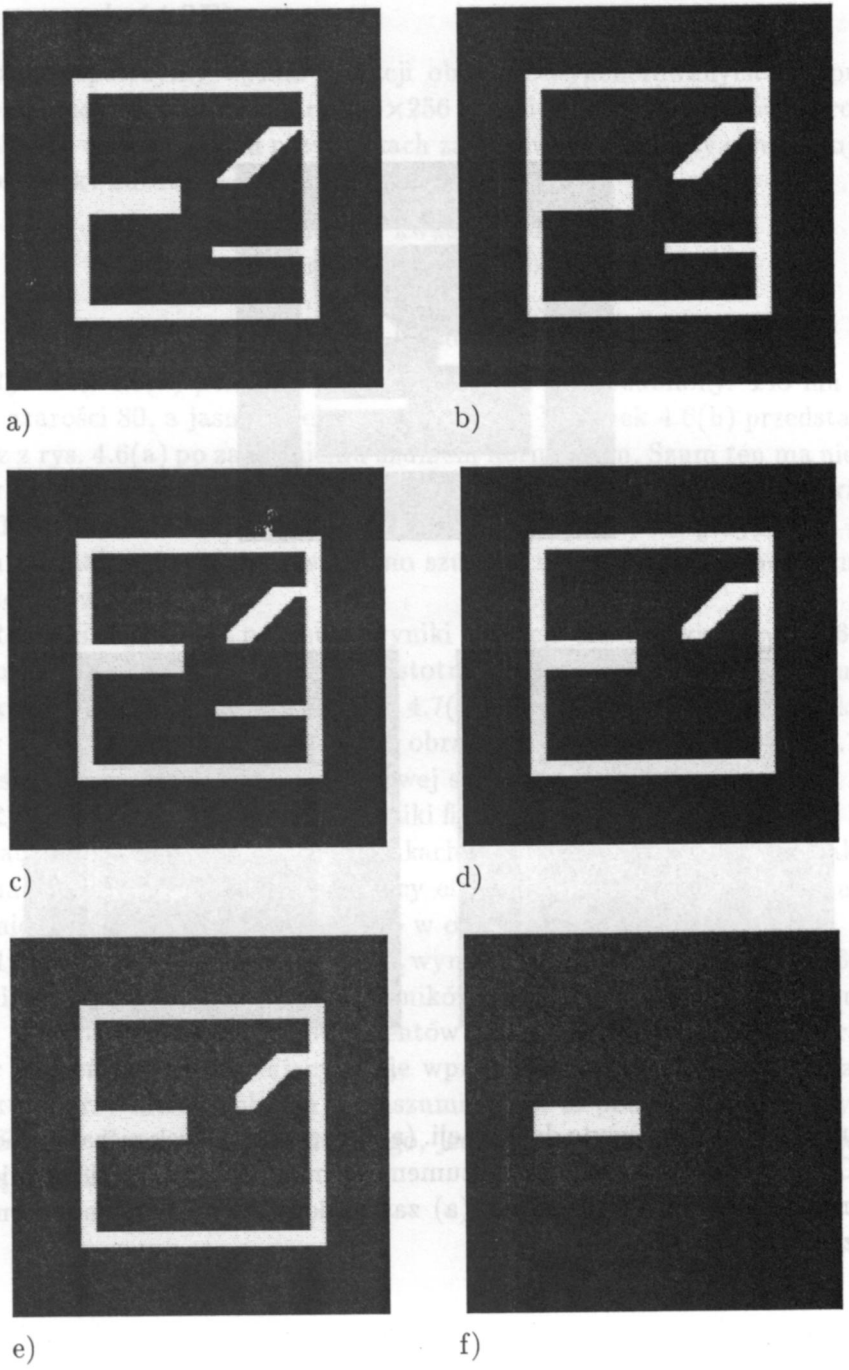
Rysunki 4.9(a)–(f) przedstawiają wyniki filtracji dla obrazu z rys. 4.6(c). Wyniki te są bardzo podobne do wyników z rys. 4.8. Wniosek, jaki nasuwa się z przeprowadzonych eksperymentów jest następujący. Jeżeli dobrany zbiór elementów strukturujących nie wprowadza istotnych zmian kształtu obiektów przy filtracji obrazu niezaszumionego, to podobne wyniki uzyska się również dla obrazu zaszumionego, jednakże w tym drugim przypadku nastąpi odfiltrowanie szumu.



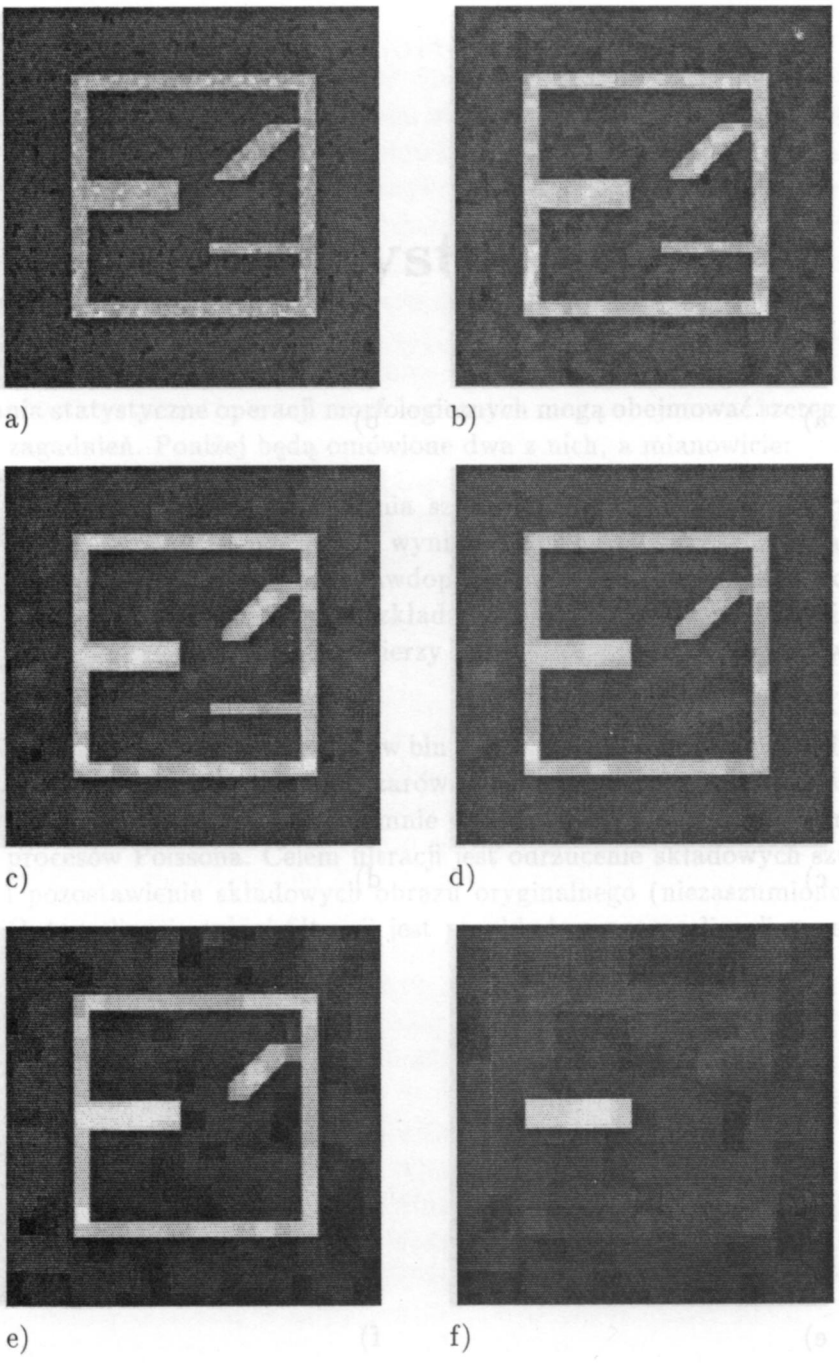
a)

b) c)

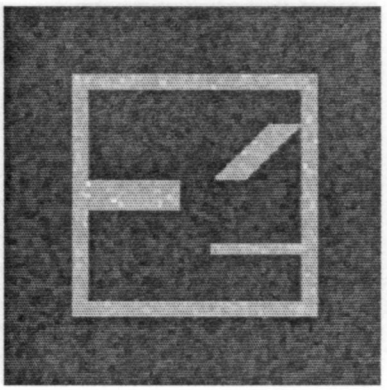
Rysunek 4.6: Obrazy użyte do filtracji. (a) Oryginalny obraz niezaszumiony. (b) Obraz z rys. (a) zaszumiony szumem normalnym o wartości średniej 0 i wariancji 400. (c) Obraz z rys. (a) zaszumiony szumem równomiernym z przedziału [-60, 60].



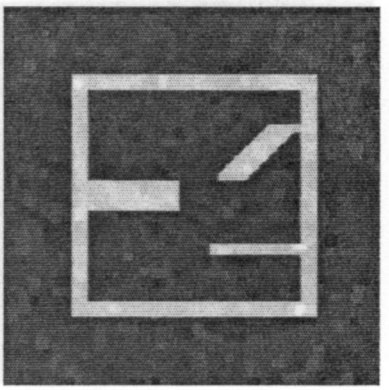
Rysunek 4.7: Wyniki filtracji obrazu z rys. 4.6(a), kolejno dla $n = 1, 2, \ldots, 6$.



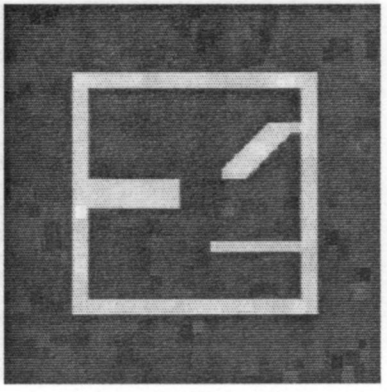
Rysunek 4.8: Wyniki filtracji obrazu z rys. 4.6(b), kolejno dla $n = 1, 2, \ldots, 6$.



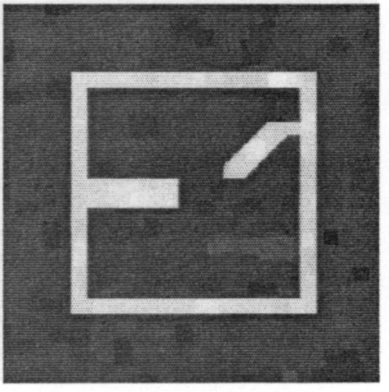
a)



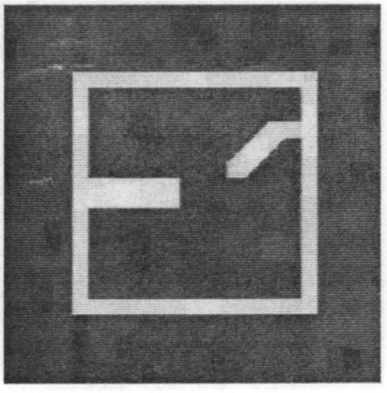
b)



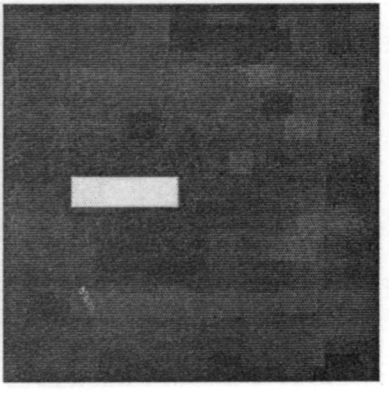
c)



d)



e)



f)

Rysunek 4.9: Wyniki filtracji obrazu z rys. 4.6(c), kolejno dla $n = 1, 2, \ldots, 6$.