

Czesław Bajer

---

Numeryczne modelowanie czasoprzestrzenne  
dynamicznych zagadnień kontaktowych

---

Warszawa 1997



Czesław Bajer

## **Numeryczne modelowanie czasoprzestrzenne dynamicznych zagadnień kontaktowych**

### **STRESZCZENIE**

Dynamiczne problemy kontaktowe, z uwagi na złożoność zjawisk zachodzących w strefie kontaktu, rozwiązywane są często w sposób przybliżony przy użyciu metod numerycznych. Przykładem mogą być zagadnienia kontaktu koła kolejowego z szyną, kształtowanie metali czy też zderzenia. Powszechnie stosowane metody numeryczne mają jednak pewne istotne ograniczenia. Uniemożliwiają na przykład dowolną dyskretyzację obszaru konstrukcji, jednocześnie w przestrzeni i w czasie. Utrudnia to precyzyjne określenie strefy kontaktu, a tym samym daje mniej dokładne wyniki.

W pracy przedstawiono bardziej zaawansowany sposób numerycznego modelowania dynamicznych zagadnień kontaktowych, przy pomocy sformułowań czasoprzestrzennych. Na wstępie wyprowadzono dwa warianty metody elementów czasoprzestrzennych, wykorzystujące przemieszczenia lub prędkości przemieszczeń jako podstawowe wielkości opisujące ruch. Sformułowanie czasoprzestrzenne jest uogólnieniem metody elementów skończonych, stosowanej zwykle do obszarów przestrzennych. Zmienna czasowa przy wykorzystaniu

m.e.s. dyskretyzowana jest w sposób odrębny. W takim przypadku obie dyskretyzacje są rozdzielone. W metodzie elementów czasoprzestrzennych dyskretyzacja odnosi się jednocześnie do przestrzeni i do czasu. Oba te procesy są sprzężone. Wykazano w pracy, że w szczególnym przypadku prezentowane podejście jest identyczne z zastosowaniem metody elementów skończonych do zmiennych i pochodnych przestrzennych, oraz metody różnicowej do zmiennych i pochodnych czasowych. W ogólnym przypadku konstrukcja może być podzielona niestacjonarnie na skończone podobszary. W pracy szczegółowo zbadano własności metody. Błąd amplitudowy, błąd fazowy, tłumienie numeryczne odniesiono do własności innych metod. Szczególny typ elementów czasoprzestrzennych, o kształcie sympleksów, pozwala rozseparować wynikowy układ równań algebraicznych. Unika się wtedy etapu triangularyzacji podczas rozwiązywania układu równań. Interesujące są własności fizyczne elementów symplektycznych, z uwagi na ograniczoną prędkość przepływu informacji między węzłami siatki, w kierunku ukośnych krawędzi elementów. Pozwala to badać nieskończenie długie układy jednowymiarowe, poddane szybko poruszającemu się obciążeniu. Układ nieskończenie wielu elementów skończonych może zostać zredukowany do niewielkiego układu.

Rozważając warunki kontaktu zwrócono uwagę na nieciągłość prędkości w chwili kontaktu. Zmodyfikowano warunek kontaktu. Odpowiednia redukcja prędkości w kroku poprzedzającym penetrację pozwala uzyskać ciągle funkcje prędkości oraz przemieszczeń. Przy tym przemieszczenia wynikają w sposób konsekwentny z prędkości. Drugie podejście do modelowania kontaktu polega na zastosowaniu drobniejszego podziału w czasie w strefie kontaktu. Zastosowano w tym celu czasoprzestrzenne elementy trójkątne. Przedstawione podejście wykorzystano przy symulacji powstawania korugacji koła kolejowego. Rozwiązanie tego problemu, badanego w wielu innych ośrodkach, wykazało falową naturę poligonizacji kół.

Najistotniejszą zaletą stosowania modelowania czasoprzestrzennego jest możliwość adaptacji siatki podziału. Technika  $r$ -adaptacji pozwala przemieszczać węzły w przestrzeni. Metoda adaptacji typu  $h$  umożliwia dodawanie i usuwanie węzłów i w ten sposób rozrzedzanie lub zagęszczanie siatki. Techniki adaptacyjne stosowane w zagadnieniach dynamiki konstrukcji muszą spełniać szczególne wymagania. Ponieważ każda zmiana siatki podziału lub zaburzenie pól przemieszczeń czy prędkości zmienia odpowiedź układu, stosowana powszechnie prosta interpolacja nie daje poprawnych wyników. Przedstawione w pracy czasoprzestrzenne elementy trójkątne, opisane prędkościami węzłów, pozwalają skutecznie stosować adaptację typu  $h$  do analizy drgań konstrukcji, nie tylko w zakresie niskich częstotliwości ale i w zadaniach falowych.

## PODZIĘKOWANIA

Niniejsza praca powstała w Samodzielnej Pracowni Dynamiki i Stateczności Maszyn i Pojazdów IPPT PAN, kierowanej przez profesora Romana Bogacza. Część wyników uzyskano w czasie mojego pobytu w Institut Français de Mécanique Avancée w Clermont–Ferrand, kierowanym przez profesora Clauda Bonthoux.

Wymienionym osobom i instytucjom pragnę złożyć serdeczne podziękowania.

Czesław Bajer



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Sformułowanie metody</b>	<b>29</b>
2.1	Sformułowanie wyrażone w przemieszczeniach . . . . .	30
2.1.1	Przykłady macierzy elementów czasoprzestrzennych . . . . .	36
	Trójkątny element pręta drgającego osiowo . . . . .	36
	Czworościenny element płyty średniej grubości. . . . .	37
2.2	Istnienie i jednoznaczność rozwiązania. . . . .	38
2.3	Sformułowanie wyrażone w prędkościach . . . . .	40
2.3.1	Układ dyskretny o jednym stopniu swobody . . . . .	40
2.3.2	Zbieżność metody . . . . .	46
2.3.3	Błąd fazowy . . . . .	48
2.3.4	Element skończony pręta . . . . .	52
2.3.5	Ogólny przypadek sprężystości . . . . .	56
2.3.6	Przykłady analizy numerycznej . . . . .	58
	Struna obciążona ruchomą siłą . . . . .	59
	Deformacja lepkoplastyczna . . . . .	60
2.4	Elementy trójkątne, wyrażone w prędkościach . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Własności elementów symplektycznych</b>	<b>77</b>
3.1	Własności podziału czasoprzestrzeni . . . . .	78
3.1.1	Efektywność numeryczna . . . . .	81
3.2	Oszacowanie dokładności . . . . .	84
3.3	Ruch dyskretnego układu mas po strunie . . . . .	86
3.3.1	Sformułowanie równowagi układu . . . . .	89
3.3.2	Macierze czasoprzestrzenne poruszającej się masy . . . . .	90
3.3.3	Czasoprzestrzenna dyskretyzacja struny . . . . .	91

3.3.4	Separacja podukładu elementów czasoprzestrzennych . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Warunki kontaktu</b>	<b>97</b>
4.1	Dynamiczne warunki kontaktu . . . . .	101
4.1.1	Prędkość w strefie kontaktu . . . . .	105
4.1.2	Zagadnienie kontaktu tocznego — przykład . . . . .	109
4.2	Duże przemieszczenia . . . . .	117
4.2.1	Duże obroty . . . . .	117
4.2.2	Element ramownicy płaskiej . . . . .	118
4.3	Procedura przyrostowa . . . . .	120
4.3.1	Algorytm krokowy . . . . .	125
	Dokładność algorytmu . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Adaptacja siatki</b>	<b>133</b>
5.1	Błędy w rozwiązaniach przybliżonych . . . . .	136
	Przyczyny złego uwarunkowania zadania . . . . .	137
	Błąd dyskretyzacji . . . . .	138
5.2	R–adaptacja . . . . .	139
5.2.1	Analiza stabilności . . . . .	141
	Stabilność ukośnych elementów czworokątnych pręta drgającego osiowo . . . . .	143
	Stabilność elementów czworokątnych pręta . . . . .	145
	Stabilność elementów trójkątnych pręta . . . . .	147
5.2.2	Zamiana siatki . . . . .	147
5.2.3	Odwzorowanie naprężeń . . . . .	150
5.2.4	Przykład . . . . .	151
5.2.5	Analiza kontaktu tocznego . . . . .	152
	Przykład . . . . .	153
5.3	H–adaptacja . . . . .	155
5.3.1	Nieciągła w czasie adaptacja typu $h$ . . . . .	158
	Przejście przemieszczeniowe . . . . .	158
	Przejście odkształceniowe . . . . .	160
	Przykłady . . . . .	161
5.3.2	Ciągła w czasie adaptacja typu $h$ . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Wnioski</b>	<b>169</b>



<i>SPIS TREŚCI</i>	9
<b>Summary</b>	<b>173</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>175</b>



# Spis rysunków

1.1	Korugacje koła i szyny kolejowej. . . . .	20
1.2	Dynamicznie zgniatane kolumny o przekroju sześciokątnym. . . . .	21
2.1	Czasoprzestrzenny obszar ograniczony obszarami przestrzennymi w chwili początkowej i końcowej. . . . .	30
2.2	Przykłady siatki elementów czasoprzestrzennych: (a) stacjonarnej, (b) niestacjonarnej. . . . .	32
2.3	Czasoprzestrzenny element, wydzielony z czasoprzestrzeni. . . . .	32
2.4	Prędkości $v$ przy różnym kroku czasowym $h$ , przy $\alpha=0,5$ i $\alpha=1,0$ . . . . .	42
2.5	Amplituda przemieszczeń przy wybranych parametrach $\alpha$ . . . . .	43
2.6	Promień spektralny zależny od parametru $\gamma$ przy $\alpha = 0,8$ i $\alpha = 0,9$ . . . . .	44
2.7	Logarytmiczny dekrement tłumienia zależny od parametru $\gamma$ przy $\alpha = 0,8$ i $\alpha = 0,9$ . . . . .	44
2.8	Logarytmiczny dekrement tłumienia w różnych metodach całkowania równania różniczkowego ruchu. . . . .	45
2.9	Przemieszczenia osiowe wspornika przy wybranych parametrach $h$ , $\alpha$ i $\gamma$ . . . . .	47
2.10	Przemieszczenia osiowe wspornika przy $h=10$ , $\alpha=0,8$ , bez tłumienia i z tłumieniem $\gamma=0,1$ . . . . .	48
2.11	Błąd fazowy metody elementów czasoprzestrzennych w sformułowaniu prędkościowym, zależnym od parametru $\alpha$ , na tle różnych metod całkowania równania różniczkowego ruchu. . . . .	51
2.12	Schemat przyjęcia dystrybucji prędkości wirtualnych. . . . .	53
2.13	Prędkość i przemieszczenie w funkcji czasu przy różnych krokach całkowania $h$ ( $v_0 = 0,01$ , $\alpha = 0,75$ ). . . . .	55
2.14	Prędkość i przemieszczenie w funkcji czasu przy różnych krokach całkowania $h$ ( $v_0 = 0,1$ , $\alpha = 0,75$ ). . . . .	56
2.15	Ruch w płaszczyźnie fazowej przy różnych parametrach. . . . .	57

2.16	Schemat struny obciążonej ruchomą siłą. . . . .	59
2.17	Przemieszczenia poprzeczne struny w chwilach równych 0,3, 0,7, 1,0, 1,2 i 1,5 czasu pełnego przejazdu (metoda Fouriera, metoda elementów czasoprzestrzennych). . . . .	60
2.18	Przemieszczenia poprzeczne struny co 0,2 czasu pełnego przejazdu (metoda Fouriera, metoda elementów czasoprzestrzennych). . . . .	61
2.19	Pionowa współrzędna narożnego węzła w czasie. . . . .	62
2.20	Schemat obszaru poddanego ścisnaniu. . . . .	63
2.21	Zdeformowana siatka elementów oraz uogólnione odkształcenia rejestrowane co 10 kroków obliczeniowych. . . . .	64
2.22	Siatka elementów oraz uogólnione odkształcenia po 80 $\mu$ s. . . . .	65
2.23	Schemat ścisnienia lepkoplastycznego cylindra. . . . .	67
2.24	Kolejne fazy deformacji cylindra. . . . .	68
2.25	Rysunki aksonometryczne deformacji cylindra. . . . .	69
2.26	Wynik eksperymentu dynamicznego zgniatania cylindra. . . . .	69
2.27	Układ elementów trójkątnych opisanych prędkościami. . . . .	70
2.28	Przemieszczenia w czasie swobodnego końca pręta przy siatkach trójkątnych i czworokątnej. . . . .	71
2.29	Przykład zagęszczania siatki w czasie i w przestrzeni przy zastosowaniu elementów trójkątnych. . . . .	72
3.1	Przykłady elementów o kształtach multipleksów i sympleksów obiektów jedno, dwu i trójwymiarowych. . . . .	78
3.2	Zapełnienie macierzy globalnej przy trójkątnej siatce elementów. . . . .	79
3.3	Wypełnienie czasoprzestrzeni w zadaniu płaskim. . . . .	80
3.4	Ograniczenie prędkości przepływu informacji ( <i>a</i> ) oraz izotropowe własności czasoprzestrzeni ( <i>b</i> ). . . . .	80
3.5	Podział obszaru konstrukcji na podobszary przy wykorzystaniu elementów symplektycznych. . . . .	81
3.6	Budowa i rozwiązywanie układu równań w przypadku elementów czasoprzestrzennych wyższego rzędu. . . . .	82
3.7	Naprzemieszczone rozmieszczenie węzłów elementów. . . . .	83
3.8	Porównanie kosztu obliczeniowego metody elementów skończonych i różnic centralnych z metodą elementów czasoprzestrzennych. . . . .	84

3.9	Zależność ugięcia belki wspornikowej $w$ od stosunku długości elementu $b$ do wysokości przekroju poprzecznego $H$ . . . . .	86
3.10	Schemat zadania. . . . .	88
3.11	Układy złożone o wielu punktach kontaktu. . . . .	88
3.12	Poruszająca się siła i ograniczone zaangażowanie węzłów siatki w rozwiązaniu. . . . .	89
3.13	Podukład elementów czasoprzestrzennych z współdziałającym układem dyskretnym. . . . .	92
3.14	Obszary stabilności przy zwiększającej się liczbie elementów w obrębie punktów kontaktu. . . . .	93
3.15	Obszary stabilności przy 6 elementach między punktami kontaktu — przypadek bez tłumienia oraz z tłumieniem 0,2. . . . .	94
4.1	Przybliżone modelowanie oddziaływania ciał przy przybliżonej konfiguracji w przedziale czasowym procesu deformacji. . . . .	98
4.2	Konfiguracja przed procesem deformacji oraz przesunięcie punktu $P$ . . . . .	102
4.3	Wykres $(v_T, F_T)$ prawa tarcia Coulomba. . . . .	103
4.4	Wykres $(v_T, F_T)$ prawa tarcia lepkiego: $F_{Tij} = -\alpha  v_{Tji} ^{p-1} v_{Tji}$ . . . . .	103
4.5	Prędkość względna normalna w przedziale czasu $[t_0, t_1]$ . . . . .	105
4.6	Drgania osiowe pręta — rozwój siatki czasoprzestrzennej w strefie kontaktu. . . . .	105
4.7	Zderzenie sprężystego pręta ze sztywną przeszkodą. . . . .	106
4.8	Przemieszczenie punktów pręta bez kontaktu z przeszkodą (lewy rysunek) i z uwzględnieniem kontaktu (prawy rysunek). . . . .	107
4.9	Hamowanie punktu w strefie kontaktu: linia ciągła — ruch swobodny, linia przerywana — ruch po uwzględnieniu ograniczeń. . . . .	107
4.10	Schemat zadania oraz przemieszczenia i prędkości w czasie punktu czołowego $A$ przy wybranych wartościach kroku czasowego $h=0,01, 0,1$ i $0,4$ . . . . .	108
4.11	Prędkość końca pręta po odbiciu przy różnej gęstości podziału przestrzennego, bez tłumienia ( $\gamma = 0$ ) oraz z małym tłumieniem ( $\gamma = 0,2$ ) ( $\alpha = 0,75, h = 0,02$ ). . . . .	109
4.12	Poligonizacja koła kolejowego. . . . .	109
4.13	Siatka podziału przestrzennego przyjęta do obliczeń. . . . .	111
4.14	Schemat zadania. . . . .	112
4.15	Reakcja kontaktu w czasie przy prędkości $\omega=0,3 \cdot 10^{-3}$ rad/s. . . . .	112
4.16	Fragment wykresu reakcji kontaktu w czasie. . . . .	113

4.17	Drugi niezmiennik naprężenia $J_2$ podczas pełnego obrotu przy prędkości $\omega=0,30\cdot 10^{-3}$ rad/s [MPa]. . . . .	113
4.18	Zależność liczby cykli reakcji $n$ i jej maksymalnej wartości $R$ od prędkości kątowej $\omega$ . . . . .	114
4.19	Drugi niezmiennik naprężenia $J_2$ podczas pełnego obrotu przy prędkości $\omega=0,52\cdot 10^{-3}$ rad/s [MPa]. . . . .	115
4.20	Rozkład prędkości w kolejnych etapach. . . . .	116
4.21	Przemieszczenia elementu ramownicy płaskiej. . . . .	118
4.22	Element ramownicy w chwili $t_i$ i $t_{i+1}$ . . . . .	120
4.23	Schemat obliczeń w przypadku dużych przemieszczeń. . . . .	121
4.24	Odbicie sprężystego okręgu. . . . .	122
4.25	Odbicie koła z ciągnami. . . . .	122
4.26	Nieprostokątny element czasoprzestrzenny (obiekt jednowymiarowy). . . . .	124
4.27	Schemat warstwy czasowej i wyznaczone w jej obrębie wielkości. . . . .	126
4.28	Przyrostowe rozwiązanie równania nieliniowego z poprawką obciążenia $F_i^K + F_i^M - F_i$ . . . . .	126
4.29	Dokładność algorytmu przyrostowego przy różnym kroku czasowym. . . . .	130
5.1	Drgania swobodne pręta modelowanego siatką 5 i 10 węzłową, oraz przy adaptacji (przemieszczenia w czasie swobodnego końca). . . . .	135
5.2	Rozbieżność drgań swobodnych pręta przy zastosowaniu interpolacji w $h$ -adaptacji . . . . .	136
5.3	Przykład modyfikacji siatki konstrukcji jednowymiarowej. . . . .	140
5.4	Przemieszczenia końca pręta przy współczynniku adaptacji: 0,0, 0,25, 0,50 i 0,75. . . . .	140
5.5	Przemieszczenia węzłów w czasie będące wynikiem adaptacji. . . . .	141
5.6	Skośny czworokątny element pręta . . . . .	143
5.7	Obszary stabilności przy różnych współczynnikach $\alpha$ . . . . .	144
5.8	Obszar stabilności zadania przy siatce czworokątnej. . . . .	147
5.9	Obszary stabilności elementów czworokątnych przy różnych współczynnikach $\alpha$ . . . . .	148
5.10	Obszar stabilności zadania przy siatce trójkątnej. . . . .	149
5.11	Siatka czworokątna sprawdzana ze względu na skrzywienie. . . . .	150
5.12	Zmiany pola elementów podczas rzutowania. . . . .	152
5.13	Zderzenie pręta z przeszkodą. . . . .	152

5.14 Przesunięcie poziome swobodnego końca pręta: (a) stała i adaptowana siatka, (b) wybrane gęstości siatek. . . . .	153
5.15 Przesunięcie poziome swobodnego końca pręta w zależności od $\gamma$ i $h$ . . .	154
5.16 Schemat walcowanego obustronnie pasma. . . . .	154
5.17 Dostosowanie siatki podziału do koncentracji naprężeń (oznaczono położenie środka walca). . . . .	156
5.18 Odkształcenie krawędzi walcowanej (mnożnik 50) (zmienna siatka podziału)	157
5.19 Zdeformowany kontur w kolejnych etapach (mnożnik przemieszczeń równy 10) (stała siatka podziału). . . . .	158
5.20 Naprężenia $\sigma_x$ w kolejnych etapach. . . . .	159
5.21 Modyfikacja siatki: h-adaptacja. . . . .	160
5.22 Przesunięcia w czasie końca pręta przy podziale na 20 elementów oraz po dwukrotnym zagęszczeniu podziału przy różnych współczynnikach $a$ ( $n = 5$ ).	163
5.23 Przesunięcia początkowe $q_2$ (podział wtórny na 40 elementów) przy różnych wartościach $a$ . . . . .	164
5.24 Przykład adaptacji siatki z zastosowaniem elementów czworokątnych i trójkątnych. . . . .	164
5.25 Zagęszczanie siatki w czasie (a) i ciągła zmiana liczby węzłów (b) — zadania próbne. . . . .	165
5.26 Prędkość końca pręta w czasie — zadanie testowe. . . . .	165
5.27 Prędkość końca pręta w czasie, przy zmianie liczby węzłów. . . . .	166





# Spis tablic

2.1	Stopień zbieżności metod. . . . .	49
2.2	Operatory różnych schematów różnicowych całkowania równania różniczkowego. . . . .	50
2.3	Porównanie wyników testu zderzenia walca. . . . .	66
2.4	Macierze sztywności w różnych schematach. . . . .	73
3.1	Koszt obliczeniowy poszczególnych metod numerycznych. . . . .	85
3.2	Zestawienie wyników obliczeń zadań testowych płyty. . . . .	87
4.1	Schemat obliczeniowy zadania kontaktowego z hamowaniem i zwracaniem pędu. . . . .	110
4.2	Algorytm obliczeń w jednym kroku obliczeniowym. . . . .	127
4.3	Algorytm procesu krokowego (wersja programowa). . . . .	128



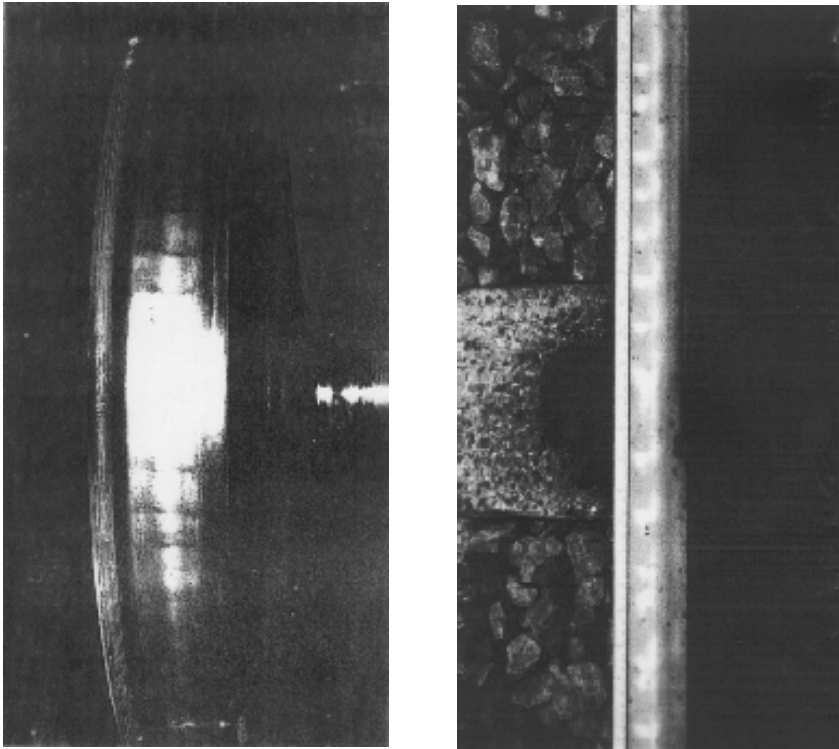
# Rozdział 1

## Wstęp

Zagadnienia kontaktowe od dłuższego czasu stanowią przedmiot badań prowadzonych w Samodzielnej Pracowni Dynamiki i Stateczności Maszyn i Pojazdów IPPT PAN. Tematyka prac dotyczy problemów pojawiających się w zagadnieniach transportowych, głównie w kolejnictwie. Przedmiotem badań były niekorzystne zjawiska, m. in. utrata stateczności ruchu układu koło–szyna lub zestaw kołowy–tor i związane z tym nadmierne zużycie tych elementów. Rozwijające się w ostatnich latach systemy szybkich kolei uwidocznily braki w teoretycznym rozpoznaniu zjawisk towarzyszących dynamicznym zagadnieniom kontaktowym. Zaobserwowano m.in. negatywne zjawiska powstawania nierówności na powierzchniach kół i szyn (tzw. korugacje) (rys. 1.1), prowadzące do ich szybszego zużycia oraz do znacznego zwiększenia hałasu towarzyszącego przejazdowi pociągu.

Inną grupą problemów o coraz większym praktycznym znaczeniu są zderzenia. Tutaj także dominują zjawiska kontaktowe, zachodzące przy dużych prędkościach przemieszczeń. Praktycznym przykładem mogą być absorbery energii zderzeń w pojazdach (rys. 1.2).

Zjawisk takich nie dawało się badać przy zastosowaniu mało skomplikowanych, uproszczonych układów modelowych. Złożoność zjawisk towarzyszących szybko zmiennym problemom kontaktowym zmusza do sięgnięcia po uproszczone metody obliczeniowe, w tym metody numeryczne. Podstawowymi trudnościami w numerycznej symulacji zjawisk była konieczność uwzględnienia efektów dynamicznych przy przemieszczającym się obciążeniu i zmieniającej swój zasięg i lokalizację strefie kontaktu. Rozwinięte w metodzie elementów skończonych techniki ułatwiają modelowanie, jak np. adaptacja siatki, metody wielosiatkowe, nie spełniały potrzeb w wystarczającym stopniu. Pozostawał nadal problem wygodnego modelowania zjawisk zachodzących w szybko zmieniającej się strefie kontaktu dwóch ciał odkształcalnych: lokalnego zagęszczenia siatki podziału przestrzennego, zmniejszenia

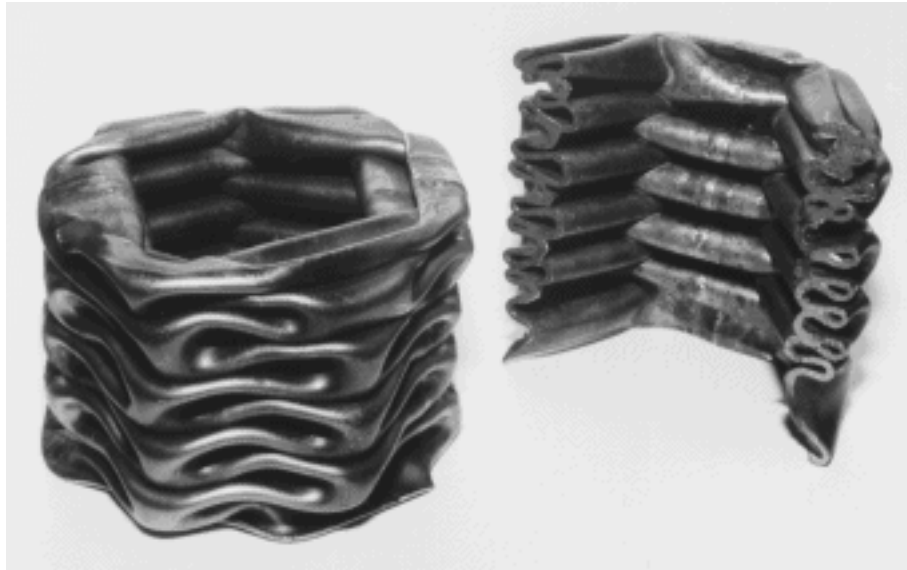


Rys. 1.1: Korugacje koła i szyny kolejowej.

kroku czasowego w rejonach o dużych prędkościach ruchu czy też uwzględnienie tarcia. Z tego względu zdecydowano się rozwinąć i zastosować metodę elementów czasoprzestrzennych do modelowania szeroko rozumianych zagadnień kontaktowych.

Nie jest celem pracy wniesienie wkładu w bardzo bogatą literaturę dotyczącą sformułowań problemów kontaktowych, ani też zbudowanie modelu i rozwiązanie konkretnego problemu inżynierskiego. Te zagadnienia doczekały się już bardzo wielu opracowań monograficznych.

Niniejsza praca ma na celu rozszerzenie zakresu zastosowań metody czasoprzestrzennych elementów skończonych, ze szczególnym uwzględnieniem modelowania zagadnień kontaktowych dynamiki. Przedstawiono w niej wiele oryginalnych rozwiązań numerycznych aspektów modelowania zadań kontaktowych. Całość opracowania jest wynikiem wieloletnich prac autora. Uzyskane wyniki były częściowo opublikowane w cytowanych własnych pracach. Niektóre zagadnienia przedstawiono w niniejszej pracy po raz pierwszy. Większość opracowanych problemów nie była dotąd poruszana przez badaczy, stąd



Rys. 1.2: Dynamicznie zgniatane kolumny o przekroju sześciokątnym.

trudno przedstawić ich historyczne tło. W pracy wykorzystano jedynie znaną z publikacji innych autorów, a służącą tu za punkt wyjścia, ideę opisu równań różniczkowych mechaniki w czasoprzestrzeni. Koncepcja dyskretyzacji czasoprzestrzeni wywodzi się z metodologii metody elementów skończonych. W obu tych kwestiach odsyła się Czytelnika do literatury, bez przytaczania wywodów. Przytoczono natomiast, jako jedyny fragment, w ślad za literaturą, tok dowodu istnienia i jednoznaczności rozwiązania problemu początkowo-brzegowego. Klasyczne spojrzenie na rozwiązania zadań zmiennych w czasie, gdzie zjawiska opisuje się w chwilach zdyskretyzowanego czasu, w niniejszej pracy znacznie rozszerzono. Podstawowe równania pozwalają bowiem uwzględnić dokładny przebieg zjawisk między chwilami i nie wymagają założenia uproszczonej, np. liniowej, zmienności. W ten sposób czasoprzestrzeń z ciągłymi funkcjami obrazującymi podstawowe wielkości opisujące problem, stała się naturalnym środowiskiem zadań dynamiki konstrukcji.

Zasadniczym elementem różniącym metodę elementów czasoprzestrzennych od klasycznych podejść do rozwiązywania problemu początkowo-brzegowego jest sposób dyskretyzacji równania różniczkowego. Klasycznie stosuje się dwuetapową aproksymację, oddzielnie względem zmiennych przestrzennych i względem czasu. W związku z tym w pierwszym etapie układ równań różniczkowych cząstkowych przekształcany jest w układ równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu, dalej zaś stosuje się czysto numeryczne procedury całkowania względem czasu. Takie podejście ma swoje zalety, wynikające głównie

z możliwości doboru w obu etapach najskuteczniejszych narzędzi, z metodami ścisłymi włącznie. Poza tym łatwe jest przejście od rozwiązań statycznych do rozwiązań dynamicznych: większość procedur numerycznych statyki daje się łatwo wykorzystać. W istocie rozwiązanie zadania dynamiki sprowadza się do rozwiązania ciągu pewnych zadań statyki. Znaczny jest też tutaj dorobek w dziedzinie oszacowania błędu oraz uzyskania bezwarunkowej stabilności rozwiązania z uwagi na krok czasowy całkowania równania różniczkowego. Wszystko to sprawia, że najpopularniejsze metody, t.j. metoda elementów skończonych połączona z metodą całkowania w czasie, np. metodą Newmarka, na stałe weszły do praktyki obliczeń.

Jedną z wad jest natomiast konieczność stosowania niezmiennego w czasie (stacjonarnego) podziału rozpatrywanego obszaru przestrzennego. Bardzo utrudnione jest w takim przypadku lokalne dostosowanie siatki podziału do zachodzących procesów (np. rozwój stref plastycznych, stref kontaktu, propagacja szczelin, przemieszczanie się obciążenia). Istniejące metody adaptacyjne, w tym metody wielosiatkowe (*ang.* multigrid), czy ruchomych siatek (*ang.* moving mesh), są pewną próbą dostosowania procesu numerycznego do przebiegu zjawiska i usunięcia wspomnianej wady. Jednakże pierwsza z wymienionych technik stosowana jest do zadań statyki, druga natomiast, na obecnym etapie, pozwala modelować zadania transportu ciepła, masy itp. Trzeba jednak podkreślić pewne związki koncepcji metody ruchomych siatek z prezentowaną tu metodą elementów czasoprzestrzennych.

Drugą poważną wadą jest zwykle stosowanie takiej samej procedury numerycznej całkowania w czasie w odniesieniu do wszystkich węzłów siatki podziału. Możliwe jest wprawdzie lokalne stosowanie procedur całkowania równań różniczkowych o dokładności wyższego rzędu, lecz z uwagi na opis zjawisk fizycznych w jednakowym odstępnie czasu (kroku czasowym) dla całego obszaru, nie poprawia się tym w istocie numerycznego modelu zadania. Bezwarunkowo stabilny schemat całkowania równania ruchu pozwala zwiększyć efektywność obliczeń poprzez wydłużenie kroku czasowego, lecz przy tym wprowadza znaczny błąd amplitudowy i fazowy, różny w różnych strefach obszaru konstrukcji. Zagęszczenie siatki podziału przynosi z jednej strony poprawę dokładności aproksymacji przestrzennej, lecz z drugiej strony może pogorszyć wyniki całkowania w czasie. Lokalna ingerencja w sposób całkowania w czasie, na poziomie elementu skończonego, w zależności od jego wymiarów czy charakterystyk materiałowych, jest zwykle trudna.

Oczywiście cała złożoność celów obliczeniowych nie pozwala kategorycznie ustalić wad i zalet poszczególnych metod. Wytłumienie przez metodę obliczeniową wyższych częstotliwości drgań jest wadą w zadaniach falowych, zaś zaletą w analizie drgań konstrukcji. Dobór

narzędzia obliczeniowego odbywa się zależnie od rodzaju zadania, typu zjawisk wymagających śledzenia, potrzebnej dokładności, będącej w dyspozycji maszyny obliczeniowej, z uwzględnieniem także czynników pozamerytorycznych (np. dostępność gotowych procedur numerycznych, własne doświadczenia itp.).

Aproksymacja czasoprzestrzenna rozwiązań zadań dynamiki konstrukcji nie ma pewnych wymienionych wcześniej wad innych metod numerycznych. Nie jest jednak metodą doskonałą. W istocie sprowadza się ona do tego, że funkcje  $\mathbf{u}$ , charakteryzujące rozwiązanie, opisywane są w podobzariach czasoprzestrzennych poprzez parametry węzłowe  $\mathbf{q}_e$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q}_e . \quad (1.1)$$

Macierz  $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$  jest macierzą funkcji interpolujących, zależnych od zmiennych przestrzennych i od czasu<sup>1</sup>. Takie podejście zakłada ciągły rozkład charakterystycznych funkcji, np. przemieszczeń bądź prędkości, w całym obszarze czasoprzestrzennym  $\Omega = \{\mathbf{x}, t : \mathbf{x} \in V(t), 0 \leq t < \infty\}$ , w którym konstrukcja jest rozpatrywana. W dyskretnym czasie  $t_i, i=0, 1, 2, \dots$ , można stosować różne bazy węzłów (z pewnymi ograniczeniami), a w związku z tym dostosowywać siatkę podziału do bieżących potrzeb. Wynikają z tego następujące udogodnienia:

- możliwość redystrybucji siatki w zależności od zmieniającego się rozkładu błędu,
- przesuwanie strefy zagęszczonej siatki wraz z przesuującym się obciążeniem ruchomym,
- możliwość dopasowania boków elementów do charakterystycznych linii wyznaczanych w obszarze przestrzennym: frontu strefy uplastycznionej, granicy zmiany fazy materiału, w szczególności – możliwość modelowania ruchomego brzegu ciała,
- stosowanie innych kształtów siatek czasoprzestrzennych niż siatki multiplekcyjne, będące wynikiem ewolucji siatki przestrzennej w warstwie czasowej; siatki takie zyskują pewne interesujące własności,
- możliwość indywidualnego formułowania sposobu całkowania w czasie każdego elementu przestrzennego oddzielnie, w sposób aktywny,
- w szczególnym przypadku aproksymacja czasoprzestrzenna może dać klasyczną metodę rozwiązania, opartą na stałej siatce węzłów (ewoluującej jedynie wraz z materiałem).

---

<sup>1</sup>W celu porównania: dyskretyzacja przestrzenna posługuje się formułą interpolacyjną  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{q}_e(t)$ .

Ostatni punkt można rozwinąć w stwierdzenie, że aproksymacja czasoprzestrzenna i wynikająca z niej metoda elementów czasoprzestrzennych są uogólnieniem metody elementów skończonych, odniesionej do przestrzeni rzeczywistej. Przez przestrzeń rzeczywistą będziemy uważali przestrzeń zmiennych przestrzennych  $x, y, z$ , w odróżnieniu od czasoprzestrzeni, którą opisują zmienne przestrzenne  $x, y, z$  oraz czas  $t$ .

Pierwsze próby czasoprzestrzennego modelowania zadań fizycznych były opublikowane w 1964 przez Gurtina [75, 76] i Herrerę [81]. Zdefiniowanie minimalizowanego funkcjonału, wynikającego z teorii splotów, umożliwiło wyprowadzenie zależności pomiędzy zmienną czasową a zmiennymi przestrzennymi w obszarach czasoprzestrzennych. Obszary te można interpretować jako czasoprzestrzenne elementy skończone. Później, w 1969 roku Oden [134] zaproponował uogólnienie metody elementów skończonych. Rozszerzył interpretację obrazu konstrukcji na obszar czasu. Niestety, interesująca koncepcja niestacjonarnego podziału konstrukcji na podobszary zaproponowana w tej pracy nie była później kontynuowana. Fried [72], Argyris, Scharpf i Chan [6, 5, 4] zaczęli jednakowo traktować zmienne przestrzenne i zmienną czasową przy formułowaniu problemów. Mimo to jednak w pracach Kuanga i Atluri [121] ostateczna dyskretyzacja w przestrzeni i w czasie była prowadzona odrębnie. Zadania dynamiczne były rozwiązywane przy rozdzieleniu zmiennej czasowej i zmiennych przestrzennych. Obszar fizyczny konstrukcji był dyskretyzowany jedną metodą (metodą elementów skończonych, różnic skończonych), podczas gdy pochodne czasowe były całkowane przy użyciu innych metod (różnic centralnych, Newmarka itp.). Ukazała się duża liczba prac na temat bezpośredniego całkowania równań różniczkowych ruchu, przy założeniu stacjonarnej dyskretyzacji.

Niezależnie od tego kierunku prac pojawiły się opracowania Kączkowskiego [100, 101, 102], w których wprowadzono po raz pierwszy do mechaniki konstrukcji interpretację fizyczną pewnych wielkości dotychczas określanych w przestrzeni fizycznej. Jest to np. równanie czteropracy wirtualnej, masa jako wielkość wektorowa czy też sztywność czasoprzestrzenna. Rozpatrywano proste przypadki drgań osiowych pręta i struny. Wprowadzono tłumienie [111] oraz podano przykład przeprowadzenia schematu całkowania w czasie przy pomocy macierzy przeniesienia [110]. Kolejne poruszane zagadnienia to drgania poprzeczne belki [112], sposób rozwiązywania sformułowanych w czasoprzestrzeni zadań dynamicznych [164], przyspieszenie procesu symulacji czasowej zadań liniowych poprzez algebraiczną eliminację  $2^n$  warstw czasowych [97], próba syntezy sformułowania czasoprzestrzennego zadań [109] oraz oszacowania stabilności [122, 61, 62, 31, 148]. Znaczącym wkładem było wskazanie możliwości budowania bezwarunkowo stabilnych rozwiązań dzięki modyfikacji wirtualnej funkcji kształtu [98, 99]. Niestety, stosowanie podanej techniki



ogranicza się jedynie do prostokątnych elementów czasoprzestrzennych, których funkcje kształtu można wyrazić iloczynem członów określających funkcje interpolacji w przestrzeni i w czasie. Dalsze badania skierowały się na inne niż prostokątne kształty elementów czasoprzestrzennych. Trójkątne elementy struny współlistniejące w siatce podziału z elementami prostokątnymi pokazano w pracy [103, 104, 165, 166]. Następnym istotnym krokiem było odejście od stacjonarnego podziału przestrzennego konstrukcji a tym samym wprowadzenie nieprostokątnych w czasie elementów [30, 31, 13]. Krok ten pozwolił na zastosowanie metody do zupełnie nowej grupy zagadnień: zagadnień kontaktowych [17, 35] oraz procesów z adaptacją siatki podziału [33, 15, 14].

Obok prac rozwijających samą metodę, w wielu publikacjach dokonywano prób oceny dokładności i efektywności oraz zastosowania metody elementów czasoprzestrzennych w różnych zagadnieniach technicznych [54, 95, 27, 159, 26, 105, 141, 20, 21, 23, 22, 142, 143, 145]. Oprócz zadań mechaniki podjęto też prace nad zagadnieniami propagacji ciepła [106, 28].

Kolejnym etapem było uwzględnienie efektów nieliniowych: nieliniowości geometrycznych [165, 144, 48] oraz materiałowych [147, 146, 150, 149, 19]. Warto też odnotować pracę [77], w której autorzy stosują funkcje harmoniczne do interpolacji w czasie.

W pracy habilitacyjnej Podhoreckiego [149] przedstawiono zastosowanie do zagadnień lepkosprężystych znanych z prac Kączkowskiego (np. [102, 101]) prostokątnych elementów czasoprzestrzennych. Ograniczono się do ustrojów jednowymiarowych. Wykorzystano modele ciała typu Hooke'a, Kelvina–Voigta, Maxwella i Zenera. Nie podano jednak konkretnych wniosków, popartych przykładami.

Grupę prac przeglądowych na temat metody elementów czasoprzestrzennych stanowią pozycje [29, 34, 34, 107, 167], a także część wprowadzająca do monografii [165]. Opis metody zawarto też w pracach [115, 108].

W tej dużej liczbie prac nie próbowano wykorzystać leżących w metodzie elementów czasoprzestrzennych możliwości. Ograniczono się do zastosowania m.e.cz. jako metody całkowania równań różniczkowych. W dalszych rozdziałach zostanie wykazana równoznaczność takiego postępowania z zastosowaniem innych, znanych metod, jak np. metoda Newmarka. Tym bardziej celowe staje się dalsze rozwijanie wykorzystania m.e.cz. do modelowania zadań dynamiki.

W niniejszej pracy przedstawiono nowe możliwości, jakie stwarza zmieniająca się w sposób ciągły w czasie aproksymacja przestrzenna. W rozdziale 2 przedstawiono sformułowanie metody elementów czasoprzestrzennych. Wynikowe równania można wyrazić zarówno za pomocą przemieszczeń jak i prędkości przemieszczeń. W obu przypadkach sformuło-

wanie wygląda jednak inaczej. Opis przemieszczeniowy prowadzi w efekcie do metody Galerkina, zastosowanej do przestrzeni i do czasu, natomiast opis poprzez prędkości nie prowadzi do metody Galerkina, co wymaga podkreślenia. Oba wyprowadzenia charakteryzują się innymi własnościami i różnym stopniem przydatności. Podano sposób wyznaczania macierzy charakterystycznych czasoprzestrzennych elementów skończonych w opisie prędkościowym. Pozwalają one na łatwą zmianę liczby węzłów siatki przestrzennej, a tym samym na stosowanie technik adaptacyjnych. Własności topologiczne tej grupy elementów dają istotne korzyści obliczeniowe, szerzej omówione w rozdziale następnym.

Oddzielną charakterystyczną grupą elementów czasoprzestrzennych są elementy o kształtach sympleksów. Własności skonstruowanych przy ich udziale rozwiązań omówiono w rozdziale 3. Najistotniejszą cechą tutaj jest uzyskiwanie trójkątnych macierzy współczynników wynikowego układu równań algebraicznych. Z tego wynikają niektóre interesujące zastosowania, jak np. możliwość ograniczenia prędkości propagacji informacji w układzie dyskretnym. Pozwala to w pewnych przypadkach ograniczyć ośrodek nieograniczony do niewielkiej liczby elementów skończonych. Przykład takiego podejścia przedstawiono w rozdziale 3.3.

W rozdziale 4 opisano sposób modelowania zmiennej w czasie strefy kontaktu ciał. Wyznaczono dynamiczne warunki kontaktu, które zastosowano do nieskomplikowanych zadań inżynierskich. Zastosowano zagęszczoną dyskretyzację w czasie, co pozwoliło na dokładne określenie sił kontaktu. Podano sposób eliminacji nieciągłości funkcji prędkości na krańcach czasowego przedziału kontaktu. Zdobyte doświadczenia wykorzystano do modelowania strefy kontaktu koła kolejowego z szyną i powstawania korugacji. W rozdziale 4.2 rozpatrzono problem ewolucji geometrii i wynikających stąd dużych obrotów materiału. Przy nieliniowościach materiałowych iteracyjne rozwiązywanie nieliniowego równania ruchu powiązано z całkowaniem tego równania w czasie. Przedstawiono też odpowiednie schematy numeryczne.

Możliwość ciągłej w czasie zmiany siatki podziału pozwala na zmniejszenie błędu aproksymacji poprzez odpowiednią redystrybucję węzłów. Zarówno w przypadku  $r$  jak i  $h$ -adaptacji uzyskuje się obiecujące wyniki (rozdział 5).

Przykłady, zarówno testowe, jak i rzeczywistych problemów inżynierskich potwierdzają skuteczność opisanych technik. Niemniej jednak wiele zagadnień może być, i z pewnością będzie, rozwijanych. Nie jest to więc ostateczny stan rozwoju ciągłego, czasoprzestrzennego opisu dynamiki konstrukcji.

W większości przykładów liczbowych przyjęto podstawowy układ miar [cm, g,  $\mu$ s]. Pozwoliło to uniknąć różniących się o wiele rzędów wartości stałych materiałowych i tym

samym pozbyć się kłopotów numerycznych. Z uwagi na fakt, że wiele przykładów liczbowych ma charakter poglądowy, testowy, pozostawiono w nich dane liczbowe bezwymiarowe. W przykładach porównawczych i w zadaniach bardziej złożonych podano pełne, rzeczywiste wartości wszystkich parametrów.



## Rozdział 2

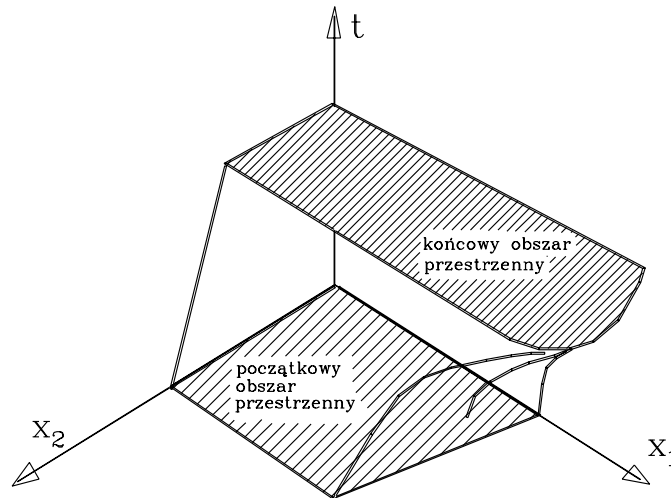
# Sformułowanie metody

Na wstępie przystąpimy do sformułowania dynamiki ciała w zakresie liniowym geometrycznie i fizycznie. Do wyprowadzenia równania równowagi sił wykorzystamy sformułowanie lokalne z zasadą prac wirtualnych. Początkowo przyjmiemy najprostszą dyskretyzację czasoprzestrzeni na elementy typu multipleks. Założymy aproksymację pól przemieszczeń w obszarach elementów czasoprzestrzennych (w najprostrzym przypadku prostokątnych). Klasyczny formalizm matematyczny metody elementów skończonych prowadzi do układu równań algebraicznych, będącego przybliżonym rozwiązaniem problemu.

W drugiej części rozdziału sformułujemy problem w opisie prędkościowym, rozpoczynając od układu o jednym stopniu swobody. To bardziej fizyczne podejście doprowadzi rozwiązanie do układu równań algebraicznych. Także w tym przypadku zastosujemy dyskretyzację obszaru najpierw na elementy prostokątne, a następnie na trójkątne.

Dwa różne podejścia prowadzą do różnych schematów numerycznych, o różnych właściwościach i różnych walorach praktycznych. Szczególne przypadki obu sformułowań dają znane w literaturze schematy rozwiązywania równań różniczkowych. Pokazanie takich analogii jest możliwe jedynie przy stacjonarnej bazie węzłów dyskretyzacji.

Modelowanie zadań dynamiki w czasoprzestrzeni w niniejszym opracowaniu sprowadza się do opisanie zachodzących zjawisk w wybranych chwilach  $t_0, t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots$ . Rozpatruje się dane zjawisko w chwili pośredniej  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . W czasie obserwacji zmienia się m.in. obszar ciała z  $V_i$  w chwili  $t$  na  $V_{i+1}$  w chwili  $t_{i+1}$ . Stan w  $t_i$  jest znany, a w  $t_{i+1}$  poszukiwany. Przyjmuje się przybliżoną geometrię w  $t_{i+1}$ , a następnie formułuje związki całkowane w obszarze między przestrzenią zajmowaną przez konstrukcję w chwilach  $t_i$  i  $t_{i+1}$  (rys. 2.1). Wyznacza się rozwiązanie w  $t_{i+1}$ . Następnie poprawia obszar całkowania oraz odpowiednie zmienne i przeprowadza ponowną iterację. Ogólnie procedura



Rys. 2.1: Czasoprzestrzenny obszar ograniczony obszarami przestrzennymi w chwili początkowej i końcowej.

obliczeniowa jest niejawna. Zadania liniowe o stałych lub zmiennych współczynnikach nie wymagają procedur iteracyjnych.

## 2.1 Sformułowanie wyrażone w przemieszczeniach

Będziemy rozpatrywać ośrodek ciągły, zamknięty w obszarze  $\bar{V}$ , będącym podobszarem przestrzeni euklidesowej  $E^3$ .  $V$  oznacza wnętrze tego obszaru, a  $\partial V$  jego brzeg, będący z kolei sumą  $\partial V_t$  i  $\partial V_u$ , gdzie zadano odpowiednio naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe. Rozpatrywać będziemy ruch ciała w przedziale czasu  $[0, T]$ . Zmienne ujęte w opisie, tj. wektor przemieszczeń  $\mathbf{u}$ , prędkości  $\mathbf{v}$ , wektor sił masowych  $\rho \mathbf{f}$ , symetryczny tensor pola naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}$  i odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  określone są na iloczynie kartezjańskim zbiorów  $V \times [0, T]$ . Wektor sił powierzchniowych  $\hat{\mathbf{t}}$  określony jest na iloczynie  $\partial V \times [0, T]$ . Zakładamy, że wszystkie funkcje są dostatecznie ciągłe. Problem geometrycznie i fizycznie liniowy opisany jest następującym układem równań:

- równania geometryczne

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}) \quad , \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T], \quad (2.1)$$

- równania fizyczne

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T], \quad (2.2)$$

- równania równowagi dynamicznej

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T], \quad (2.3)$$

- warunki brzegowe

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \widehat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial V_t \times [0, T], \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial V_u \times [0, T], \quad (2.5)$$

- warunki początkowe

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{V} \times \{0\}, \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{V} \times \{0\}. \quad (2.7)$$

W powyższych związkach  $\mathbf{u}^0$  i  $\mathbf{v}^0$  określają odpowiednio początkowe przemieszczenia i prędkości, a  $\widehat{\mathbf{u}}^0$  przemieszczenia zdefiniowane na brzegu  $\partial V_u$ . Powyższy układ stanowi sformułowanie lokalne. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania dowodzi się jak np. w [133]. Do sformułowania globalnego możemy przejść mnożąc równanie (2.3) przez wariację wirtualnej funkcji przemieszczeń  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0, & (\mathbf{x}, t) \in \partial V_u \times [0, T] \\ \text{dowolna}, & (\mathbf{x}, t) \in (\overline{V} - \partial V_u) \times [0, T] \end{cases}. \quad (2.8)$$

Po scałkowaniu otrzymamy wówczas:

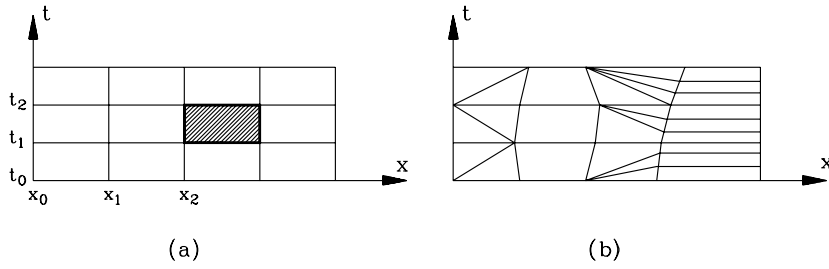
$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \delta \mathbf{u} \, dV \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V_t} \widehat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} \, d(\partial V) \, dt = 0. \quad (2.9)$$

Całkując przez części otrzymujemy

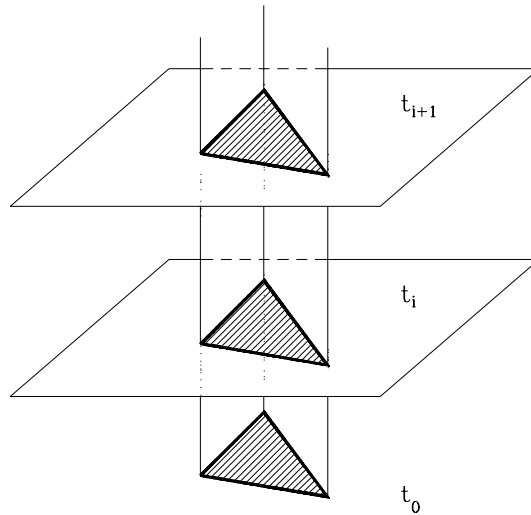
$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho (\mathbf{f} \delta \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \delta \dot{\mathbf{u}}) \, dV \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V_t} \widehat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} \, d(\partial V) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \, dt. \quad (2.10)$$

Obszar, w którym opisane jest równanie (2.10) należy teraz zdyskretyzować. Obszar  $\{\overline{V}, 0 \leq t \leq T\}$  dzielimy na podobszary, będące w istocie czasoprzestrzennymi elementami skończonymi. Najprostszy z możliwych podziałów pokazano na rys. 2.2a. W półnieskończonej wstędze wycinane są warstwy czasoprzestrzenne ( $[t_i \leq t \leq t_{i+1}]$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$ ,  $n$  jest liczbą warstw w przedziale  $[0, T]$ ) a w nich wyodrębniane elementy o stałej w czasie geometrii. Możliwy jest także bardziej złożony sposób podziału warstwy czasoprzestrzennej (rys. 2.2b). Do zagadnienia tego powrócimy w dalszych rozdziałach.

Najprostszy element czasoprzestrzenny wydzielony jest z czasoprzestrzeni płaszczyznami  $t = t_i$  i  $t = t_{i+1}$ , oraz hiper-graniastosłupami, będącymi elementami skończonymi,



Rys. 2.2: Przykłady siatki elementów czasoprzestrzennych: (a) stacjonarnej, (b) niestacjonarnej.



Rys. 2.3: Czasoprzestrzenny element, wydzielony z czasoprzestrzeni.

rozciągniętymi w czasie (rys. 2.3). Wartości niewiadomych, w naszym przypadku przemieszczeń  $\mathbf{u}$ , oraz ich pochodnych ( $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ), rzeczywistych i wirtualnych, w obszarze elementu czasoprzestrzennego interpolujemy z wartości węzłowych przemieszczeń  $\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} & \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}^*(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{q} \\
 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} & \delta \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{q} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} & \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}^*(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{q} \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Powyższe związki odnoszą się oddzielnie do każdego elementu czasoprzestrzennego. Wielkości oznaczone przez  $(\cdot)^*$  odnoszą się do stanu wirtualnego. Macierz  $\mathbf{B}$  łatwo jest utwo-



rzyć działając odpowiednim operatorem różniczkowym  $\mathcal{D}$  na macierz funkcji kształtu  $\mathbf{N}$ :  $\mathbf{B} = \mathcal{D} \mathbf{N}$ , gdzie  $\mathcal{D} = \frac{1}{2} (\text{grad} + \text{grad}^T)$ . Należy podkreślić, że wektor  $\mathbf{q}$  składa się z wartości przemieszczeń w węzłach elementu czasoprzestrzennego. Węzły te mają różne współrzędne czasowe.

Liniowe (afiniczne) funkcje kształtu  $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$  wyrażają warunki brzegowe swobodnego końca  $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} = 0$  w sposób naturalny. W przypadku elementu o długości  $b$ , przy kroku czasowym  $\Delta t$  są one spełnione w przybliżeniu. Zagęszczając dyskretyzację ( $b \rightarrow 0$ ) w skrajnym elemencie  $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} \rightarrow 0$  ( $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} \sim 1/N$ ,  $N$  – liczba węzłów siatki podziału).

Uwzględnienie (2.11) w (2.10) daje formę kwadratową, określającą równość pracy sił wewnętrznych i zewnętrznych w przedziale  $[t_0, t_1]$ :

$$\sum_{e=1}^E \left( (\mathbf{\Pi}_e^T \delta \mathbf{q}_e)^T \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{K}_e^* \mathbf{\Pi}_e \cdot \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{q}_e - (\mathbf{\Pi}_e^T \delta \mathbf{q}_e)^T \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{Q}_e \right) = 0. \quad (2.12)$$

$E$  jest tu liczbą elementów czasoprzestrzennych w strukturze. Macierze  $\mathbf{\Pi}_e$  są zero-jedynkowymi macierzami przyporządkowującymi miejsca wyrazów macierzy i wektorów elementów czasoprzestrzennych miejscom w macierzy i wektorze struktury. Postać ich zależy od topologii siatki dyskretyzacji. Liczba wierszy równa jest liczbie niewiadomych stowarzyszonych z pojedynczym elementem, a liczba kolumn równa jest liczbie niewiadomych w strukturze. Macierze te określają niejako sposób sumowania macierzy elementów.

Macierz  $\mathbf{K}_e^*$  jest macierzą sztywności czasoprzestrzennej elementu

$$\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_e + \mathbf{M}_e. \quad (2.13)$$

Możemy podać tu postać macierzy sztywności  $\mathbf{K}_e$  i bezwładności  $\mathbf{M}_e$  elementu:

$$\mathbf{K}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\mathcal{D} \mathbf{N})^T \mathbf{E} \mathcal{D} \mathbf{N} dV dt, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{M}_e = - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} dV dt, \quad (2.15)$$

gdzie  $\mathbf{E}$  jest macierzą sprężystości,  $\mathcal{D}$  jest macierzą operatorów różniczkowych, a  $\mathbf{R}$  jest macierzą jednostkowych bezwładności.

Jeśli przyjmiemy ciało sprężysto-lepkie opisane przez model Kelvina–Voigta, gdzie związek między naprężeniami i odkształceniami zapisuje się następująco

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{E} + \eta_w \frac{\partial}{\partial t} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$

( $\eta_w$  – współczynnik tłumienia wiskotycznego) i do równania (2.9) wprowadzimy człon dysypatywny, zależny od prędkości przemieszczeń [30], to równanie (2.13) przyjmie postać

$$\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_e + \mathbf{M}_e + \mathbf{W}_e + \mathbf{Z}_e, \quad (2.17)$$

gdzie  $\mathbf{W}_e$  i  $\mathbf{Z}_e$  są odpowiednio członami tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego:

$$\mathbf{W}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \eta_w \mathcal{D}\mathbf{N} \, dV \, dt \quad , \quad (2.18)$$

$$\mathbf{Z}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \mathbf{N}^T \eta_z \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} \, dV \, dt \quad . \quad (2.19)$$

$\mathbf{Q}_e$  jest wektorem obciążenia zewnętrznego, działającego na element czasoprzestrzenny  $e$ :

$$\mathbf{Q}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \mathbf{N}_e(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \, dV \, dt \quad . \quad (2.20)$$

Można go otrzymać z warunku (2.4). Ponieważ zależność (2.12) musi być spełniona przy dowolnej wariacji przemieszczeń i dla całego obszaru czasoprzestrzennego, wobec tego możemy napisać

$$\sum_{e=1}^E \left( \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{\Pi}_e \cdot \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{q}_e - \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{Q}_e \right) = \mathbf{0} \quad . \quad (2.21)$$

Powyższy układ równań algebraicznych obejmuje cały obszar czasoprzestrzenny  $[0, T]$ . Rozwiązanie uzyskuje się wykorzystując warunkami początkowymi (2.6) i (2.7). Warunek przemieszczeniowy (2.6) dyskretyzuje się łatwo do postaci

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{e=1}^E \mathbf{\Pi}_e^T \int_{V_e} \mathbf{N}_e(\mathbf{x}, 0) \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \, dV_e \quad . \quad (2.22)$$

Z kolei warunek prędkościowy (2.7) wymaga posłużenia się dodatkową formułą różnicową, aby prędkość w chwili początkowej wyrazić poprzez dwa wektory przemieszczeń:  $\mathbf{q}_0$  dane wyrażeniem (2.22) i  $\mathbf{q}_{-1}$  (tj. w chwili  $t = -h$ ), na przykład w następujący sposób:

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_0 - \dot{\mathbf{q}}_0 h \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{e=1}^E \mathbf{\Pi}_e^T \int_{V_e} \mathbf{N}_e(\mathbf{x}, 0) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) \, dV_e \quad . \quad (2.23)$$

Rozpatrzmy teraz jedną warstwę czasową,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Dokonajmy podziału niewiadomych przemieszczeń na przemieszczenia odnoszące się do chwili  $t_i$  i na przemieszczenia odnoszące się do chwili  $t_{i+1}$ . Wtedy macierz współczynników równania (2.21) można podzielić na cztery podmacierze, wydzielając jako macierz  $\mathbf{A}_i$  podmacierz o wierszach i kolumnach odnoszących się do chwili  $t_i$ , jako macierz  $\mathbf{B}_i$  podmacierz o wierszach odnoszących się do chwili  $t_i$  i kolumnach odnoszących się do chwili  $t_{i+1}$  oraz podobnie  $\mathbf{C}_i$  i  $\mathbf{D}_i$ , ale o wierszach odnoszących się do chwili  $t_{i+1}$ . Możemy zatem napisać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad . \quad (2.24)$$

Teraz proces sumowania w (2.21) sprowadza się do odpowiedniego dodawania macierzy (2.24). Powstaje blokowo trójdiagonalna macierz układu równań, o wielkości odpowiadającej liczbie chwil czasu, w jakich dokonano podziału czasoprzestrzeni. Poniżej przedstawiono postać układu równań w zapisie blokowym, odpowiadającą (2.21).

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 + \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 + \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{i-1} & \mathbf{D}_{i-1} + \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{i-1} \\ \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i+1} \\ \vdots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{i-1} \\ \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}_{i+1} \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

Układ (2.25) rozwiązujemy etapami, wydzielając do każdego kroku jeden wiersz tego układu. Mamy więc do rozwiązania

$$\mathbf{C}_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + (\mathbf{D}_{i-1} + \mathbf{A}_i) \mathbf{q}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{Q}_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Możemy teraz powrócić do warunków (2.22) i (2.23) i rozwiązania układu (2.25) w pierwszych krokach. Przy  $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}$  i  $\dot{\mathbf{q}}_0 \neq \mathbf{0}$  mamy

$$\mathbf{C}_{-1} \mathbf{q}_{-1} + (\mathbf{D}_{-1} + \mathbf{A}_0) \mathbf{q}_0 + \mathbf{B}_0 \mathbf{q}_1 = \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{C}_{-1} = \mathbf{C}_0, \quad \mathbf{D}_{-1} = \mathbf{D}_0. \quad (2.27)$$

Najprostszy przypadek zachodzi, gdy  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  i  $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ . Wówczas mamy:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

Jedynym niewiadomym wektorem przemieszczeń w (2.26) jest  $\mathbf{q}_{i+1}$ . Wektory  $\mathbf{q}_{i-1}$  i  $\mathbf{q}_i$  uzyskiwane są w krokach poprzednich, tj.  $i-2$  i  $i-1$ . Efektywne budowanie układu równań i jego rozwiązywanie można prowadzić według poniższego schematu, posługując się pomocniczym wektorem  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{C}_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{D}_{i-1} \mathbf{q}_i & (2.29) \\ \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{i+1} &= \mathbf{Q}_i - \mathbf{r}. \end{aligned}$$

W tym miejscu należy wspomnieć o pracy [96], w której autor podaje sposób budowy tzw. makroelementu czasoprzestrzennego. Polega on na wyeliminowaniu co drugiej (ogólnie co  $2^n$ ) warstwy węzłów, poprzez wyeliminowanie co drugiego wiersza w układzie (2.25). W ten

sposób krok czasowy wydłuża się do  $2^n h$ . Technika ta wymaga odwracania podmacierzy i jest skuteczna jedynie w przypadku stałych macierzy  $\mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{D}_i$ .

Stabilność schematów numerycznych ze stacjonarną siatką podziału, opartych na przemieszczeniach, opisana została w pracach [99, 124]. W zależności od doboru wirtualnych funkcji kształtu można uzyskać bezwarunkowo lub warunkowo stabilny wariant metody. Rozważania można podsumować stwierdzeniem, że sformułowania w cytowanych wyżej pracach są równoważne metodom Newmarka i mają wszystkie ich własności, także dotyczące stabilności.

### 2.1.1 Przykłady macierzy elementów czasoprzestrzennych

#### Trójkątny element pręta drgającego osiowo

Przyjmuje się liniowy rozkład przemieszczeń wewnątrz elementu trójkątnego

$$u(x, t) = a_1 x + a_2 t + a_3, \quad (2.30)$$

gdzie  $a_1, a_2, a_3$  są stałymi zależnymi od geometrii elementu i od wartości węzłowych przemieszczeń. Inaczej można to zapisać we współrzędnych powierzchniowych  $L_i$

$$u = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3, \quad (2.31)$$

gdzie

$$L_i = \frac{1}{2\Delta} \det \begin{bmatrix} x & t & 1 \\ x_k & t_k & 1 \\ x_l & t_l & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$i, k, l$  i  $j, m, n$  — permutacje numerów wierzchołków trójkąta,

$\Delta$  — pole powierzchni trójkąta.

Funkcje kształtu  $N_i(x, t)$  wyrażają się prosto przez współrzędne  $L_i$

$$\mathbf{N} = [L_1, L_2, L_3] \quad (2.33)$$

Operator różniczkowy  $\mathcal{D} = \partial/\partial x$  jest jednoelementowy. Jeśli początek układu współrzędnych przyjmie się w środku ciężkości trójkąta, to macierze sztywności  $\mathbf{K}$  i bezwładności  $\mathbf{M}$  elementu wyrażą się następująco:

$$K_{ij} = \frac{EA}{4\Delta} (t_k - t_l)(t_m - t_n), \quad (2.34)$$

$$M_{ij} = -\frac{\rho A}{4\Delta} (x_k - x_l)(x_m - x_n). \quad (2.35)$$

Tłumienie zewnętrzne  $\mathbf{Z}$  ma postać

$$Z_{ij} = \frac{\eta_z}{4\Delta}(x_k t_l - x_l t_k)(x_n - x_m), \quad (2.36)$$

a wewnętrzne, z uwagi na podwójne różniczkowanie (2.30) jest równe zero.

### Czworościenny element płyty średniej grubości.

Podobnie jak w przypadku poprzednim zastosujemy liniowy rozkład przemieszczeń wewnątrz elementu

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 x + a_2 y + a_3 t + a_4 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 t + b_4 \\ c_1 x + c_2 y + c_3 t + c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_4 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ c_1 & \dots & c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ t \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \mathbf{g} \quad (2.37)$$

Jeśli macierz  $\mathbf{G}$  zawierać będzie węzłowe współrzędne, a kolumny macierzy odwrotnej  $\mathbf{G}^{-1}$  oznaczy się przez  $\mathbf{r}_i$

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T(x_1, y_1, t_1) \\ \mathbf{g}^T(x_2, y_2, t_2) \\ \mathbf{g}^T(x_3, y_3, t_3) \\ \mathbf{g}^T(x_4, y_4, t_4) \end{bmatrix}^{-1} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4], \quad (2.38)$$

to czasoprzestrzenna macierz kształtu  $\mathbf{N}_i$  będzie miała postać

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{g}^T(x, y, t) \mathbf{r}_i \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (2.39)$$

Wektor odkształceń  $\varepsilon$  ma postać

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

i wobec tego operator różniczkowy

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Macierz sprężystości ma znaną postać

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ & D & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2}D & 0 & 0 \\ \text{(sym.)} & & & H & 0 \\ & & & & H \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$D = \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu}, \quad H = \frac{5}{6} Gh,$$

gdzie  $h$  jest grubością płyty.

Wykonanie odpowiednich różniczkowań i scałkowanie wynikowych iloczynów macierzo- wych w obszarze czworościanu daje odpowiednie macierze elementu. Całkowanie można uprościć, jeśli początek układu współrzędnych umieści się w środku ciężkości czworościanu.

## 2.2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązania.

Przytoczymy tu tok wywodu zawartego np. w pracach [149]. Załóżmy istnienie dwóch różnych rozwiązań tego samego problemu początkowo-brzegowego (2.1)—(2.3). Obydwa rozwiązania spełniają takie same warunki brzegowe (2.4), (2.5) i początkowe (2.6), (2.7). Rozwiązaniami (2.1—2.7) są odkształcenia, naprężenia i przemieszczenia w ciele  $V_0 \cup \partial V_0$ . Pierwsze z tych rozwiązań oznaczmy przez  $\{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{S}}\}$ , drugie zaś przez  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\mathbf{S}}\}$ . Są one różne z założenia, więc istnieją niezerowe ich różnice, oznaczone jako  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\mathbf{S}}\}$ :

$$\tilde{u}_i = \bar{u}_i - \tilde{u}_i, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{S}_{ij} = \bar{S}_{ij} - \tilde{S}_{ij}. \quad (2.43)$$

Zbiór rozwiązań (2.43) musi także spełniać równania (2.1)—(2.3) oraz warunki (2.4)—(2.7).

Równania równowagi we współrzędnych Lagrange'a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ S_{jk} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] + \rho_0 (f_{0i} - \ddot{u}_i) = 0 \quad (2.44)$$

odpowiadające stanom  $\{\bar{\cdot}\}$  i  $\{\tilde{\cdot}\}$  odejmujemy stronami i otrzymujemy

$$\frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial x_j} - \rho_0 \tilde{u}_i = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T], \quad (2.45)$$

gdzie

$$\tilde{T}_{ji} = \bar{T}_{ji} - \tilde{T}_{ji}, \quad (2.46)$$

$$\bar{T}_{ji} = \bar{S}_{jk} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right), \quad \tilde{T}_{ji} = \tilde{S}_{jk} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right) \quad (2.47)$$

są I tensorami Pioli–Kirchhoffa.

Warunki brzegowe naprężeniowe

$$\bar{S}_{jk} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \nu_{0j} = \hat{t}_{0i} , \quad \bar{S}_{jk} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \nu_{0j} = \hat{t}_{0i} \quad (2.48)$$

i przemieszczeniowe

$$\bar{u}_i = \hat{u}_i , \quad \bar{\bar{u}}_i = \hat{u}_i \quad (2.49)$$

poddaje się podobnym operacjom i uzyskuje odpowiednio

$$\tilde{T}_{ji} \nu_{0j} = 0 , \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial V_t \times [0, T] \quad (2.50)$$

i

$$\tilde{u}_i = 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial V_u \times [0, T] . \quad (2.51)$$

Rozwiązanie (2.43) odpowiada sytuacji, gdy wewnątrz ciała nie występują siły masowe (2.45), a na powierzchni obciążenia (2.50) i przemieszczenia (2.51).

Napiszmy zasadę zachowania energii dla stanu danego przez (2.43):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{V} + \tilde{T}) = \tilde{L} , \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T] , \quad (2.52)$$

gdzie  $\tilde{V}$  jest energią potencjalną odkształceń,  $\tilde{T}$  energią kinetyczną

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \tilde{S}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV_0 , \quad \tilde{T} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\tilde{u}}_i \dot{\tilde{u}}_i dV_0 , \quad (2.53)$$

a  $\tilde{L}$  jest mocą sił zewnętrznych

$$\tilde{L} = \int_{V_0} \rho_0 f_{0i} \dot{\tilde{u}}_i dV_0 + \int_{\partial V_0} \hat{t}_{0i} \dot{\tilde{u}}_i d(\partial V_0) \quad (2.54)$$

Prawa strona (2.52) jest równa zero, ponieważ w rozwiązaniu (2.43) znikają siły masowe i powierzchniowe. Wtedy zachodzi stacjonarność sumy energii

$$\tilde{V} + \tilde{T} = \text{const} , \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{V} \times [0, T] . \quad (2.55)$$

Przyjmijmy warunki początkowe  $u_i(0)$ ,  $\dot{u}_i(0)$ ,  $\varepsilon_{ij}(0)$ . Dla stanu  $\{\cdot\}$  mają one postać

$$\tilde{u}_i(0) = 0 , \quad \dot{\tilde{u}}_i(0) = 0 , \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}(0) = 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{V}_0 \times [0, T] . \quad (2.56)$$

Stacjonarność energii (2.55) z warunkami (2.56) oznacza znikanie energii w całym przedziale czasowym. Ponieważ  $V, T > 0$ , więc

$$\tilde{V} = 0 \quad \text{i} \quad \tilde{T} = 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{V} \times [0, T] . \quad (2.57)$$

Zerowa wartość energii potencjalnej odkształceń oraz energii kinetycznej daje rozwiązanie

$$\tilde{u}_i = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad \dot{\tilde{u}}_i = 0, \quad \tilde{S}_{ij} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{V} \times [0, T] \quad (2.58)$$

co z kolei dowodzi jednoznaczności rozwiązania

$$\bar{u}_i = \tilde{u}_i, \quad \dot{\bar{u}}_i = \dot{\tilde{u}}_i, \quad \bar{S}_{ij} = \tilde{S}_{ij}. \quad (2.59)$$

■

## 2.3 Sformułowanie wyrażone w prędkościach

Przedstawione w punkcie 2.1 sformułowanie wyrażone w przemieszczeniach może być niedogodne, jeśli np. równania konstytutywne wyrażone są przez prędkości odkształceń. Także przy opisie dużych przemieszczeń i dużych obrotów korzysta się z prędkości przemieszczeń. Dlatego często wygodniej jest operować prędkościami i korzystać z wariantów metod posługujących się prędkościami jako podstawowymi niewiadomymi.

Równania metody elementów czasoprzestrzennych w opisie prędkościowym można wyprowadzić posługując się, np. zasadą pracy wirtualnej na kroku obliczeniowym [16]. Wykorzystuje się wówczas względnie proste związki i otrzymuje się nieskomplikowane formuły końcowe.

Sformułowanie odnoszące się do jednego stopnia swobody (rozd. 2.3.1) ilustruje sposób formułowania związków. Będzie on dalej wykorzystywany w przypadku ogólnym, przy opisie ruchu ciał wielowymiarowych (rozd. 2.3.4 i 2.3.5). W przypadku jednego stopnia swobody wykazana zostanie zbieżność rozwiązania (rozd. 2.3.2). W dalszej części przedstawiono przykłady zawierające nieliniowości materiałowe z materiałem lepkoplastycznym (które w szczególnym przypadku mogą być rozwiązywane jako zadania opisane równaniami liniowymi o zmiennych współczynnikach) (rozd. 2.3.6).

### 2.3.1 Układ dyskretny o jednym stopniu swobody

Rozpatrzmy drgania swobodne punktu materialnego, opisane równaniem

$$m \frac{dv}{dt} + kx = 0. \quad (2.60)$$

Zasada mocy wirtualnej, zastosowana do (2.60), daje następujące równanie:

$$\left( m \frac{dv}{dt} + kx \right) v^* = 0. \quad (2.61)$$



Zasada pracy wirtualnej wobec tego ma postać

$$\int_0^t \left( m \frac{dv}{dt} + kx \right) v^* dt = 0 . \quad (2.62)$$

Przyjmujemy liniowy rozkład prędkości rzeczywistych  $v$  na kroku czasowym  $h$  ( $0 \leq t \leq h$ )

$$v = \left( 1 - \frac{t}{h} \right) v_0 + \frac{t}{h} v_1 . \quad (2.63)$$

Przemieszczenie  $x(t)$  wyraża całka

$$x(t) = \int_0^t v dt = x_0 + \frac{h}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t}{h} \right)^2 \right] v_0 + \frac{t^2}{2h} v_1 . \quad (2.64)$$

Jest to liniowa zależność od prędkości  $v_0$  i  $v_1$  na krańcach przedziału  $[0, h]$ . Prędkości wirtualne przyjęto jako rozkład Diraca, zależny od parametru  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) i jedynie od prędkości  $v_1$ :

$$v^* = v_1 \delta \left( \frac{t}{h} - \alpha \right) . \quad (2.65)$$

Należy uwzględnić w równaniu (2.60) powyższe związki i scałkować w przedziale  $[0, h]$ :

$$\int_0^h v^* \frac{1}{h} (v_1 - v_0) dt + \int_0^h v^* \frac{k}{m} x(t) dt = 0 . \quad (2.66)$$

Po przekształceniach mamy:

$$v_1 = \frac{1 - \frac{kh^2}{2m} [1 - (1 - \alpha)^2]}{1 + \frac{k\alpha^2 h^2}{2m}} v_0 - \frac{k}{m} \frac{h}{\left( 1 + \frac{k\alpha^2 h^2}{2m} \right)} x_0 \quad (2.67)$$

lub

$$v_1 = T v_0 + B x_0 . \quad (2.68)$$

Przemieszczenie  $x_1$  w kolejnej chwili wyznacza się z prędkości  $v_0$  i  $v_1$ :

$$x_1 = x_0 + h[(1 - \beta)v_0 + \beta v_1] . \quad (2.69)$$

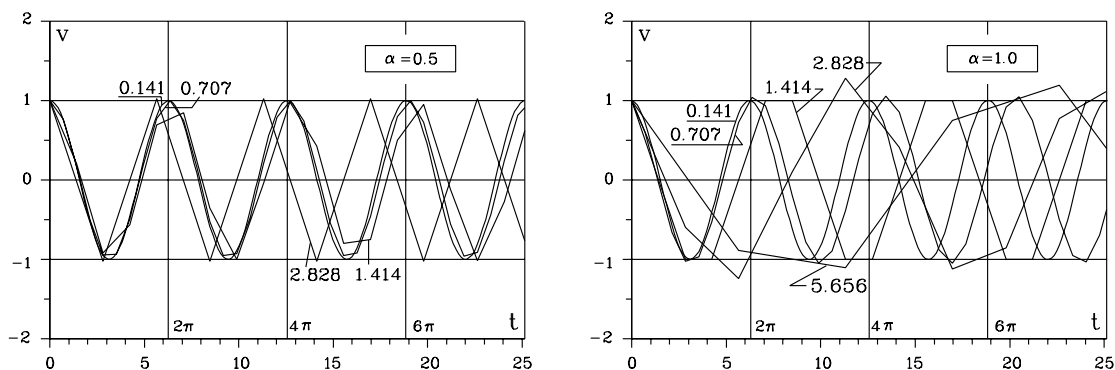
Dokładne rozwiązania otrzymuje się przy  $\beta = 1 - \alpha$ . Wobec tego można zapisać

$$x_1 = x_0 + h[\alpha v_0 + (1 - \alpha)v_1] . \quad (2.70)$$

Przy  $\alpha = 1/2$  równanie (2.70) ściśle odpowiada zależności (2.64), gdy  $t = h$ , mianowicie  $x_1 = x_0 + h(v_0 + v_1)/2$ .

Oznaczając  $\kappa = h^2 k/m$  można zapisać przejście do kolejnej chwili następująco:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\alpha\kappa}{2+\alpha^2\kappa} & -\frac{2\kappa}{h(\alpha^2\kappa+2)} \\ 3h - \frac{2h(\alpha\kappa+2)}{\alpha^2\kappa+2} & \frac{2\kappa(\alpha-1)}{\alpha^2\kappa+2} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ x_0 \end{Bmatrix} . \quad (2.71)$$



Rys. 2.4: Prędkości  $v$  przy różnym kroku czasowym  $h$ , przy  $\alpha=0,5$  i  $\alpha=1,0$ .

Stabilność schematu (2.71) badamy według kryteriów opisanych w p. 5.2.1. Wartości własne macierzy przeniesienia, podanej w równaniu (2.71), przy  $h \rightarrow \infty$  są następujące:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_{1/2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \pm \frac{i\sqrt{2\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \quad (2.72)$$

zaś ich moduły:

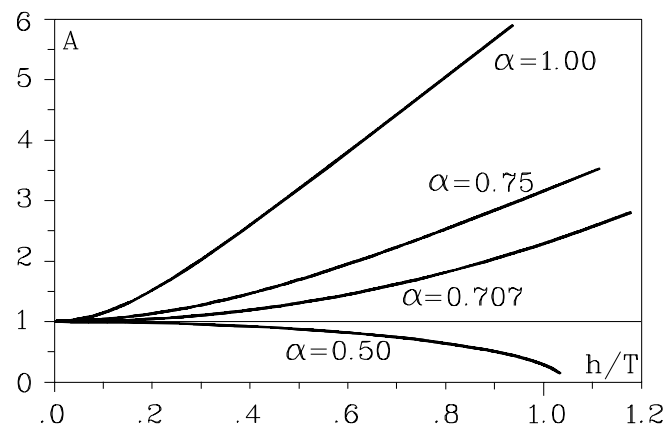
$$\lim_{h \rightarrow \infty} |\lambda_{1/2}| = \begin{cases} 1, & \text{przy } \sqrt{2}/2 \leq \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2}, & \text{przy } 0 \leq \alpha < \sqrt{2}/2 \end{cases} \quad (2.73)$$

Można stwierdzić, że obydwa moduły są równe jedności przy  $\alpha \geq \sqrt{2}/2$ .

Testy dotyczące jednego stopnia swobody z warunkami początkowymi  $x_0 = 0$  i  $v_0 = 1$  przy  $\alpha=0,5$  i  $\alpha=1,0$  przedstawia rys. 2.4. Błąd amplitudy przemieszczeń przy różnych wartościach względnego kroku czasowego ilustruje rys. 2.5. Tutaj, oraz w dalszej części pracy, przez względny krok czasowy będziemy rozumieć stosunek kroku czasowego  $h$  do okresu drgań  $T$ . Zaznaczyć trzeba, że praktycznie nie popelnia się błędów amplitudy prędkości. Błąd amplitudy przemieszczeń wynika z błędów fazowych, t.j. wydłużenia okresu drgań, zawsze pojawiającego się przy dużych krokach  $\Delta t$ . W takim przypadku układ staje się bardziej elastyczny, a jego odpowiedzią jest zwiększenie amplitudy przemieszczeń.

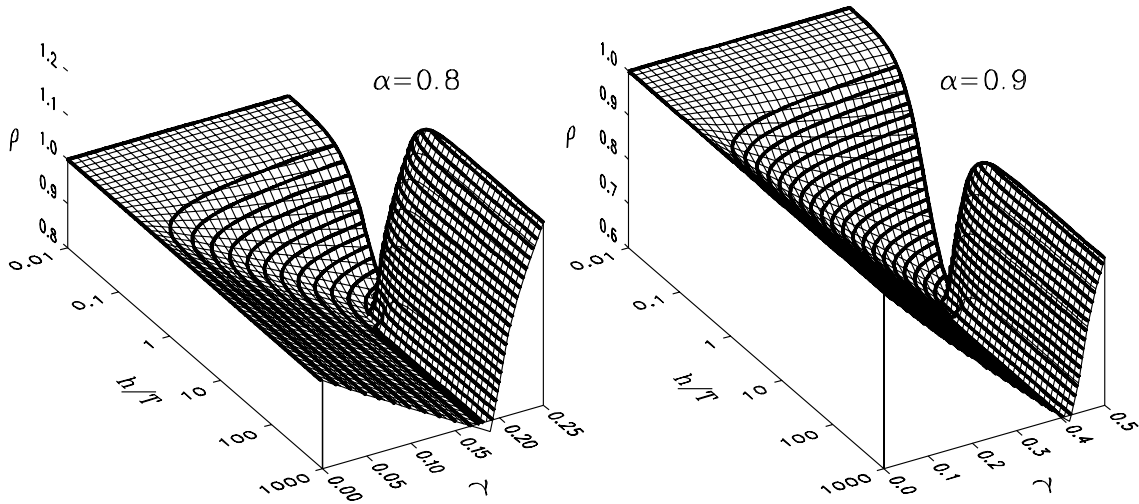
Interesującym problemem jest zdolność tłumienia wyższych częstotliwości drgań przy zachowaniu zerowego tłumienia częstotliwości podstawowych układu. Wielu autorów poświęca temu swoje prace (np. [82, 85]). Jeśli formułę (2.69) zmodyfikuje się tak, że prędkość określać się będzie w nieco późniejszym momencie niż  $\alpha - 1$ , to uzyska się pożądany efekt tłumienia. Zmodyfikowano parametr  $\beta$  tak, że ma on postać

$$\beta = 1 - \alpha/(1 + \gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (2.74)$$

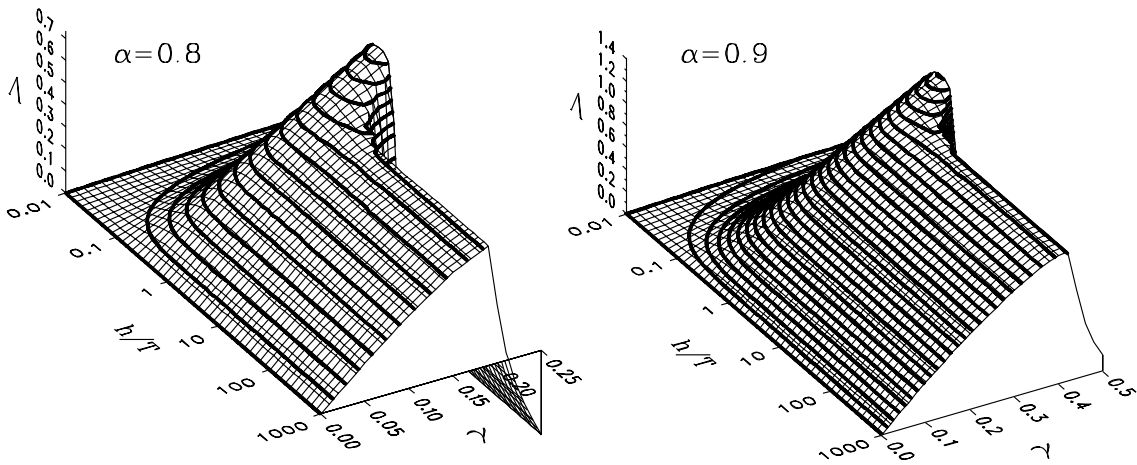
Rys. 2.5: Amplituda przemieszczeń przy wybranych parametrach  $\alpha$ .

Na rysunkach 2.6 pokazano wartość promienia spektralnego w zależności od parametru  $\gamma$  przy wzrastających wartościach względnego kroku czasowego  $h$ . Wykonano je przy  $\alpha = 0,8$  i  $\alpha = 0,9$ . Pogrubione linie są poziomiami wykreślonymi co  $0,02$ . Przy  $\gamma = 0,0$  promień spektralny  $\rho$  równy jest, zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, jedności. Kolejny rysunek 2.7, pokazuje wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia przy  $\alpha = 0,8$  i  $0,9$ , w zależności od wielkości względnego kroku czasowego  $h/T$ . Poziomice na obu rysunkach wykreślono co  $0,05$ .

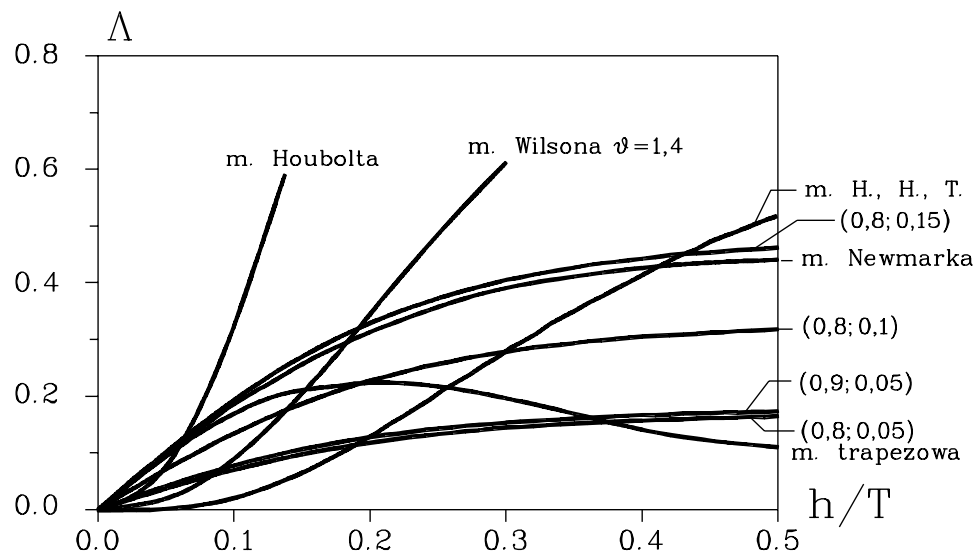
Idealnym schematem obliczeniowym byłaby procedura bezwarunkowo stabilna, o wysokim rzędzie dokładności, pozwalająca na sterowanie wielkością tłumienia numerycznego (w szczególnym przypadku tłumienie powinno być równe zero). Kolejne wymagania stawia się wielkościom tłumienia kolejnych częstotliwości. Niskie częstotliwości nie powinny ulegać tłumieniu, podczas gdy kolejne wyższe winny być tłumione bardziej. Ze względu na kształt funkcji tłumienia zależnej od względnego kroku czasowego  $h/T$  metody obliczeniowe można podzielić na dwie grupy: metody o zerowym nachyleniu funkcji tłumienia, przy małym  $h/T$ , stopniowo rosnącym wraz z  $h/T$  (funkcja wypukła ku dołowi) oraz metody o pewnym nachyleniu funkcji tłumienia przy  $h/T \rightarrow 0$  (funkcje wypukłe ku górze) (rys. 2.8). Pierwszą grupę reprezentują metody: Wilsona, Houbolta, metoda HHT opisana w pracach [82, 85] i metoda WBZ opisana w pracy [168]. W drugiej grupie znajdują się metody z rodziny metod Newmarka. Doświadczenia praktyków dadzą się streścić następująco: druga grupa metod nadmiernie tłumie niskie częstotliwości, a w pierwszej grupie metody charakteryzują się za dużym tłumieniem (nie dającym się sterować) w zakresie wysokich częstotliwości. Opracowano nowe metody, pozbawione obu wad. Niestety, mają one



Rys. 2.6: Promień spektralny zależny od parametru  $\gamma$  przy  $\alpha = 0,8$  i  $\alpha = 0,9$ .



Rys. 2.7: Logarytmiczny dekrement tłumienia zależny od parametru  $\gamma$  przy  $\alpha = 0,8$  i  $\alpha = 0,9$ .



Rys. 2.8: Logarytmiczny dekrement tłumienia w różnych metodach całkowania równania różniczkowego ruchu.

inną wadę. Są to metody wieloparametrowe, w sztuczny sposób ustalające związki między przemieszczeniem, prędkością i przyspieszeniem. Własności takich metod mocno zależą od doboru tych parametrów. Tak wymodelowane sterowanie własnościami metody wymaga w praktyce uprzednich testów, gdyż nawet przy małych modyfikacjach parametrów sterujących można uzyskać efekt odwrotny od oczekiwanego. Uogólnienia metod WBZ i HHT dokonano w pracy [56] (metoda CH). Jest to już metoda czteroparametrowa, w której wektor przemieszczeń i prędkości wyznaczany jest w chwili  $t_{n+1-\alpha_f}$  a wektor przyspieszeń w chwili  $t_{n+1-\alpha_m}$ . W tych też chwilach ustalane są odpowiednie wyrazy równania ruchu. Przyjmuje się natomiast stałość w czasie macierzy charakterystycznych układu. W szczególnym przypadku otrzymuje się metody HHT, WBZ lub Newmarka. Autorzy podają ogólne oszacowania odnośnie doboru parametrów metody, nie dyskutując zależności własności procedury od ich doboru. Zastowanie metody CH wymaga więc przeprowadzenia własnych prób.

Na tle wspomnianych wyżej klasycznych metod wykazano własności tłumiące schematu opisanego uprzednio (rys. 2.8). Widać, że plasuje się on obok metod Newmarka, przy czym sterowanie wielkością tłumienia jest proste i skuteczne. Badania i rozważania teoretyczne zilustrujemy przykładem. Pręt wspornikowy, drgający osiowo podzielono na 40 jednakowej długości elementów skończonych o długości  $b=1$  każdy i obciążono impul-

sem siły. W zadaniach uderzeń zwykle trudniej jest otrzymać precyzyjne wyniki, gdyż w tym przypadku dominują procesy falowe. Tym bardziej interesujące mogą być porównania. Wykonano obliczenia przy różnych wartościach  $\alpha$  i  $\gamma$ . Zamieszczono najbardziej charakterystyczne wyniki. Na rys. 2.9 przedstawiono przemieszczenia końca pręta w czasie przy  $\alpha = 0,8$  i  $\alpha = 0,9$ , przy wybranych wartościach  $\gamma$ . Przy większym kroku czasowym ( $h=10,0$ ) przemieszczenia przedstawia rys. 2.10. Linią pogrubioną pokazano rozwiązania teoretyczne. Wartości numeryczne oscylują wokół wartości teoretycznej, choć amplitudy przemieszczeń są znaczne. Rozwiązanie jest poprawne, ograniczone i zbieżne. Wszystkie metody pozwalające otrzymać stabilne rozwiązanie zachowują się podobnie przy dużych wartościach  $h$ , znacznie przekraczających czas przejścia fali przez element przestrzenny. Prawy wykres na rys. 2.10 ilustruje efekt wprowadzenia małego tłumienia numerycznego. Łatwo zauważyć, że już po kilku cyklach pasożytniczych drgań proces stabilizuje się a amplitudy przemieszczeń są w granicach oczekiwanych. Należy także zwrócić uwagę na fakt, że okres oscylacji zostaje bardzo dobrze oddany.

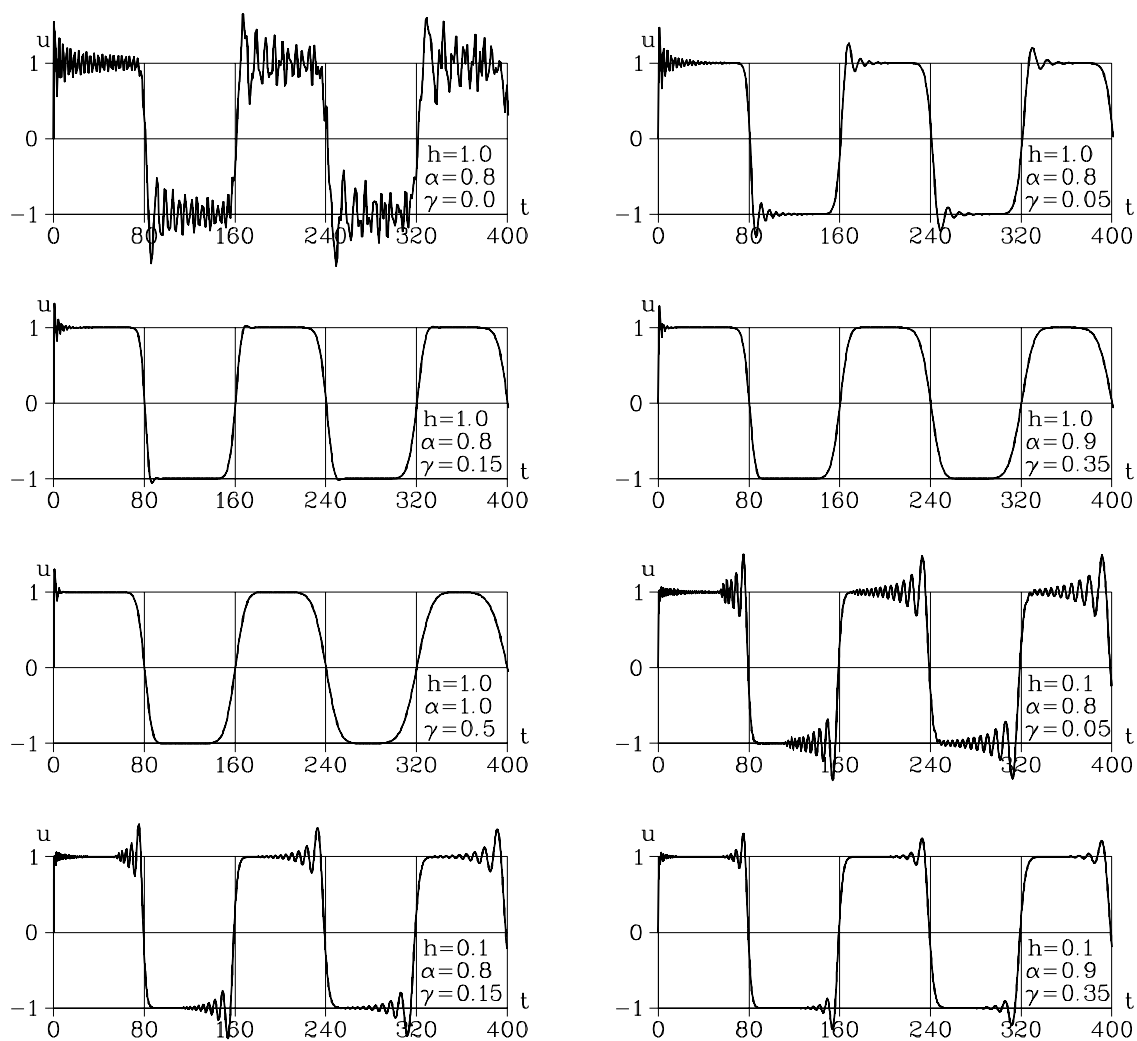
### 2.3.2 Zbieżność metody

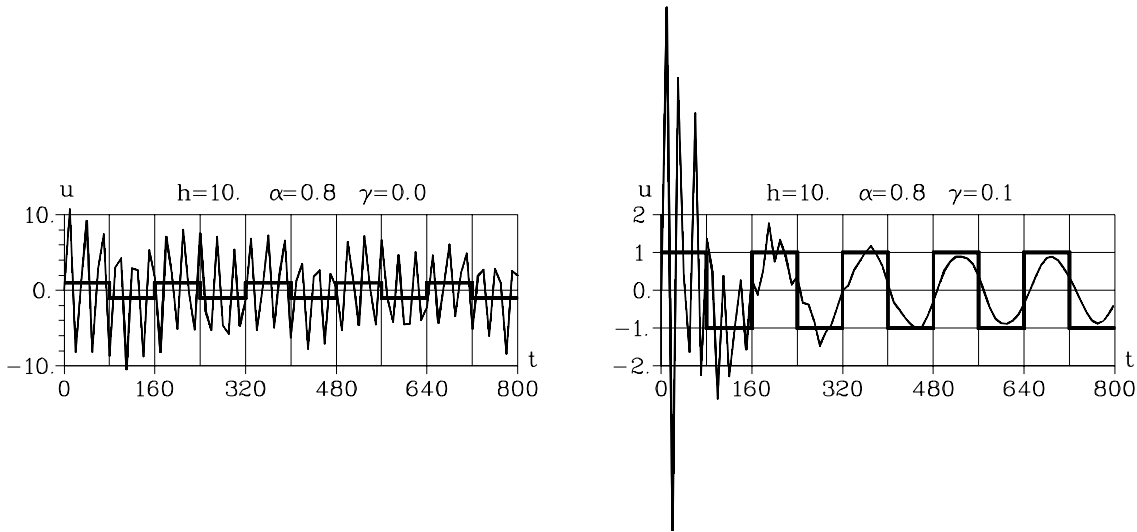
Błąd metody szacuje się jako różnicę między rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym. Za dokładne rozwiązanie równania (2.60) przyjmuje się sinusoidę  $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ , ze stałymi  $A$  i  $B$  wyznaczanymi z warunków początkowych. Wystarczy od rozwinięcia rozwiązania dokładnego w szereg Maclaurina odjąć rozwiązanie (2.71), aby wyznaczyć błąd kroku  $[0, h]$ . Najkorzystniejszym, z punktu widzenia zbieżności, jest przypadek  $\alpha = 1/2$ . Rozwiązanie przybliżone zbiega do rozwiązania ścisłego z błędem proporcjonalnym do trzeciej potęgi kroku  $\Delta t$ . W tabeli 2.1 dokonano podsumowania różnych wariantów metody. Kombinacja liniowa wariantów określonych przy różnych  $\alpha$  pozwala poprawić dokładność. Przyjęcie funkcji wirtualnej w postaci  $\sum_j w_j \delta(t/h - \alpha_j)$ , gdzie  $\alpha_j$  są współrzędnymi pików, a  $w_j$  wielkością (wagą) tych pików, prędkość  $v_{i+1}$  wyznacza się formułą

$$v_{i+1} = \frac{\sum_j \left(1 - \frac{kh^2}{2m} [1 - (1 - \alpha_j)^2]\right) w_j}{\sum_j \left(1 + \frac{kh^2 \alpha_j^2}{2m}\right) w_j} v_i - \frac{\frac{k}{m} h}{\sum_j \left(1 + \frac{kh^2 \alpha_j^2}{2m}\right) w_j} x_i . \quad (2.75)$$

Jeśli przyjmie się  $\alpha_1=0$ ,  $\alpha_2=1/2$ ,  $\alpha_3=1$ , wówczas otrzyma się odpowiednie współczynniki  $w_j$ :  $w_1=1/6$ ,  $w_2 = 2/3$ ,  $w_3=1/6$ . Rozwiązanie ma błąd  $\mathcal{O}(h^4)$  (dokładnie  $h^4/12 + \mathcal{O}(h^5)$ ).

W podobny sposób jak w p. 2.3.1 można wyprowadzić całą rodzinę schematów obliczeniowych, różniących się kształtem funkcji wirtualnej przyjętej przy wyprowadzeniu, a tym samym miejscem, w którym ustalana jest równowaga. Szerzej pokazano to w pracy [25].

Rys. 2.9: Przemieszczenia osiowe wspornika przy wybranych parametrach  $h$ ,  $\alpha$  i  $\gamma$ .



Rys. 2.10: Przemieszczenia osiowe wspornika przy  $h=10$ ,  $\alpha=0,8$ , bez tłumienia i z tłumieniem  $\gamma=0,1$ .

Na uwagę zasługuje jeszcze schemat uzyskany przy globalnej równowadze, gdy funkcja wirtualna prędkości jest równa jedności w całym przedziale czasowym  $h$ , poza krańcami przedziału, gdzie wartości są równe zero. Formuła wynikowa przedstawia się następująco:

$$v_{i+1} = \frac{1 - \frac{k h^2}{m \cdot 3}}{1 + \frac{k h^2}{m \cdot 6}} v_i - \frac{\frac{k h}{m}}{1 + \frac{k h^2}{m \cdot 6}} x_i, \quad x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2} h (v_i + v_{i+1}). \quad (2.76)$$

Schemat (2.76) ma błąd  $\mathcal{O}(h^3)$  (dokładnie  $h^3/12$ ) i jest warunkowo stabilny. Warunek stabilności narzuca ograniczenie  $\omega h \leq 2\sqrt{3}$ .

Operator  $a_1$  formuły różnicowej  $y_{i+1} = a_1 y_i + a_2 y_{i-1}$  dla wybranych metod przedstawiono w tablicy 2.2. Rysunek 2.11 ilustruje błąd fazowy wybranych metod całkowania równania różniczkowego ruchu.

Można wykazać, że dla  $\alpha = \sqrt{2\beta}$  ( $\beta$  – parametr metody Newmarka) schemat (2.67) odpowiada metodzie Newmarka.

### 2.3.3 Błąd fazowy

Błąd fazowy schematu całkowania wyrażonego w prędkościach określa iloraz

$$P = \frac{T'}{T} = \frac{\omega}{\omega'} . \quad (2.77)$$



Tab. 2.1: Stopień zbieżności metod.

metoda	stopień błędu	współczynnik
m.e.cz. $\alpha = 0$	$\Delta t^2$	$\frac{1}{2}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{1}{4}$	$\Delta t^2$	$\frac{1}{4}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{1}{2}$	$\Delta t^3$	$\frac{1}{12}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\Delta t^2$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{3}{4}$	$\Delta t^2$	$\frac{1}{4}$
m.e.cz. $\alpha = 1$	$\Delta t^2$	$\frac{1}{2}$
m.e.cz. $v^* = 1$ (2.76)	$\Delta t^2$	$\frac{1}{12}$
Runge–Kutta 2 rz.	$\Delta t^3$	$\frac{1}{6}$
Runge–Kutta 4 rz.	$\Delta t^5$	$\frac{1}{120}$

Równanie charakterystyczne schematu opisanego przez (2.71) ma postać

$$\lambda^2 - (T_{11} + T_{22})\lambda + (T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22}) = 0, \quad (2.78)$$

gdzie  $T_{ij}$  są elementami macierzy przejścia (2.71). Rozwiązaniem (2.78) są liczby

$$\lambda_{1/2} = \frac{\alpha^2\kappa + 2 - \kappa \pm i\sqrt{\kappa(2\alpha^2\kappa + 4 - \kappa)}}{\alpha^2\kappa + 2}, \quad \kappa = \frac{k}{m}h^2. \quad (2.79)$$

Ponieważ częstość w schemacie numerycznym określa się przez

$$\operatorname{tg} \omega' h = \frac{\Im(\lambda)}{\Re(\lambda)}, \quad \omega' = \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \frac{\Im(\lambda)}{\Re(\lambda)} \quad (2.80)$$

wobec tego błąd fazowy wynosi

$$P = \frac{\sqrt{\kappa}}{\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\kappa(2\alpha^2\kappa + 4 - \kappa)}}{\alpha^2\kappa + 2 - \kappa} \right)}. \quad (2.81)$$

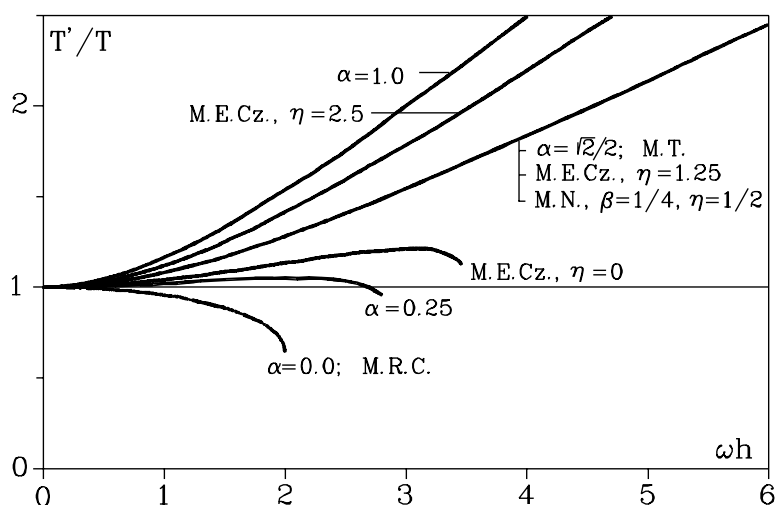
W granicy

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} P = 0. \quad (2.82)$$

■

Tab. 2.2: Operatory różnych schematów różnicowych całkowania równania różniczkowego.

metoda		operator
m. różnic centralnych		$2 - \kappa$
m. trapezów		$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
m. Newmarka:	$\beta=1/4, \gamma=1/2$	$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
	$\beta=1/6, \gamma=1/2$	$\frac{4(3-\kappa)}{6+\kappa}$
	$\beta=1/12, \gamma=1/2$	$\frac{2(12-5\kappa)}{12+\kappa}$
	$\beta=0, \gamma=1/2$	$2 - \kappa$
m.e.cz. – formuła przemieszczeniowa:	klasyczna ( $\eta=0$ )	$\frac{4(3-\kappa)}{6+\kappa}$
	$\eta=5/4$	$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
	$\eta=5/2$	$\frac{6-\kappa}{3+\kappa}$
m.e.cz. – formuła prędkościowa:	$\alpha=0$	$2 - \kappa$
	$\alpha = 1/2$	$\frac{16-6\kappa}{8+\kappa}$
	$\alpha = \sqrt{2}/2$	$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
	$\alpha=1$	$\frac{4}{2+\kappa}$
	formuła z $v^* = 1$ (2.76)	$\frac{4(3-\kappa)}{6+\kappa}$



*M.R.C.* – metoda różnic centralnych

*M.T.* – metoda trapezów

*M.N.* – metoda Newmarka

*M.E.Cz.* – metoda elementów czasoprzestrzennych, w sformułowaniu tradycyjnym oraz ze zmodyfikowaną funkcją wirtualną

Rys. 2.11: Błąd fazowy metody elementów czasoprzestrzennych w sformułowaniu prędkościowym, zależnym od parametru  $\alpha$ , na tle różnych metod całkowania równania różniczkowego ruchu.

Pytanie, który wariant metody, jawny czy niejawny, należy przyjąć w danych obliczeniach jest nadal aktualne. Niżej podane podsumowanie częściowo charakteryzuje podstawowe cechy obu tych grup.

#### Metody niejawne

- Metody niejawne są zwykle bezwarunkowo stabilne. Wielkość kroku czasowego uzależniona jest tylko od wymaganej dokładności.
- Obliczenia wymagają większej liczby operacji arytmetycznych przypadających na jeden krok obliczeniowy oraz większej pamięci operacyjnej.
- Kryteria dokładności wymagają, by krok czasowy wynosił ok. 1/100 podstawowego okresu drgań.

- Algorytmy wymagają faktoryzacji macierzy.
- Metody niejawne są dogodne w analizie zagadnień inercyjnych.
- Metody niejawne zaleca się stosować do ustrojów zginanych, ze względu na dużą wartość najwyższych częstości drgań w porównaniu z okresem podstawowym.
- Efektywność tej grupy metod spada przy analizie układów wielowymiarowych.

### Metody jawne

- Warunki stabilności ograniczają krok czasowy metod jawnych.
- Obliczenia są efektywne przy diagonalnej macierzy mas. Konsystentna macierz mas poprawia dokładność ustrojów zginanych lecz zawyża częstości, podczas gdy macierz diagonalna częstości zaniża. Macierz diagonalna modyfikowana [83] (całkowita masa elementu rozłożona diagonalnie według proporcji diagonalni macierzy konsystentnej) charakteryzuje się najkorzystniejszymi własnościami.

### 2.3.4 Element skończony pręta

Rozpatrzmy pręt drgający osiowo, w stanie początkowym opisany w obszarze ciągłym  $0 \leq x \leq l$ . Zbudujemy matematyczny model tego zadania w postaci układu dyskretnego, złożonego z pojedynczego elementu skończonego.

Na wstępie zapiszemy równanie różniczkowe ruchu

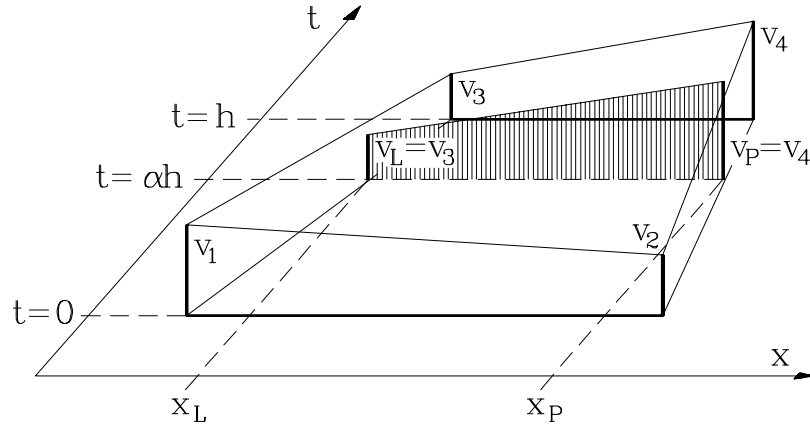
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.83)$$

gdzie  $c^2 = E/\rho$  jest prędkością fali w ośrodku sprężystym. Zastąpimy kolejno pochodną przemieszczenia  $u$  względem czasu przez prędkość  $v$ , przemnożymy równanie przez funkcję dystrybucji prędkości wirtualnej  $v^*$  a następnie poprzez całkowanie zbilansujemy energię w obszarze obszaru czasoprzestrzennego  $\Omega = \{x, t : 0 \leq x \leq l(t), 0 \leq t \leq h\}$ :

$$\int_{\Omega} v^* \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} v^* c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\Omega = 0. \quad (2.84)$$

Całkowanie przez części drugiego członu, przy ustalonych na brzegu (fizycznym) wartościach daje związek w następującej formie:

$$\int_{\Omega} v^* \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial v^*}{\partial x} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = 0. \quad (2.85)$$



Rys. 2.12: Schemat przyjęcia dystrybucji prędkości wirtualnych.

Przemieszczenie  $u(x, t)$  wyrazimy za pomocą prędkości

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t v(x, t) dt . \quad (2.86)$$

Przyjmujemy liniową interpolację prędkości wewnątrz elementu

$$v(x, t) = \mathbf{N}(x, t) \mathbf{v} , \quad (2.87)$$

gdzie  $\mathbf{N}$  jest macierzą funkcji interpolujących, a  $\mathbf{v}$  jest wektorem prędkości węzłowych. Wówczas równanie (2.87) przyjmie postać

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t \mathbf{N}(x, t) dt \mathbf{v} . \quad (2.88)$$

Pochodna  $\partial v / \partial t$  jest łatwa do wyznaczenia (analitycznie lub numerycznie):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \mathbf{v} . \quad (2.89)$$

Kolejne pochodne funkcji kształtu  $\partial N_i / \partial t$  są złożone i tu zaznaczymy, że zależą one od geometrii elementu  $(x_i, i = 1, \dots, 4; h)$  i zmiennych  $x$  i  $t$ . Pozostaje do ustalenia dystrybucja przemieszczeń wirtualnych  $v^*$ . W dalszych rozważaniach przyjęto, że można ją opisać deltą Diraca  $\delta(t/h - \alpha)$ , nałożoną na płaszczyznę rozpiętą na wartościach  $v_3$  i  $v_4$ , sprowadzonych odpowiednio do punktów  $x_L$  i  $x_P$  (rys. 2.12),  $x_L = x_2 + \alpha(x_3 - x_1)$ ,  $x_P = x_4 + \alpha(x_4 - x_2)$ , gdzie  $\alpha = t/h$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Łatwo więc opisać prędkość  $v^*$  oraz jej pochodną  $\partial v^* / \partial x$ . Mając wszystkie potrzebne człony, można obliczyć odpowiednie całki (2.84). Ostatecznie otrzymujemy:

$$\left[ \int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^*}{\partial x} \right)^T \mathbf{E} \mathbf{N}' d\Omega \right] \mathbf{v} + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^*}{\partial x} \right)^T \mathbf{E} \varepsilon_0 d\Omega = \mathbf{0} , \quad (2.90)$$

lub krócej:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{v} + \mathbf{s} = \mathbf{0} . \quad (2.91)$$

Formy macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  oraz wektora  $\mathbf{s}$  przedstawimy następująco:

$$\mathbf{M} = \rho A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} , \quad (2.92)$$

gdzie:

$$m_{3,i} = - \int_{x_1+\alpha(x_3-x_1)}^{x_2+\alpha(x_4-x_2)} \frac{x - x_2 - \alpha(x_4 - x_2)}{x_2 - x_1 + \alpha(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial t} dx , \quad (2.93)$$

$$m_{4,i} = \int_{x_1+\alpha(x_3-x_1)}^{x_2+\alpha(x_4-x_2)} \left[ \frac{x - x_2 - \alpha(x_4 - x_2)}{x_2 - x_1 + \alpha(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)} + 1 \right] \cdot \frac{\partial N_i}{\partial t} dx . \quad (2.94)$$

Macierz sztywności  $\mathbf{K}$  ma postać:

$$\mathbf{K} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & -s_1 & s_2 & -s_2 \\ -s_1 & s_1 & -s_2 & s_2 \end{bmatrix} , \quad (2.95)$$

gdzie:

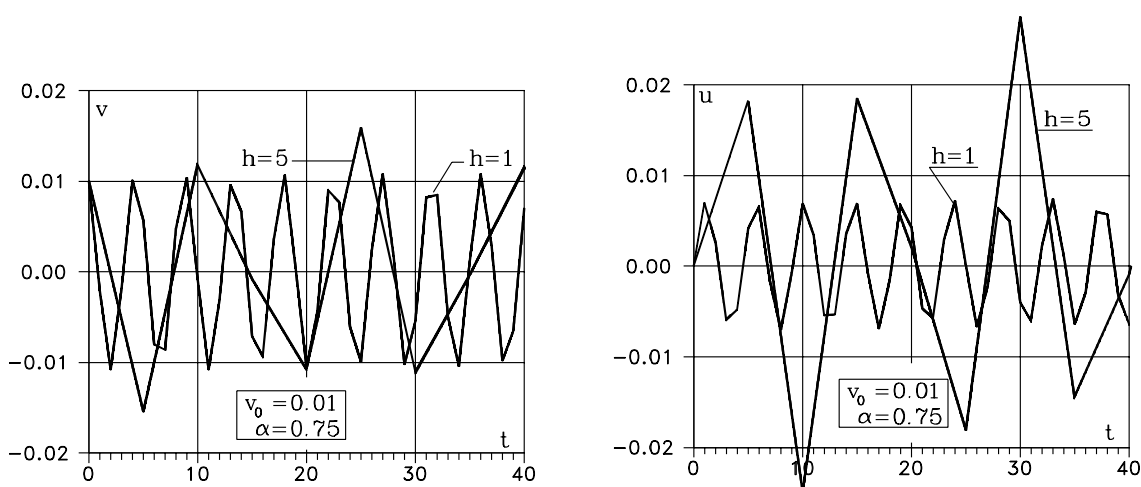
$$s_{1/2} = \frac{1}{8a_1^2} h(a_1 + a_2) \ln \frac{a_1(1 - 2\alpha) - a_2}{a_1 - a_2} \mp \frac{h\alpha}{4a_1} , \quad (2.96)$$

a  $a_1 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)/4$ ,  $a_2 = (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)/4$ . Wektor  $\mathbf{s}$  zawiera początkowe siły węzłowe

$$\mathbf{s} = EA \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 \end{Bmatrix} . \quad (2.97)$$

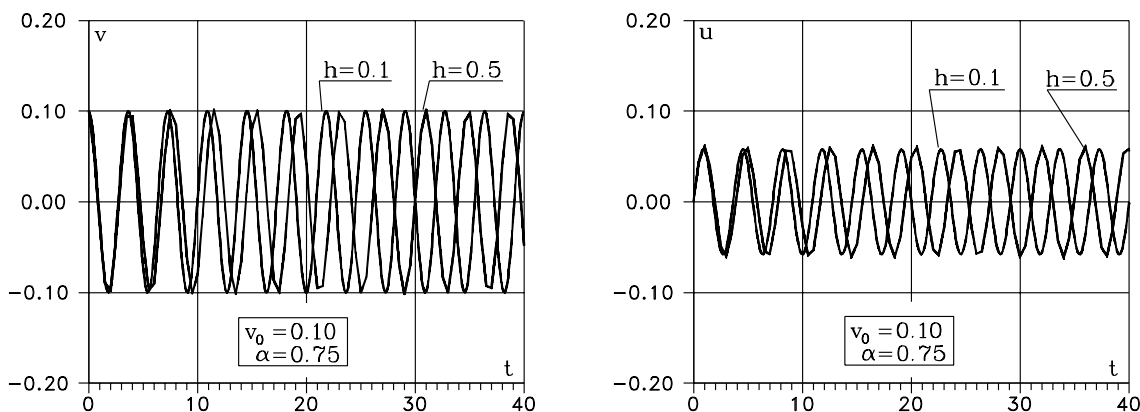
Próbné obliczenia wykonano przyjmując pręt o długości równej 1, zdyskretyzowany jednym elementem przestrzennym. Przyjęto parametr  $\alpha=0,75$ , a więc dający bezwarunkową stabilność rozwiązania. Ta ostatnia kwestia dotyczy stabilności rozwiązania równania o stałych współczynnikach, nie zaś o zmiennych, jak to jest w niniejszym przypadku. Pomimo tego, jeśli zmiana współczynników nie przeszytnia znacząco układu, możemy oczekiwać stabilności bez względu na wartość  $h$ . Pokazano to na rysunkach 2.13 i 2.14.

Na pierwszym zilustrowano przypadek, gdy nadano węzłowi prędkość początkową  $v_0=0,01$ . Maksymalne odkształcenie wynosi około 1%. Rozwiązania są stabilne, pomimo że przy kroku  $h = 5$  obserwuje się znaczny błąd fazowy i amplitudowy. Zmniejszenie  $h$  do wartości 0,5 (rys. 2.14) znacznie poprawia rozwiązanie, nawet w przypadku nadania prędkości początkowej  $v_0=0,1$  maksymalne odkształcenie wynosiło około 10%. Tak więc nieliniowość geometryczna, wynikła ze zmiennej w czasie geometrii a uwidoczniła w związkach (2.93), (2.94), (2.96), nie wpłynęła w widoczny sposób na jakość rozwiązań.



Rys. 2.13: Prędkość i przemieszczenie w funkcji czasu przy różnych krokach całkowania  $h$  ( $v_0 = 0,01$ ,  $\alpha = 0,75$ ).

Kolejne testy wykonano w przypadku, gdy pojedynczy element zamocowany został w jednym końcu. Długość początkowa wynosiła 1,0. Przyjęto bardzo miękki materiał, aby uzyskać duże przemieszczenia w porównaniu z długością pręta. Dwa wykresy przedstawione na rys. 2.15 ilustrują ruch w płaszczyźnie fazowej. Otrzymano je przy warunku początkowym  $v_0=1,0$ . Pierwszy wykonano przy  $h=0,1$  i różnych wartościach  $\alpha$ . Drugi porównuje wyniki przy  $h=0,5$ , otrzymane metodą elementów czasoprzestrzennych (linia ciągła) oraz zmodyfikowaną metodą Newtona–Raphsona z metodą różnic centralnych użytą do całkowania równania ruchu (linia przerywana). Dokładność rezultatów jest dobra, pomimo dużych zmian geometrii w czasie kroku obliczeniowego.



Rys. 2.14: Prędkość i przemieszczenie w funkcji czasu przy różnych krokach całkowania  $h$  ( $v_0 = 0, 1$ ,  $\alpha = 0, 75$ ).

### 2.3.5 Ogólny przypadek sprężystości

Zajmiemy się teraz ogólniejszym podejściem pozwalającym na dyskretyzację dowolnego zadania dynamiki układów ciągłych.

Jeżeli określimy odkształcenia  $\varepsilon$  jako

$$\varepsilon = \mathcal{D}\mathbf{u} , \quad (2.98)$$

gdzie  $\mathcal{D}$  jest operatorem różniczkowym, zaś naprężenia  $\sigma$  jako

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon , \quad (2.99)$$

oraz jeśli przyjmiemy dystrybucję wirtualnych prędkości  $\mathbf{v}^*$ , to równanie prac wirtualnych, wyrażone w prędkościach przyjmie postać następującą :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\dot{\varepsilon}^*)^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \eta_z \mathbf{v} d\Omega = 0 . \quad (2.100)$$

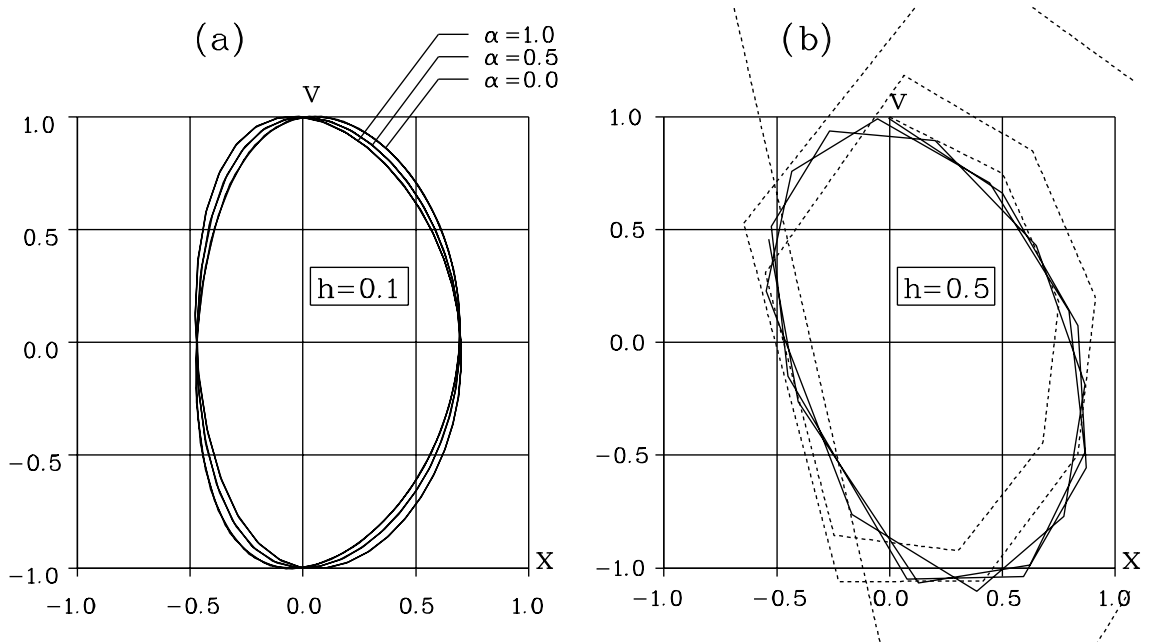
Przemieszczenie  $\mathbf{u}(t)$  określa się całką

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v} dt . \quad (2.101)$$

Po uwzględnieniu (2.98), (2.99) i (2.101) otrzymamy:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{v}^*)^T \mathbf{E} \underbrace{\mathcal{D}\mathbf{u}_0}_{\varepsilon_0} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ (\mathcal{D}\mathbf{v}^*)^T \mathbf{E} \mathcal{D} \int_0^t \mathbf{v} dt \right] d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \eta_z \mathbf{v} d\Omega = 0 . \quad (2.102)$$





Rys. 2.15: Ruch w płaszczyźnie fazowej przy różnych parametrach.

Następnie wprowadzimy formuły interpolacyjne:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} \quad \text{i} \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{N}^*\dot{\mathbf{q}} . \quad (2.103)$$

Ostatecznie mamy:

$$\left\{ \int_{\Omega} \left[ (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{E} \mathcal{D} \int_0^t \mathbf{N} dt \right] d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \eta_z \mathbf{N} d\Omega \right\} \dot{\mathbf{q}} + \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{E} \varepsilon_0 d\Omega = \mathbf{0} . \quad (2.104)$$

Jeśli przyjmie się jak poprzednio dystrybucję wirtualnych przemieszczeń zależnych od parametrów węzłowych określonych w chwili  $t = h$ , to w wyrażeniu (2.104) otrzymamy zerowe górne połowy macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  i wektora  $\mathbf{s}$ . Tak jak poprzednio możemy sterować własnościami procedury za pomocą parametru  $\alpha$ .

Przy tej okazji nasuwa się pewien wniosek dotyczący kosztu obliczeniowego otrzymanej formuły. Cofnąć się musimy do przyjętych wirtualnych rozkładów parametrów węzłowych. Dystrybucja Diraca względem czasu sprowadza problem całkowania w objętości elementu

czasoprzestrzennego  $\Omega$  do całkowania na powierzchni  $t = \alpha h$ , względem zmiennych przestrzennych  $x, y, z$ . Redukuje to koszt obliczeń, w porównaniu z kosztem procedur uzyskanych z zastosowaniem klasycznej, liniowej interpolacji parametrów wirtualnych względem czasu.

W przypadku równania (2.104) obszary całkowania upraszczają się z objętości czasoprzestrzennej  $\Omega$  do powierzchni czasoprzestrzennej (objętości rzeczywistej)  $V(\alpha h)$ . Pierwsza całka zawiera składnik całkowany w granicach  $[0, t]$ . Z uwagi na powyższe wnioski dotyczące całki z dystrybucji, pozostaje dokonać całkowania w granicach  $[0, \alpha h]$ . Przyjęcie liniowych funkcji podcałkowych  $\mathbf{N}$  pozwala wyznaczyć średnią wartość podcałkową przy  $t = \alpha h/2$  i przemnożyć przez długość przedziału  $\alpha h$ . Wówczas macierz sztywności, bezwładności i wektor naprężeń początkowych, opisujące element czasoprzestrzenny mają postać następującą:

$$\mathbf{K} = \iint_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h/2) dV \cdot \alpha h, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{M} = \iint_{V_{\alpha h}} \mathbf{N}_{\alpha h}^T(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h)}{\partial t} dV, \quad (2.106)$$

$$\mathbf{Z} = \iint_{V_{\alpha h}} \mathbf{N}_{\alpha h}^T(\mathbf{x}) \eta_z \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h) dV, \quad (2.107)$$

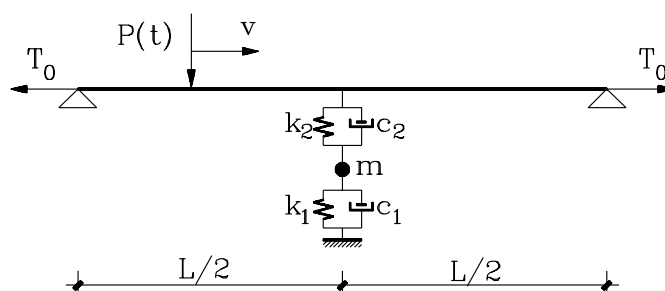
$$\mathbf{s} = \iint_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV. \quad (2.108)$$

$V_{\alpha h}$  oznacza przekrój elementu czasoprzestrzennego przy  $t = \alpha h$ .  $\mathbf{N}_{\alpha h}$  jest macierzą funkcji interpolujących, określonych na powierzchni  $V_{\alpha h}$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \cdot)$  zaś jest macierzą funkcji interpolujących w objętości  $\Omega$ , wyznaczonych w określonej chwili. Zmiana granic całkowania daje jeszcze łatwiejsze do numerycznych obliczeń formuły określające macierze charakterystyczne. Macierze (2.105), (2.106) i (2.107) mają wymiar  $N \times 2N$  ( $N$  – całkowita liczba stopni swobody). Wiążą one chwile  $t_i$  i  $t_{i+1}$ .

Jeśli funkcje rzeczywistego rozkładu prędkości są liniowe to w przybliżeniu odpowiada to omówionej wcześniej procedurze przy  $\alpha = 0,5$ . Związki identyczne uzyska się przy małych deformacjach, t.j. gdy  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1}$ . Przy dużych deformacjach geometrię przyjmuje się w środku ciężkości elementu, a więc przy odkształceniach dodatnich powyżej  $\alpha = 0,5$ , a przy ujemnych – poniżej  $\alpha = 0,5$ .

### 2.3.6 Przykłady analizy numerycznej

Przeprowadzono obliczenia prostego zadania propagacji fal w strunie, obciążonej poruszającą się siłą. Porównano wyniki z rezultatami zaczerpniętymi z literatury. Następnie



Rys. 2.16: Schemat struny obciążonej ruchomą siłą.

przeprowadzono obliczenia czterech zadań dwuwymiarowych, z użyciem materiału lepko-  
plastycznego. Dwa rozwiązania znalazły potwierdzenie w literaturze, jedno zaś w ekspe-  
rymencie.

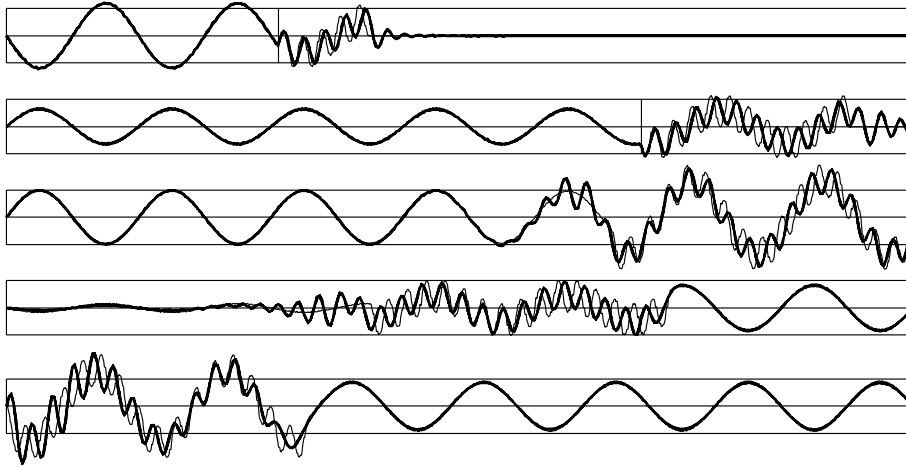
### Struna obciążona ruchomą siłą

Problem teoretyczny wywodzi się z grupy problemów technicznych, w których decydującą  
rolę odgrywa zagadnienie dynamiki obiektów jednowymiarowych pod obciążeniem rucho-  
mym. Są to linie zasilania kolei elektrycznych, szybkie kolejki linowe, koleje torowo–linowe,  
wyciągi krzeselkowe, mosty, a nawet procesy technologiczne wytwarzania lin, kabli, prętów  
czy blachy. Prace badawcze nad jednym z wyżej wymienionych zagadnień, mianowicie nad  
drganiami poprzecznymi sieci trakcyjnych wzbudzanych pantografami lokomotyw i jedno-  
stek trakcyjnych, prezentowano w wielu pracach (np. [47, 39, 42, 120]).

Schemat zadania (rys. 2.16) jak i wyniki do porównań zaczerpnięto z pracy [46]. Au-  
torzy przeprowadzili obliczenia metodami Fouriera i d'Alemberta. Poniżej identyczne  
zadanie rozwiązano metodą elementów czasoprzestrzennych, według sformułowania pręd-  
kościowego.

Przyjęto następujące dane liczbowe: długość struny  $L=100$  m, napięcie  $T_0=10$  kN,  
gęstość masy  $\rho=0,89$  kg/m, siła skupiona  $P_0=90$  N, masa skupiona  $m=10$  kg, tłumienie  
 $c_1=c_2=0$ . Przyjęto wariant warunkowo stabilny metody z parametrem  $\alpha=0,5$  i tłumieniem  
numerycznym  $\gamma=0,1$ .

W pierwszym przypadku przyjęto  $m=c_1=c_2=0$ . Siła  $P(t) = P_0 \sin \omega t$  była siłą sinu-  
soidalnie zmienną, o częstości  $\omega=0,4$  (odpowiadało to liczbie 40 cykli na przestrzeni 200  
m). Prędkość  $v$  wynosiła 79,5 m/s (co odpowiadało prędkości 0,75  $c$ ). Na rys. 2.17 po-  
kazano przemieszczenia poprzeczne w wybranych chwilach. Kreską pionową na 3. pierw-  
szych wykresach zaznaczono położenie siły. Linia gruba obrazuje wyniki uzyskane metodą



Rys. 2.17: Przemieszczenia poprzeczne struny w chwilach równych 0,3, 0,7, 1,0, 1,2 i 1,5 czasu pełnego przejazdu (linia cienka – metoda Fouriera, linia gruba – metoda elementów czasoprzestrzennych).

elementów czasoprzestrzennych a linia cienka – metodą Fouriera. Widać bardzo dobrą zgodność obu rozwiązań. Drugi przypadek jest bardziej złożony. Zawiera w połowie pręgi podparę, złożoną z dwóch sprężyn  $k_1$ ,  $k_2$  i masy  $m$ . Jadąca z prędkością  $v=79,5$  m/s siła jest stała. Na rys. 2.18 przedstawiającym wyniki, grubą pionową kreską oznaczono podparę. Oba rozwiązania, metodą elementów czasoprzestrzennych i metodą Fouriera, pokrywają się. W cytowanej już pracy [46] wyniki otrzymane metodą falową jakościowo odbiegają od obu rezultatów pokazanych na rys. 2.18.

### Deformacja lepkoplastyczna

Przyjęcie lepkoplastycznego modelu ciała prowadzi do znacznych uproszczeń. Jednorodny, izotropowy i nieściśliwy materiał opisano według prawa Nortona–Hoffa [86].

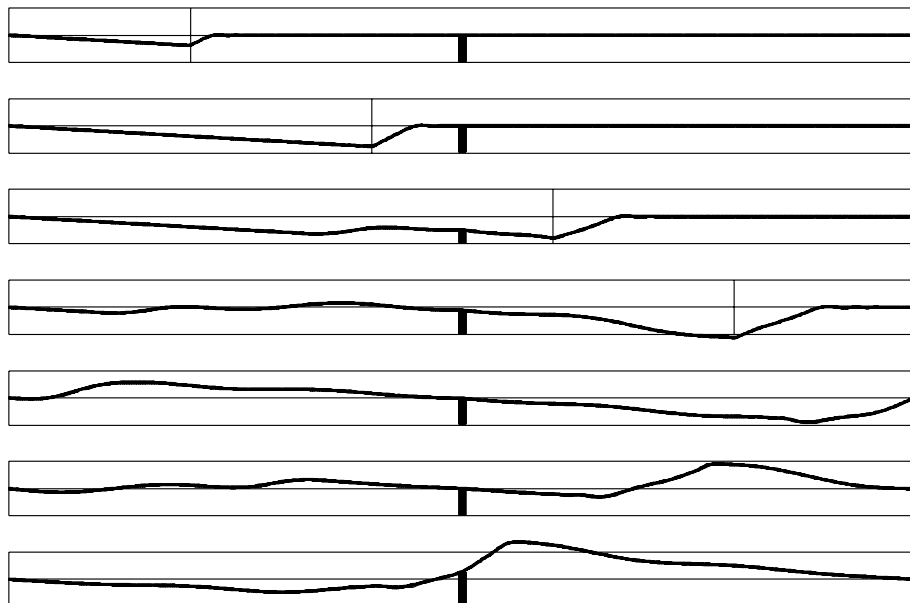
Dewiatorową część tensora naprężeń Cauchy’ego  $\boldsymbol{\tau}'$  przedstawia zależność

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{K \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{(\sqrt{3}D)^{1-m}} \quad (2.109)$$

gdzie:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v}) = \mathcal{D}\mathbf{v} \quad (2.110)$$

$$D = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad (2.111)$$



Rys. 2.18: Przemieszczenia poprzeczne struny co 0,2 czasu pełnego przejazdu (linia cienka – metoda Fouriera, linia gruba – metoda elementów czasoprzestrzennych).

a  $K$  i  $m$  są stałymi. Praca wirtualna w warstwie czasoprzestrzennej wyraża się całką

$$\int_0^h \int_V (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_0^h \int_V (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)^T \boldsymbol{\tau} t d\Omega = \int_0^h \int_{\partial V} (\mathbf{v}^*)^T \mathbf{f} d(\partial V) dt \quad (2.112)$$

Rozpatrzmy krótko drugi człon, gdyż tylko on różni się od odpowiedniego członu w równaniu (2.100). Interpolacja prędkości wirtualnych uwzględniona w (2.110) i rzeczywistych, uwzględniona w (2.109) pozwala zapisać ten człon w postaci następującej:

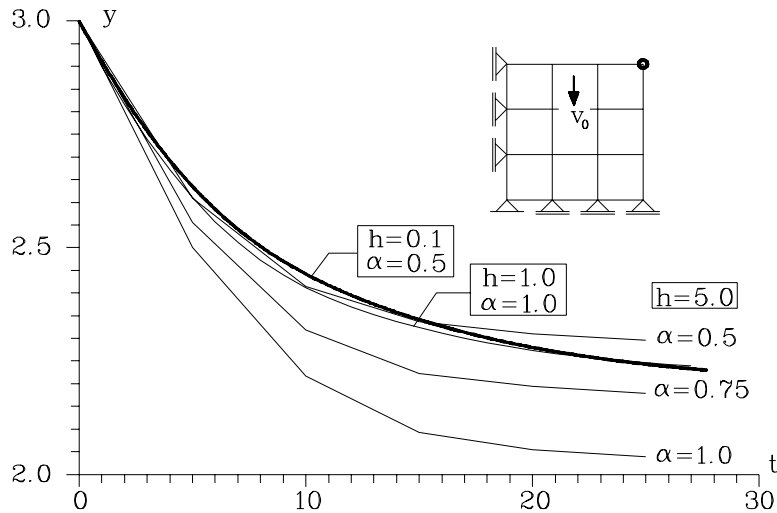
$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \frac{K}{(\sqrt{3}D)^{1-m}} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.113)$$

W efekcie przekształceń macierz odpowiadająca temu członowi a związana z energią potencjalną będzie miała postać następującą:

$$\mathbf{K} = \int_0^h \int_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h) dV dt \quad (2.114)$$

Przy porównaniu powyższego związku z macierzą sztywności odpowiadającą przypadkowi sprężystemu (2.105) dostrzegamy, że druga w iloczynie funkcja kształtu określona jest w innej chwili oraz że brak jest mnożnika  $\alpha h$ . Inny jest też obszar całkowania. Ponadto macierz  $\mathbf{E}$  jest teraz zależna od prędkości odkształceń. Równanie końcowe ma więc postać

$$(\mathbf{K} + \mathbf{M} + \mathbf{Z})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (2.115)$$



Rys. 2.19: Pionowa współrzędna narożnego węzła w czasie.

Warunek nieściśliwości

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.116)$$

wchodzący w skład funkcji kary można łatwo rozwinąć w odpowiednią formułę. Człon funkcji kary obciążający funkcjonal ma postać:

$$\frac{1}{2} \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}^* \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{A} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.117)$$

gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem funkcji kary a macierz  $\mathbf{A}$  w zadaniu dwuwymiarowym ma postać następującą:

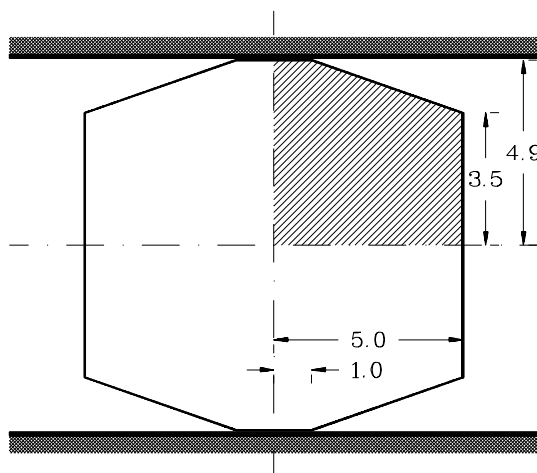
$$\mathbf{A} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

**Przykłady.** Próbne obliczenia wykonano dla kwadratu podpartego na dolnej krawędzi. Nadano mu prędkość początkową  $v_0$ . Przyjęto materiał lepkoplastyczny o następujących danych:  $K=0,01$ ,  $m=0,1$ ,  $\rho=1,0$ , oraz  $v_0=0,1$ . Obliczenia wykonano przy różnym kroku czasowym i przy różnych wartościach parametru  $\alpha$ . Położenie prawego górnego naroża w czasie przedstawia rys. 2.19. Krok czasowy  $h=0,1$  jest dostatecznie mały i wyniki można uznać za dokładne. Przy dużym kroku czasowym  $h=5$  rozwiązanie przybliża się do dokładnego (za takie przyjęto tu rozwiązanie uzyskane przy małym kroku czasowym i schemacie niejawnym, z parametrem  $\alpha = 0,5$ ) wraz z przyjmowaniem coraz mniejszej

wartości parametru  $\alpha$  (od 1,0 do 0,5), tj. przy obliczeniach wykonywanych procedurą niejawną.

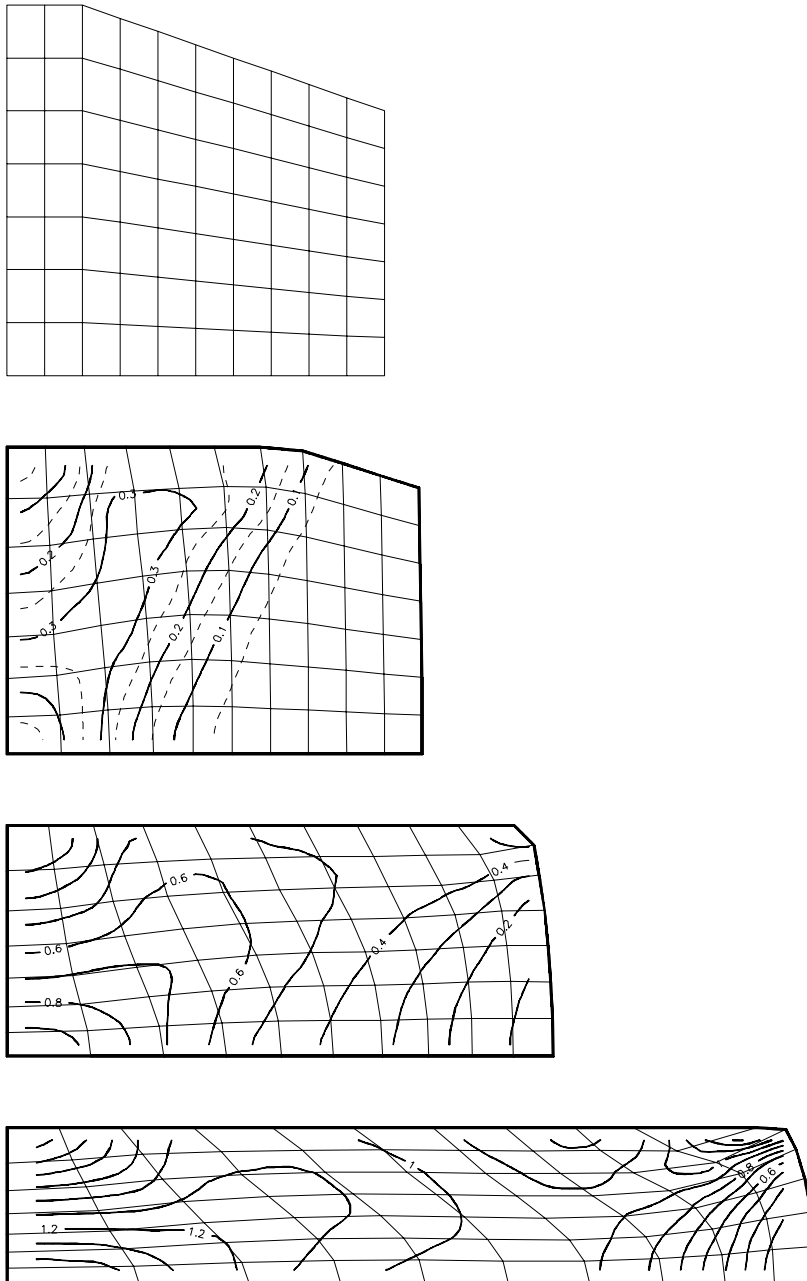
Nasuwa się wniosek, potwierdzający zresztą opinie wyrażane w wielu pracach, że nie można kategorycznie stwierdzić, która z procedur, jawna czy niejawną, jest skuteczniejsza. O ile procedura jawna zmierza do wyniku każdego etapu jednokrokwowo, to wymaga większej liczby kroków o krótszym kroku czasowym  $h$  ( $h = 1, \alpha = 1$ ). Procedura niejawną pozwala na znaczne wydłużenie kroku czasowego, ale wymaga iteracyjnego dochodzenia do rozwiązania w każdym kroku ( $h = 5, \alpha = 0,5$ ). Sumaryczny koszt obliczeń jest w obu przypadkach podobny.

Kolejne obliczenia wykonano rozwijając przykład zaczerpnięty z pracy [50]. Ćwiartka płaskiego, ośmiokątnego obszaru (rys. 2.20) ściskana jest za stałą prędkością  $v=0,1$ . Przyjęto materiał lepkoplastyczny według związków podanych w ww. pracy. Stałe materiałowe wynoszą:  $m=0,1$ ,  $K=1$ ,  $\rho=0,0$ . Obliczenia prowadzono przy kroku  $\Delta t=1$ . Na górnej powierzchni uwzględniono tarcie proporcjonalne do prędkości stycznej węzłów  $v_t$ :  $T = -\beta|v_t|^{m-1}v_t$  ( $\beta=0,05$ ). Zdeformowaną siatkę elementów wraz z uogólnionymi odkształceniami uwidocznił na rys. 2.21. Kolejny przykład dotyczy walca o wysokości



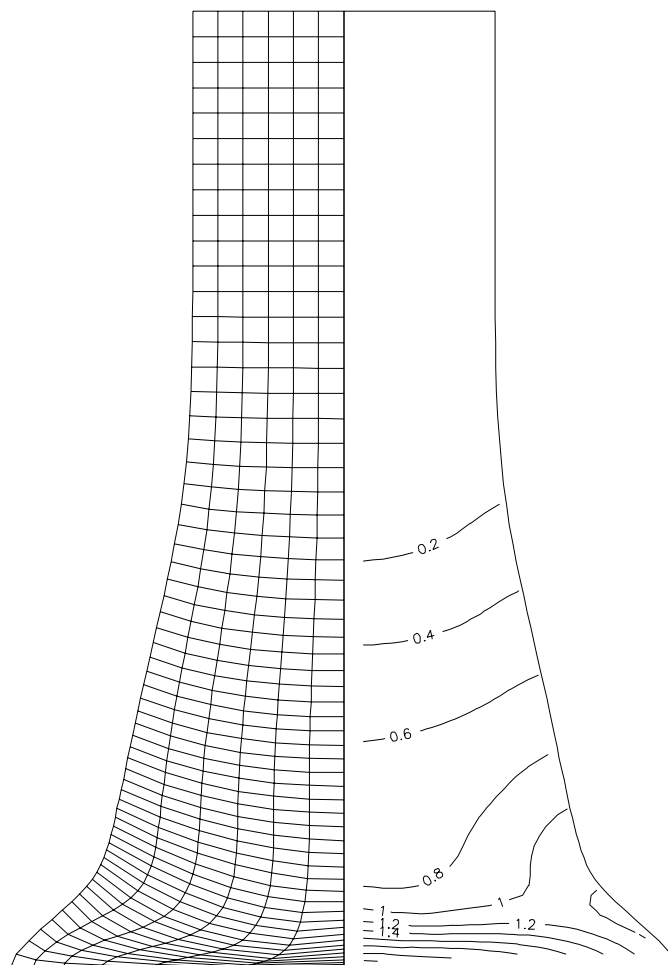
Rys. 2.20: Schemat obszaru poddanego ściskaniu.

$H=3,24$  cm, promieniu  $R=0,32$  cm, gęstość materiału  $\rho=8,93$  g/cm<sup>3</sup>. Materiał lepkoplastyczny o parametrach:  $m=0,1$ ,  $K=0,005$ . Walec uderza z prędkością  $v=0,0227$  cm/ $\mu$ s w sztywny fundament. Przyjęto idealny poślizg w miejscu kontaktu z podporą. Obliczenia wykonano przy  $\alpha=0,5$  i kroku czasowym  $h=1,0$   $\mu$ s. Rys. 2.22 prezentuje zdeformowaną siatkę elementów oraz uogólnione odkształcenia po 80  $\mu$ s. Maksymalne odkształce-



Rys. 2.21: Zdeformowana siatka elementów oraz uogólnione odkształcenia rejestrowane co 10 kroków obliczeniowych, tj. dla  $t=0, 10, 20, 30$ .





Rys. 2.22: Siatka elementów oraz uogólnione odkształcenia po  $80 \mu s$ .

nie zarejestrowane w chwili  $t=80 \mu s$  wynosi 3,04, końcowa wysokość 2,014 cm, końcowy promień 0,707 cm. Można porównać otrzymane rezultaty z innymi publikowanymi wynikami, dotyczącymi tego samego zadania. Autorzy prac stosują często inny materiał (np. sprężysto–plastyczny ze wzmocnieniem) oraz różnorodne techniki obliczeniowe, co powoduje, że porównanie nie jest jednoznaczne. Otrzymują oni, z dość dużym rozrzutem, wartości zebrane w tabelicy 2.3 [65, 73, 113]. Mimo różnych modeli reologicznych zbieżność wyników m.e.cz. z wartościami uzyskanymi przez innych autorów jest dostatecznie dobra.

Tab. 2.3: Porównanie wyników testu zderzenia walca.

program	końcowa dł. [cm]	końcowy promień [cm]	maks. odksz.
wg [73] 2-wym.	0,711	2,147	3,09
wg [73] 3-wym.	0,711	2,147	3,09
DYNA2D <sup>a</sup>	0,707	2,143—2,152	2,54—3,21
DYNA3D	0,703	2,147	2,96
MARC	0,702	2,166	3,24 <sup>b</sup>
			3,00 <sup>c</sup>
NIKE2D <sup>a</sup>	0,707	2,147	2,97
	0,712	2,076	3,03
m. e. cz.	0,707	2,014	3,04

<sup>a</sup>Różni autorzy podają różne dane, zależne od przyjętych parametrów obliczeniowych.

<sup>b</sup>Średnia wartość w elemencie.

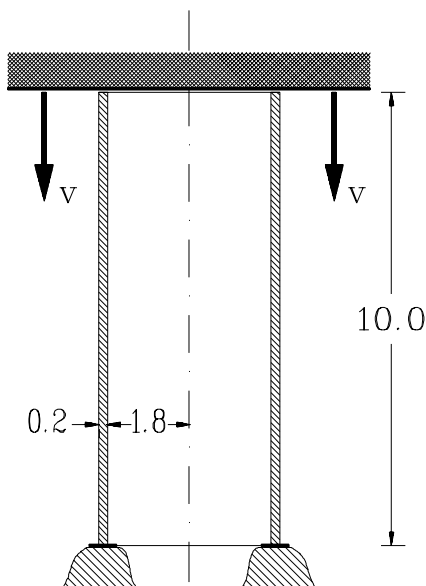
<sup>c</sup>Wartość węzłowa, ekstrapolowana z punktów Gaussa.

Innym przykładem jest osiowo-symetryczny cylinder ściskany ze stałą prędkością  $v=180$  km/h. Siatka podziału zawiera 1250 elementów czworokątnych. Schemat zadania przedstawia rysunek 2.23. Rysunek 2.24 przedstawia kolejne fazy deformacji cylindra zakończona zniszczeniem strefy podparcia. Rysunek 2.25 pokazuje pierwszą, trzecią i piątą fazę zgniatania w aksonometrii. W celu porównania jakościowego przedstawić można wynik eksperymentu. Zgniatano cylinder ze stopu gliniwo-magnezowego AlMgSi05, o wysokości  $H=100$  mm i masie  $m=40$  g. Zgniotu dokonano przez uderzenie spadającą z wysokości 5 m masą 19 kg. Rys. 2.26 przedstawia wynik eksperymentu.

## 2.4 Elementy trójkątne, wyrażone w prędkościach

Spróbujemy skonstruować model elementu trójkątnego pręta drgającego osiowo oraz zbadać jego własności. Istotna przy tym będzie dokładność amplitudy i okresu drgań swobodnych oraz stabilność schematu obliczeniowego z wykorzystaniem takich elementów.

Znane już równanie mocy wirtualnej (2.61) wykorzystamy do zbudowania równania rekurencyjnego, wykorzystującego elementy trójkątne. Weźmy na początek dwa uzupełniające się trójkąty, przedstawione na rys. 2.27. Zasada prac wirtualnych (2.62) pozwala



Rys. 2.23: Schemat ściskania lepkoplastycznego cylindra.

napisać równanie:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \rho A \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial (\mathbf{N}^*)^T}{\partial x} E A \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{t_0}^t v dt \right] d\Omega = 0 . \quad (2.119)$$

$\mathbf{N}^*$  jest macierzą wirtualnych funkcji kształtu,  $v$  jest prędkością w punkcie  $(x, t)$ ,  $\Omega$  obszarem trójkąta **A** lub **B**, a  $E$ ,  $\rho$  i  $A$  są odpowiednio modułem Younga, gęstością masy i polem przekroju poprzecznego pręta. W elemencie **A** prędkość rzeczywistą opisuje formuła

$$v_A(x, y) = \mathbf{N}_A(x, t) \mathbf{v} = \left[ 1 - \frac{t}{h}, \frac{x}{b}, -\frac{x}{b} + \frac{t}{h} \right] \mathbf{v} , \quad (2.120)$$

a funkcje wirtualne węzłów 3 i 4 mają postać:

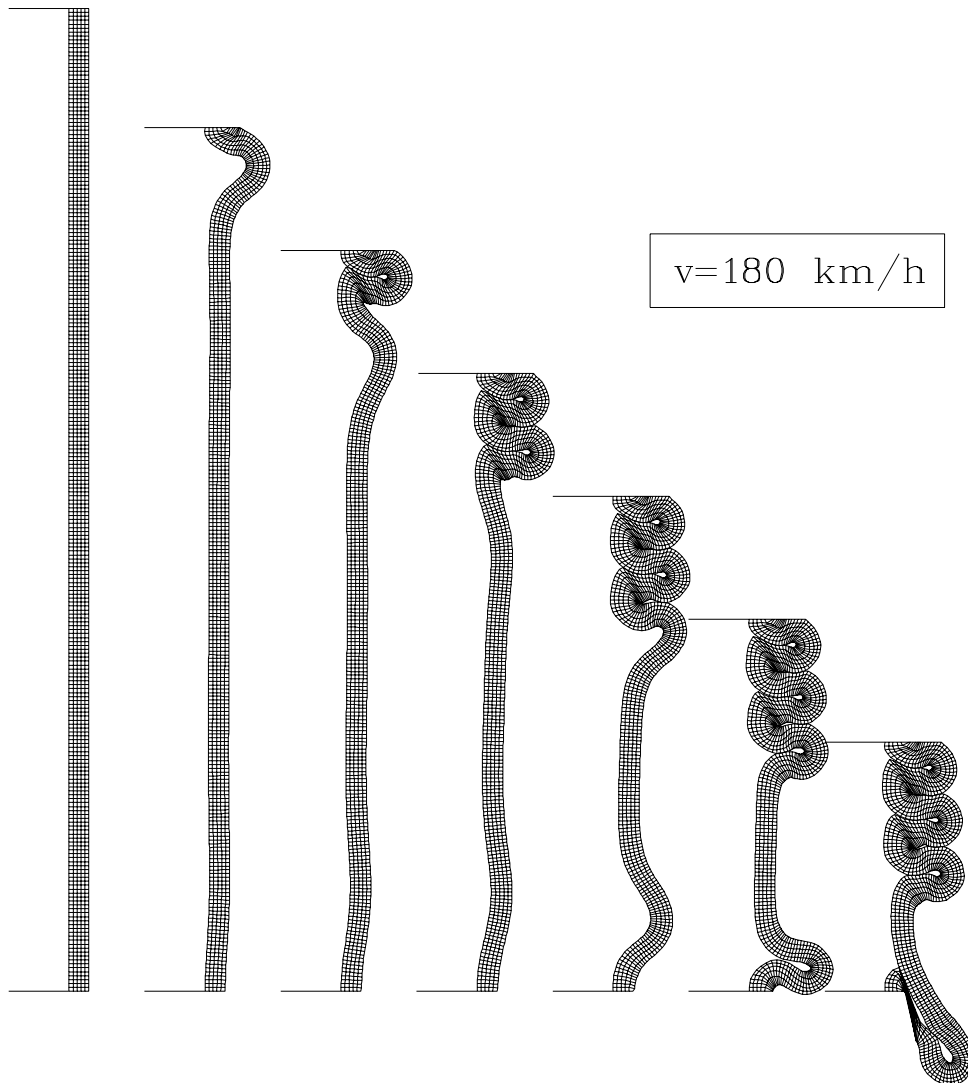
$$\mathbf{N}_A^*(x, t) = \left[ -\frac{x}{b} + \frac{t}{h}, \frac{x}{b} \right] . \quad (2.121)$$

Macierz bezwładności wyznacza się wówczas ze związku:

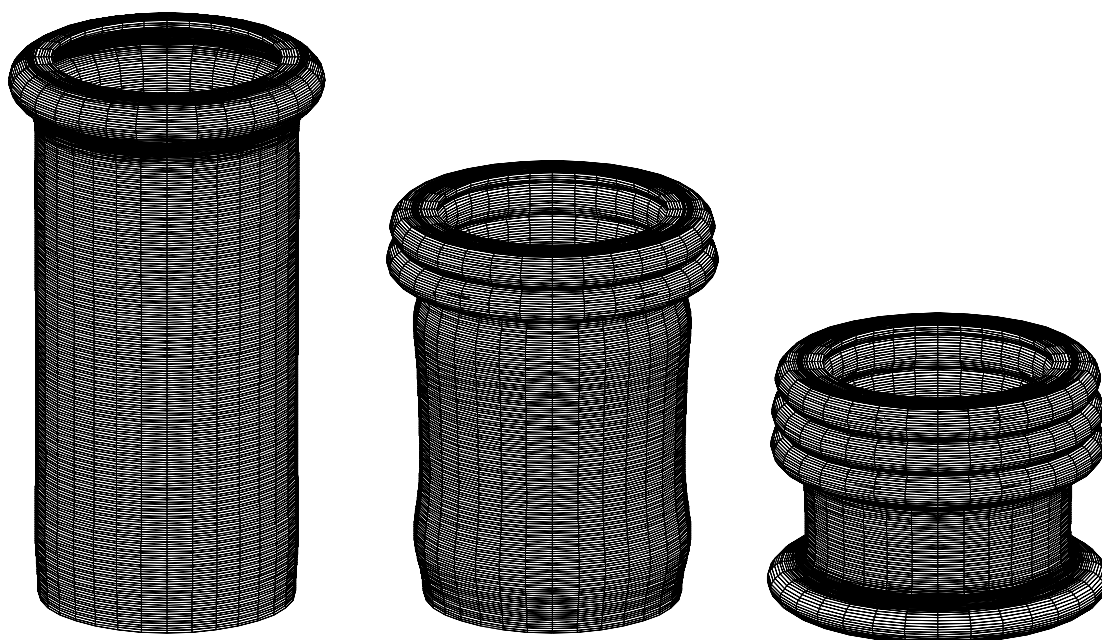
$$\mathbf{M}_A = \int_0^b \int_{\frac{hx}{b}}^h (\mathbf{N}_A)^T \rho A \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N}_A dt dx = \rho A \frac{b}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.122)$$

W elemencie **B** rzeczywiste funkcje kształtu i wirtualna funkcja kształtu węzła 4 mają postać:

$$\mathbf{N}_B = \left[ 1 - \frac{x}{b}, \frac{x}{b} - \frac{t}{h}, \frac{t}{h} \right] , \quad \mathbf{N}_B^* = \frac{t}{h} . \quad (2.123)$$



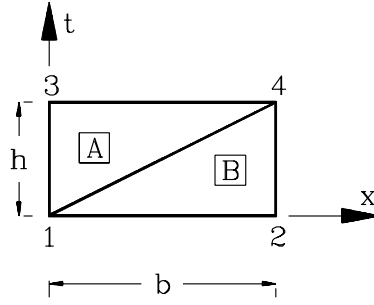
Rys. 2.24: Kolejne fazy deformacji cylindra.



Rys. 2.25: Rysunki aksonometryczne deformacji cylindra.



Rys. 2.26: Wynik eksperymentu dynamicznego zgniatania cylindra.



Rys. 2.27: Układ elementów trójkątnych opisanych prędkościami.

Macierz mas ma więc postać

$$\mathbf{M}_B = \rho A \frac{b}{6} [0, -1, 1] . \quad (2.124)$$

Macierze sztywności opisane drugim członem równania (2.119) mają postać następującą:

$$\mathbf{K}_A = \int_0^b \int_{\frac{hx}{b}}^h \frac{\partial(\mathbf{N}_A^*)^T}{\partial x} E A \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t \mathbf{N}_A dt \right] dt dx = E A \frac{h^2}{3b} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_B = \mathbf{0} . \quad (2.125)$$

Wektor sił początkowych w elemencie A ma postać:

$$\mathbf{s} = E A \int_0^b \int_{\frac{hx}{b}}^h \frac{\partial(\mathbf{N}_A^*)^T}{\partial x} \frac{\partial u(t_0)}{\partial x} dt dx = E A \varepsilon_0 \frac{h}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (2.126)$$

Można posłużyć się przekształconą formą (2.119):

$$\frac{1}{4\Delta} (x_m t_n - x_n t_m) \sum_i x_{kj} v_i + \frac{t_{mn}}{2} \varepsilon_0 - \frac{1}{4\Delta} t_{mn} t_0 \sum_i x_{jk} v_i = 0 , \quad (2.127)$$

gdzie  $\Delta$  jest polem powierzchni trójkąta,  $t_{mn} = t_m - t_n$ ,  $x_{kj} = x_k - x_j$  a  $t_0$  jest współrzędną czasową węzła o najmniejszej współrzędnej  $t_i$ , w układzie o początku w środku ciężkości trójkąta.

Zsumowane macierze układu pozwalają napisać równanie rekurencyjne w następującej postaci:

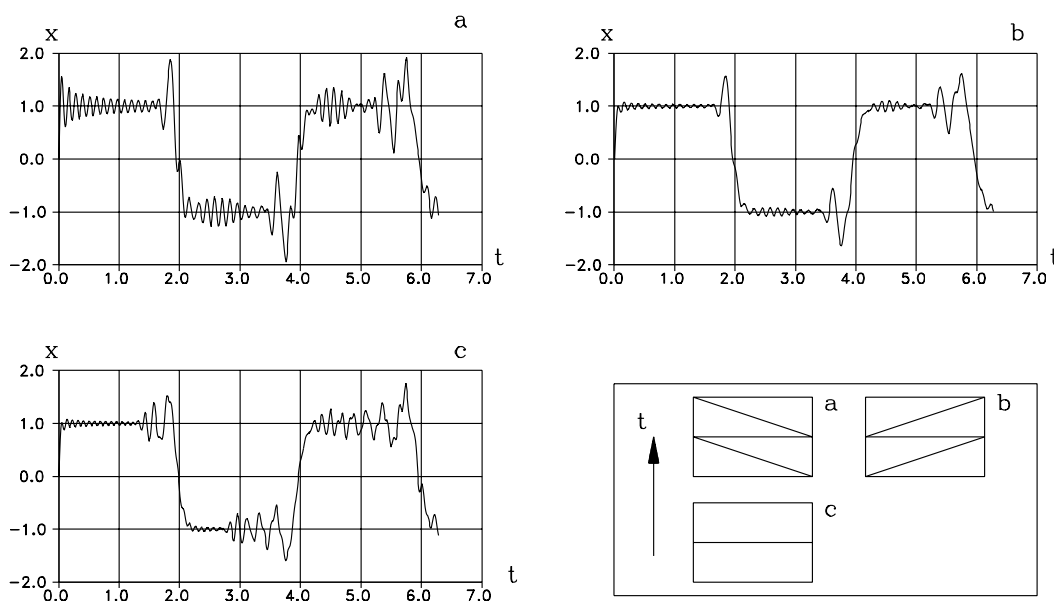
$$\left( \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c^2 h^2}{3b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{v} + \frac{h}{2b} c^2 \varepsilon_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} . \quad (2.128)$$

Jeśli ograniczymy prawy stopień swobody, otrzymamy układ drgający o jednym stopniu swobody, opisany układem równań:

$$\begin{cases} v_{i+1} = \frac{(1-2\kappa^2)v_i + 3\varepsilon_i}{1+\kappa^2} , & \kappa = \frac{ch}{b} , \\ \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - \left( \frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v_{i+1} \right) \frac{h}{b} . \end{cases} \quad (2.129)$$

Okres drgań oscylatora modelowanego układem (2.129) (przy jednostkowych wartościach  $E, S, \rho, b$ ) wynosi 3,628, wobec wartości ścisłej  $2\pi/\sqrt{3} \approx 3,6276$ .

Wyprowadzone zależności sprawdzono na przykładach. Zadaniem testowym był pręt drgający osiowo, podzielony na 20 elementów przestrzennych. Przyjęto siatki typu  $a$  i  $b$  pokazane na rys. 2.28. W celu dokonania porównania zadanie rozwiązano z użyciem siatki elementów czworokątnych, przy parametrze  $\alpha = 1/2$ . We wszystkich przypadkach przyjęto krok czasowy  $h = 0,01$ . Przeszyczenia swobodnego końca pręta w czasie, jako odpowiedzi układu, również przedstawiono na rys. 2.28. Porównując wykresy można stwierdzić poprawne zachowanie się przyjętego układu. Amplitudy odpowiadające częstości pasywnym są niewielkie. Różnica w tym zakresie ilustrowana na rys. 2.28a i 2.28b wynika ze sposobu wprowadzenia warunku początkowego. W przypadku  $a$  prędkość początkową  $v_0 = 1$  nadano skrajnemu węzłowi, który należał do jednego tylko trójkąta. W przypadku  $b$  węzeł skrajny przy  $t = 0$  łączył dwa elementy trójkątne. Ostatecznie w tym konkretnym przypadku, przy zadanym sposobie obciążenia, siatka  $b$  nieco lepiej modeluje propagację impulsów. Macierze sztywności w przypadku siatki złożonej z 2 trójkątów (jak np. na rys.



Rys. 2.28: Przeszyczenia w czasie swobodnego końca pręta przy siatkach trójkątnych i czworokątnej (20 elementów przestrzennych).

2.27) można też wyprowadzić w prostszy sposób. Należy obliczyć pracę sił wewnętrznych na wirtualnych przeszczeniach, w obszarze  $0 \leq x \leq b, 0 \leq t \leq h$ . Przykładowo, w przy-

padku układu z rys. 2.28a przyrost odkształcenia w przedziale  $[0, h]$ , liczonego w  $x = b/3$ , a więc w środku ciężkości lewego trójkąta, wynosi:

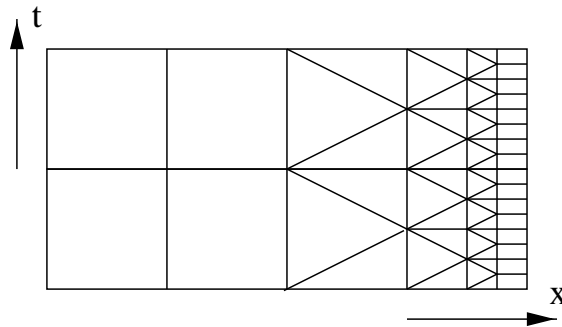
$$\Delta\varepsilon = \frac{2}{3}h \frac{v_2 - v_1}{b} + \frac{1}{3}h \frac{v_4 - v_3}{b} \quad (2.130)$$

Ostatecznie otrzymuje się macierz

$$\frac{EAh^2}{6b} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad (2.131)$$

Przemieszczenia na końcu przedziału  $[0, h]$  wyznacza się formułą  $x_1 = x_0 + hv_0$ . Odpowiedź układu nie zależy od tego, w którym miejscu obliczać się będzie przyrost odkształcenia oraz wzdłuż jak położonego przedziału czasu o długości  $h$  dokonywać się będzie całkowania. Przykładowe schematy wraz z odpowiednimi macierzami sztywności ujęto w tablicy 2.4. Pierwszy z przedstawionych tam wariantów jest warunkowo stabilny. Pozostałe są bezwarunkowo stabilne ze względu na krok czasowy. Przyjmując macierze bezwładności podane w (2.122) i (2.124), zsumowane w (2.128) oraz macierz sztywności według pierwszego układu z tab. 2.4, otrzymuje się trójkątne macierze współczynników (prawa podmacierz, związana z  $\mathbf{v}_{i+1}$ ).

Elementy trójkątne doskonale nadają się do zagęszczania i rozrzedzania siatki węzłów w czasie. Można też jednocześnie modyfikować krok czasowy (rys. 2.29). Próby wykorzy-



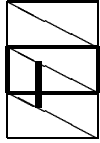
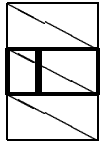
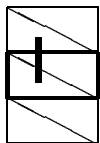
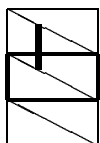
Rys. 2.29: Przykład zagęszczania siatki w czasie i w przestrzeni przy zastosowaniu elementów trójkątnych.

stania trójkątów do  $h$ -adaptacji zostaną przedstawione w rozdziale 5.3.2.

□



Tab. 2.4: Macierze sztywności w różnych schematach.

schemat	macierz sztywności
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[ \begin{array}{cc cc} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right]$
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[ \begin{array}{cc cc} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right]$
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[ \begin{array}{cc cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right]$
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[ \begin{array}{cc cc} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right]$

W rozdziale 2 sformułowano metodę elementów czasoprzestrzennych, posługując się w opisie alternatywnie przemieszczeniami oraz prędkościami przemieszczeń. Sformułowanie z wykorzystaniem przemieszczeń, przy zastosowaniu stacjonarnej siatki węzłów, było rozwijane w pracach Kączkowskiego (np. [100, 101, 102, 109]). Jak wykazali Kacprzyk i Lewiński w pracy [99], oraz jak pokazano w niniejszej pracy w tablicy 2.2, podejście takie daje identyczne formuły jak metoda Newmarka z parametrem  $\beta=1/6$ . W tym kontekście badania dotyczące stacjonarnego podziału czasoprzestrzeni w opisie przemieszczeniowym, jako nowość, wniosły aspekty metodologiczne: sformułowanie równania czasopracy (czteropracy) wirtualnej oraz interpretację wielkości fizycznych w czasoprzestrzeni, w odniesieniu do mechaniki ciał odkształcalnych. Podstawową wadą tego podejścia jest znaczny koszt numeryczny budowania macierzy sztywności (w czasoprzestrzennym rozumieniu) poszcze-

gólnych elementów. Koszt ten jest ok. 4 razy większy niż w metodach klasycznych, z uwagi na fakt, że wymiar macierzy w obu kierunkach był 2 razy większy. Trzeba tu jednak zaznaczyć, że wszystkie ćwiartki macierzy czasoprzestrzennych są w pewien sposób ze sobą powiązane i wykorzystanie tych związków umożliwia obniżenie kosztu ich tworzenia nawet czterokrotnie. Jest to oczywiste wobec faktu, że stosowane tu podejście czasoprzestrzenne znajduje odpowiedniki w metodach klasycznych.

Znacznie dalej posunięto się w niniejszej pracy oraz we wcześniejszych publikacjach autora. Przyjęto mianowicie, że czasoprzestrzeń można dyskretyzować w sposób bardziej różnorodny. Przy stałej siatce węzłów w dwóch kolejnych chwilach, warstwę czasoprzestrzenną można wypełniać nie tylko prostopadłościanami (obiektami typu multipleks), ale także czworościanami (obiektami typu sympleks). Elementy typu sympleks z powodzeniem zastosowano do analizy konstrukcji wielowymiarowych, takich jak płyty czy bryły trójwymiarowe. Dokładność obliczeń była porównywalna z dokładnością uzyskaną metodami klasycznymi. Koszt budowy poszczególnych elementów jest wprawdzie znaczny, ale korzyści uzyskuje się na etapie rozwiązywania układu równań algebraicznych. W rozdziale 3 pokazano, że szybsze rozwiązanie wynikowego układu równań uzyskuje się dzięki trójkątnej postaci macierzy współczynników, otrzymywanej na etapie jej budowania.

Bardziej interesujące wydaje się być zaproponowane po raz pierwszy przez autora w pracach [16, 20, 24] sformułowanie metody elementów czasoprzestrzennych, wyrażone w prędkościach przemieszczeń. Sposób formułowania równań równowagi sił pokazano na przykładzie pojedynczego stopnia swobody. Wprawdzie funkcję prędkości wirtualnych można dobierać ze stosunkowo dużą swobodą, to jednak ze względów praktycznych zdecydowano się na rozkład prędkości w postaci pików Diraca, umieszczony w chwili  $\alpha h$ . Przebadano w tym przypadku następujące własności rozwiązania: błąd amplitudy, błąd fazowy, stabilność, własności tłumiące przy dodaniu numerycznego tłumienia i zbieżność. Pokazano, że jeśli funkcja wirtualna prędkości zawierać będzie więcej niż jeden, odpowiednio rozmieszczonych w przedziale  $[0, h]$  pików Diraca, to można uzyskać formuły wyższego rzędu całkowania równania różniczkowego. Można tak dobrać funkcję wirtualną prędkości, że uzyska się metody Rungego–Kutty.

Dalszym zamiarem było doprowadzenie do rozwiązywania układów wielowymiarowych. Charakterystyczną cechą wszystkich zadań jest zmieniająca się w czasie geometria oraz własności materiałowe. Zmiana geometrii w kroku czasowym odzwierciedlana jest w kształcie elementu czasoprzestrzennego. Staje się on trapezem, którego ukośne boki obrazują ruch punktu materialnego. Siatka dyskretyzacji staje się niestacjonarna. Zbadano taki przypadek siatki i wykazano, że najkorzystniej przedstawia się rozwiązanie z parametrem

$\alpha=1/2$ .

Zaletą sformułowania z wykorzystaniem prędkości jest łatwość opisu zadań o własnościach materiałowych, zależnych m.in. od prędkości odkształceń. Na przykładzie dużych deformacji lepkoplastycznych pokazano, że z powodzeniem mogą być stosowane zarówno warianty jawne ( $\alpha = 1$ ) jak i niejawne ( $\alpha < 1$ ). W pierwszym przypadku przejście z kroku na krok jest bezpośrednie i nie wymaga iteracji, a krok czasowy powinien być mały aby zapewnić dokładność. W drugim wariancie można wydłużyć krok całkowania, ale okupione jest to koniecznością iteracyjnego dochodzenia do równowagi. Ten ostatni przypadek zastosowano do rozwiązywania złożonych zadań kontaktowych, w tym z kontaktem wewnętrznym, między fragmentami analizowanego ustroju. Obliczenia wykazały szybką zbieżność procesu iteracyjnego.

Najatrakcyjniejsze w stosowaniu są jednak elementy trójkątne. Pozwalają one m.in. zagęścić siatkę podziału zarówno w czasie jak i w przestrzeni. Ma to podstawowe znaczenie przy modelowaniu zadań kontaktowych (p. 4.1.1 i 5.3.2). W niniejszej pracy po raz pierwszy zaprezentowano elementy trójkątne pręta drgającego osiowo, w opisie prędkościowym. Ich zasadniczą zaletą jest bezwarunkowa stabilność ze względu na krok czasowy. Takiej własności nie udało się uzyskać przy opisie przemieszczeniowym. Trzeba tu podkreślić, że elementy trójkątne opisane prędkościami, podobnie jak elementy trójkątne opisane przemieszczeniami, pozwalają bezpośrednio zbudować trójkątne macierze współczynników (tab. 2.4, schemat nr 1). Jednak w takim przypadku traci się bezwarunkową stabilność rozwiązania.

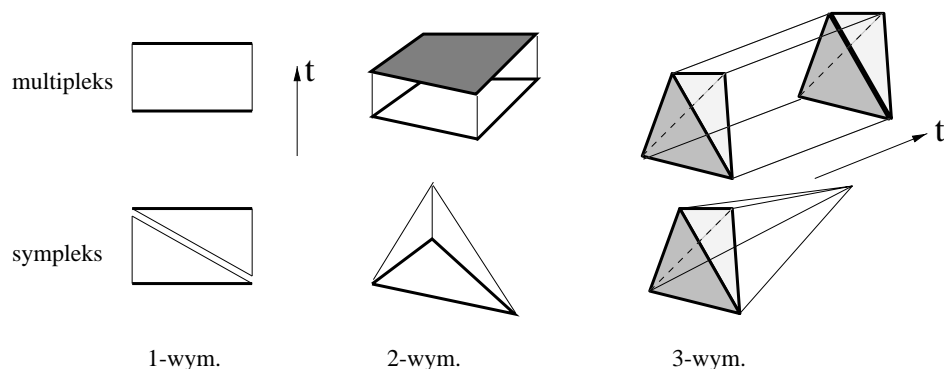


## Rozdział 3

# Własności elementów symplektycznych

Formuły metody elementów skończonych prowadzą do układów równań algebraicznych. Ich rozwiązanie stanowi duży udział w całości procesu obliczeniowego. Liczba operacji arytmetycznych znacznie wzrasta w zadaniach nieliniowych, wymagających wielokrotnego rozwiązywania układu równań w każdym kroku czasowym. Stosowane są dwie grupy metod rozwiązywania układów równań: bezpośrednie i iteracyjne. Pierwsze prowadzą do rozwiązania przy jednokrotnym zaangażowaniu macierzy współczynników. Stosowany jest tu bądź rozkład macierzy na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych, bądź bezpośrednia triangularyzacja macierzy. Wyznaczenie niewiadomych przy trójkątnych postaciach macierzy jest natychmiastowe. Wadą tej grupy metod jest konieczność stosowania specjalnych algorytmów zmniejszających szerokość pasma macierzy. W przypadku zadań płaskich, zdykretyzowanych siatką o jednakowej liczbie węzłów w obu kierunkach, koszt rozwiązania układu jest proporcjonalny do czwartej potęgi liczby węzłów w jednym kierunku. Z kolei w przypadku kostki trójwymiarowej, pokrytej równomiernie siatką w trzech kierunkach, koszt ten wzrasta wraz z siódmą potęgą liczby węzłów na jednej krawędzi. Efekty nieliniowe zadania i konieczność iteracyjnego, wolniejszego wraz ze wzrostem liczby węzłów, dochodzenia do równowagi sił jeszcze bardziej wydłuża proces obliczeniowy.

Druga grupa, grupa metod iteracyjnych (np. Jacobiego, Gaussa–Jordana), rzadziej stosowana w praktyce, pozwala na włączenie efektów nieliniowych zadania do procesu iteracyjnego rozwiązania układu równań. W ten sposób przybliżanie się do rozwiązania odbywa się na bazie coraz to bardziej aktualnych macierzy elementów. Proces ten można prowadzić bez konieczności formowania macierzy globalnej (lub jej części). Jest to wówczas



Rys. 3.1: Przykłady elementów o kształtach multipleksów i sympleksów obiektów jedno, dwu i trójwymiarowych.

procedura prowadzona „element po elemencie”. Mimo tej niewątpliwie korzystnej cechy, całość obliczeń jest bardzo kosztowna i narażona na problemy związane ze stabilnością procesu.

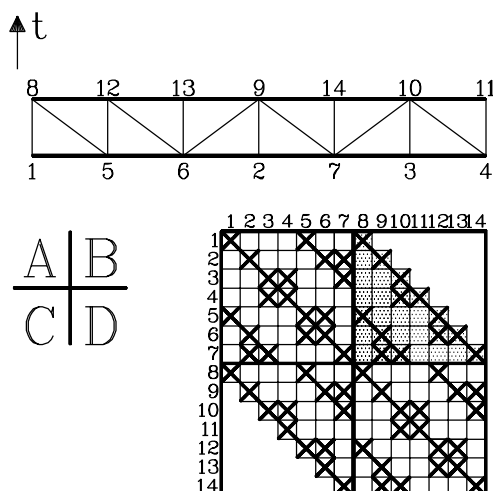
Inną grupę metod iteracyjnych typu „element po elemencie” prezentują np. prace [88, 116]. Koszt obliczeniowy jest jednak duży i metody tego typu zaczynają być atrakcyjne dopiero przy odpowiednio dużych zadaniach. Niemniej jednak, jak wynika z analizy przedstawionej w pracy [116], zbieżność jest stosunkowo wolna i zależy od uwarunkowania macierzy (a więc od szerokości pasma macierzy, kształtu i parametrów materiałowych elementów). Stwierdzono dużą wrażliwość na efekty nieliniowe. Większy krok czasowy w zadaniach nieliniowych pogarsza zbieżność.

Powyższe niedogodności, szczególnie trudne do przewidzenia tempo zbieżności metod iteracyjnych sprawiają, że chętniej stosuje się w praktyce metody bezpośrednie.

Nowe możliwości daje aproksymacja czasoprzestrzenna, przy zastosowaniu podobszarów czasoprzestrzennych o kształtach sympleksów (rys. 3.1).

### 3.1 Własności podziału czasoprzestrzeni

Odpowiednie wypełnienie warstwy czasoprzestrzennej elementami symplektycznymi pozwala uzyskać trójkątną macierz współczynników układu równań bezpośrednio przy formowaniu macierzy globalnej (rys. 3.2). Przy wytyczaniu podziału na trójkąty czasoprzestrzenne należy kierować się zasadą, że krawędzie ukośne należy prowadzić od punktu  $(x_i, \Delta t)$  do punktu  $(x_j, 0)$ , jeśli  $i < j$ . Podobnie postępuje się w zadaniach o wyższej

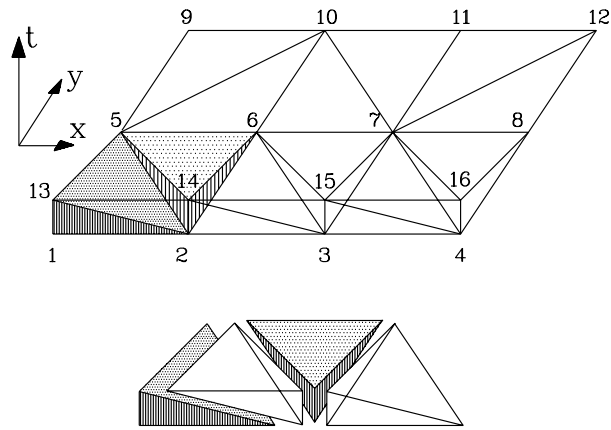


Rys. 3.2: Zapełnienie macierzy globalnej przy trójkątnej siatce elementów.

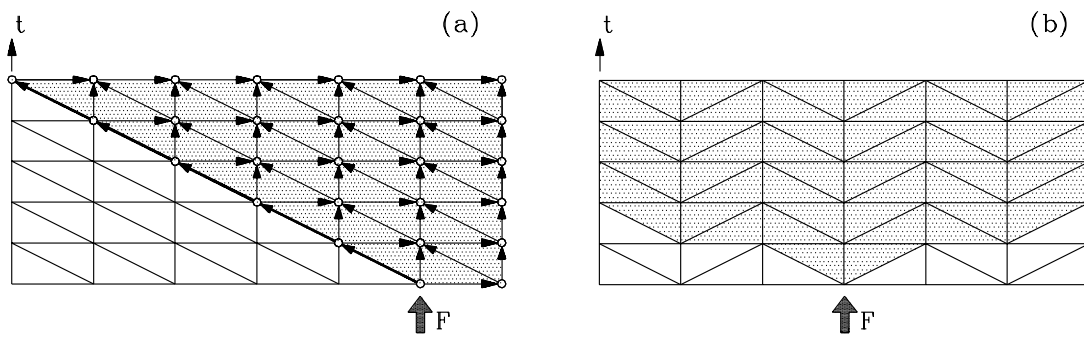
wymiarowości przestrzennej. Przykład wypełnienia objętości warstwy czasoprzestrzennej w zadaniu jednowymiarowym pokazano na rys. 3.3. W identyczny sposób tworzy się warstwę elementów czworobocznych w zadaniu dwuwymiarowym przestrzennie. Obrazuje to rys. 3.3. Rozwiązywanie układu równań o trójkątnej macierzy współczynników jest efektywne, gdyż można bezpośrednio przystąpić do rozwiązywania układu równań po równaniu. Własnością takiej procedury jest przepływ informacji w danej chwili tylko w jednym kierunku: od równania pierwszego do ostatniego (lub odwrotnie, jeśli mamy do czynienia z macierzą trójkątną górną). W procesie krokowym po czasie wyraża się to w ten sposób, że przepływ informacji między węzłami siatki przestrzennej w jednym kierunku ma prędkość ograniczoną, w drugim zaś nie (rys. 3.4a). Obserwacje numeryczne wykazały, że taka anizotropia czasoprzestrzenna nie ma istotnego wpływu na wyniki zadań dynamiki konstrukcji. Zjawisko anizotropii można usunąć wprowadzając specjalny podział warstwy, bez uprzywilejowania jakiegokolwiek kierunku (rys. 3.4b).

Możliwość rozseparowania układu równań pozwala na podział konstrukcji na podobszary i rozwiązywanie układu równań partiami. Cała konstrukcja, za wyjątkiem miejsc sklejenia podobszarów, może być modelowana elementami typu „multipleks”. W miejscach sklejenia umieszcza się elementy typu „sympleks” (rys. 3.5).

Elementy wyższego rzędu, z węzłami pośrednimi zarówno wzdłuż osi  $x$  jak i  $t$ , również pozwalają na skonstruowanie układu równań dającego się rozwiązać „węzły po węzłach”. Oznacza to, że można wydzielić grupy węzłów (rys. 3.6), które wchodzi do obliczeń kolejno.

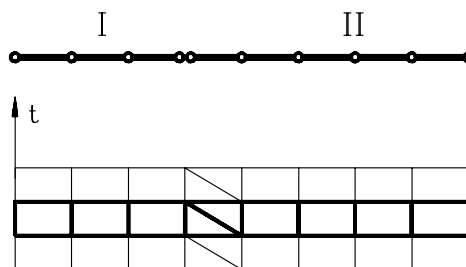


Rys. 3.3: Wypełnienie czasoprzestrzeni w zadaniu płaskim.



Rys. 3.4: Ograniczenie prędkości przepływu informacji (a) oraz izotropowe własności czasoprzestrzeni (b).





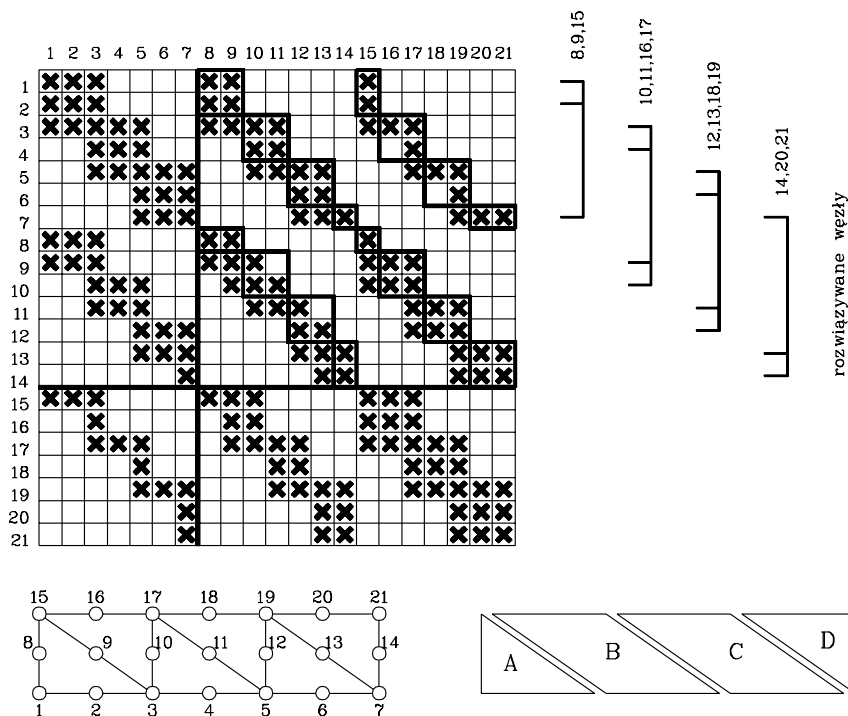
Rys. 3.5: Podział obszaru konstrukcji na podobszary przy wykorzystaniu elementów symplektycznych.

W ten sposób uzyskuje się własności podobne jak przy elementach prostych, pierwszego rzędu, gdzie do obliczeń bierze się węzły pojedynczo.

Innego rodzaju podział czasoprzestrzeni proponuje się w pracach [103, 141]. Węzły rozmieszczone są na przemian w co drugiej warstwie czasowej (rys. 3.7). Zaletą takiego podejścia jest wydłużenie kroku całkowania (choć stabilność takiego schematu nie w pełni została zbadana), izotropia a przede wszystkim rozseparowanie równań układu. Pozwala to ograniczyć pewne procesy iteracyjne (np. przy nieliniowościach materiałowych) do poszczególnych węzłów, bez konieczności operowania całym macierzami. Poważną wadą jest trudność w praktycznym stosowaniu takiego podziału. Szczególne kłopoty pojawiają się już przy wypełnianiu bardziej skomplikowanych obszarów płaskich. Przy brzegach i w narożach obszaru trzeba budować trójwymiarowe obiekty nietypowe dla całej reszty siatki.

### 3.1.1 Efektywność numeryczna

Efektywność numeryczna jest jedną z podstawowych cech, która musi być brana pod uwagę przy rozwiązywaniu zadań nieliniowych. Znalezienie rozwiązania w jednym kroku obliczeniowym składa się z dwóch etapów: budowy globalnej macierzy współczynników, po uprzedniej modyfikacji geometrii i własności materiałowych, oraz rozwiązania układu równań algebraicznych. Na koszt obliczeniowy procesu całkowania równania ruchu istotny wpływ ma postać macierzy bezwładności oraz sposób uwzględnienia tłumienia. Diagonalna macierz bezwładności oraz tłumienie numeryczne, wywołane przez kombinację macierzy sztywności i bezwładności, pozwalają znacznie skrócić i uprościć proces obliczeniowy. Użycie jawnych schematów całkowania po czasie powoduje rozprężenie równań układu ze względu na wektor niewiadomych. Jednak w niektórych przypadkach wy-



Rys. 3.6: Budowa i rozwiązywanie układu równań w przypadku elementów czasoprzestrzennych wyższego rzędu.

maga się uwzględnienia konsystentnych macierzy mas i tłumienia. W takich przypadkach konieczność rozwiązania pełnego układu równań podnosi istotnie koszt.

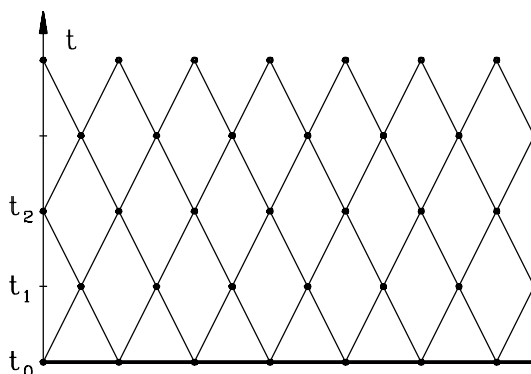
Najprostszą oceną jakości algorytmu jest oszacowanie liczby operacji arytmetycznych koniecznych do przeprowadzenia w jednym kroku obliczeniowym. Można przyjąć, że udział operacji mnożenia  $M$  w ogólnej liczbie operacji arytmetycznych jest stały. W metodzie elementów czasoprzestrzennych liczba mnożeń potrzebnych do rozwiązania utworzonego układu równań (bez fazy wyznaczania współczynników tego układu) zależy od wielkości pamięci operacyjnej użytej do gromadzenia współczynników. Wynosi ona

$$M = 2sN(c + 1) \quad (3.1)$$

jeśli angażuje się  $3,5 sN(c + 1) + 1,5 sN$  komórek pamięci, oraz

$$M = 3sN(c + 1) \quad , \quad (3.2)$$

jeśli angażuje się  $1,5 sN(c + 1) + 1,5 sN$  komórek pamięci. Przez komórkę pamięci rozumie się tu porcję pamięci przechowującą liczbę rzeczywistą. Przez  $c$  oznaczono liczbę



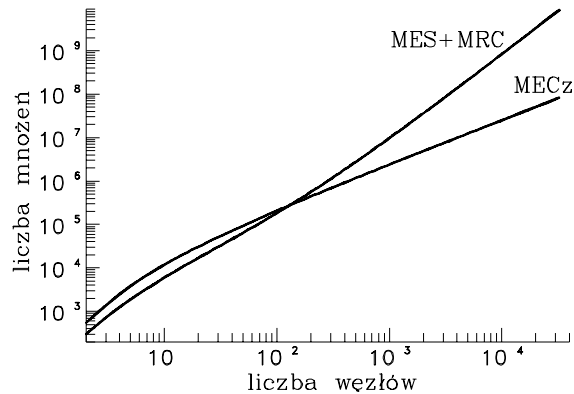
Rys. 3.7: Naprzemianległe rozmieszczenie węzłów elementów.

węzłów sąsiadujących z pojedynczym węzłem siatki,  $N$  jest całkowitą liczbą stopni swobody a  $s$  jest węzłową liczbą stopni swobody.

Porównanie pełnego kosztu obliczeniowego jednego kroku metody elementów czasoprzestrzennych i metody elementów skończonych połączonej z metodą różnic centralnych wymaga poczynienia pewnych założeń. W metodzie elementów skończonych i różnic centralnych przyjęto:

- budowanie macierzy współczynników na każdym kroku obliczeniowym,
- symetrię macierzy elementów i macierzy globalnej,
- regularny brzeg pasma macierzy globalnej (uzupełniony zerami),
- konsystentną macierz bezwładności,
- pomijalne tłumienie,
- optymalną numerację węzłów w celu zwężenia szerokości pasma macierzy,
- wykonywanie mnożeń przez zera,
- płaskie zadanie sprężystości jako zadanie modelowe do oszacowania.

Porównanie kosztu obliczeń przedstawiono na rys. 3.8. W celu porównania opisanych wyżej oszacowań (3.1) i (3.2) można przytoczyć dane literaturowe [132]. Metoda Newmarka wymaga  $M = Nb^2/2n + N(4b + 3)$  operacji mnożenia na 1 krok obliczeniowy ( $n$  – liczba kroków obliczeniowych,  $b$  – szerokość półpasma macierzy). Z kolei metoda Trujillo [132, 162] przy przechowywaniu macierzy w formie półpasma wymaga  $M = N(4b + 6)$  operacji a przy przechowywaniu macierzy w formie blokowej  $M = 2sN(c + 1) + 10N$ . Zestawienie kosztu obliczeniowego poszczególnych metod podano w tablicy 3.1. Należy zwrócić uwagę,



Rys. 3.8: Porównanie kosztu obliczeniowego metody elementów skończonych i różnic centralnych z metodą elementów czasoprzestrzennych.

że szerokość półpasma macierzy  $b$  jest zwykle proporcjonalna do  $N^{1/2}$  w zadaniach płaskich i do  $N^{1/3}$  w zadaniach trójwymiarowych. W porównaniu pominięto całą grupę metod wykorzystujących diagonalne macierze bezwładności i tłumienia. Dają one rozseparowane równania i koszt rozwiązania zadań jest wówczas niski.

#### Uwagi.

- Koszt obliczeniowy M. E. Cz. rośnie liniowo wraz z liczbą węzłów siatki.
- Liczba operacji w M. E. Cz. nie zależy od sposobu numeracji węzłów (topologii siatki).
- W metodach klasycznych szerokość półpasma  $b$  rośnie wraz ze wzrostem wielkości zadania. Liczba operacji arytmetycznych przypadających na jeden krok obliczeniowy jest wówczas proporcjonalna do  $bN \approx N^{\frac{3}{2}}$ .
- Oszacowania są zgrubne i mogą zmieniać się znacznie w przypadku różnych konkretnych zadań.

### 3.2 Oszacowanie dokładności

Pod względem ekonomicznym symplektyczne formy elementów czasoprzestrzennych są niewątpliwie atrakcyjne. Pozostaje więc pytanie, czy wyniki liczbowe są dostatecznie dokładne. Przecież wynik otrzymywany w przypadku pojedynczego węzła budowany jest

Tab. 3.1: Koszt obliczeniowy poszczególnych metod numerycznych.

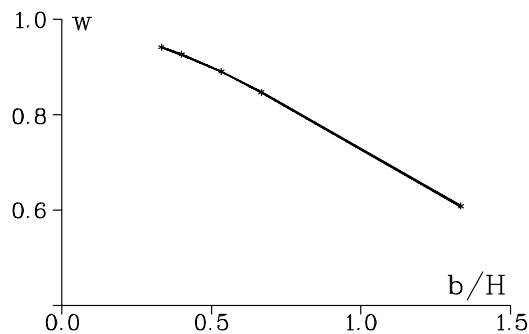
metoda	liczba mnożeń
m. Gaussa (symetria macierzy)	$\frac{N^3}{6} + \frac{N^2}{4} + \frac{N}{12}$
m. Gaussa (symetria macierzy, pasmowość)	$\frac{1}{2}b^2N$
M. E. Cz. (większa pamięć operacyjna)	$2sN(c+1)$
M. E. Cz. (mniejsza pamięć operacyjna)	$3sN(c+1)$
m. Newmarka [132]	$4bN + 3N$
m. Trujillo (z półpasmem) [132]	$4bN + 6N$
m. Trujillo (zapis blokowy) [132]	$2bN + 10N$

na podstawie mniejszej liczby informacji (parametrów określanych w chwilach poprzednich), jak to widać np. na rys. 3.4. W celu porównania można przytoczyć pracę [132], gdzie podano wpływ przepływu informacji w schemacie obliczeniowym Trujillo [162] na rozwiązanie.

W literaturze dość dokładnie zajmowano się struną lub prętem drgającym osiowo, jako modelowym typem konstrukcji do testów. Wyniki, zgodnie z oczekiwaniami, są zazwyczaj w takich przypadkach znacznie lepsze niż w późniejszych zastosowaniach praktycznych do belek czy płyt. Okazuje się wtedy, że istotną rolę zaczynają odgrywać związki definiujące odkształcenia, a więc i sposób określania energii ustroju, która jest minimalizowana.

Poniżej podano kilka przykładów, pokazujących wpływ modelu elementu czasoprzestrzennego na własności rozwiązania. Pierwszym z nich jest belka modelowana elementami czasoprzestrzennymi o kształcie trójkątów. Przyjęto oddzielnie liniową interpolację ugięcia oraz obrotu (np. [30]). Rozseparowanie przemieszczeń prowadzi do znanego w statyce efektu przeszywniania (*ang.* locking). Uwidacznia się to w wartościach ugięcia, na które istotny wpływ ma ścinanie przekroju poprzecznego. Rys. 3.9 pokazuje właśnie wpływ długości elementu skończonego do wysokości przekroju poprzecznego. Drobniejsza dyskretyzacja na przykład, co jest dość oczywiste, poprawia wyniki.

Drugim przykładem jest płyta wspornikowa średniej grubości obciążona równomiernie wzdłuż wolnego brzegu. Również tu przyjęto liniową interpolację niezależnie przemiesz-



Rys. 3.9: Zależność ugięcia belki wspornikowej  $w$  od stosunku długości elementu  $b$  do wysokości przekroju poprzecznego  $H$ .

czeń poprzecznych i obrotów. [30]. Przyjęto obciążenie stałe w czasie. Położenie równowagi porównano z ugięciami statycznymi otrzymanymi przez innych autorów. Wyniki zestawiono w tabelicy 3.2. Siatka złożona z niewielu elementów skończonych daje układy przeszywnione. Częstotliwości drgań są nieco zawyżone a ugięcia zaniżone. Wynika to nie tylko z przeszywnienia, ale w pewnym stopniu również z trudniejszego obciążenia w sposób ciągły brzegu w siatce o niewielu węzłach, kiedy to do współpracy w siatce sympleksów węzły włączają się stopniowo.

Okazuje się, że dokładność uzyskiwanych w tym przypadku wyników zależy jest bardziej od modelu elementu skończonego niż od sposobu całkowania równania różniczkowego w czasie.

### 3.3 Ruch dyskretnego układu mas po strunie

Klasyczne dyskretne metody modelowania zadań dynamicznych, polegające na całkowaniu równania różniczkowego ruchu, mają własność przekazywania informacji między węzłami siatki dyskretnej z nieskończenie dużą prędkością. Własność ta nie odbija się na wynikach, jeśli rozpatruje się zadania dotyczące drgań ustalonych lub przypadków, gdy czas obserwacji zjawiska jest długi w porównaniu z okresem drgań. Postępowanie matematyczne polega na wstępnej dyskretyzacji przestrzennej obiektu jedną ze znanych metod dyskretnych i sprowadzeniu problemu do macierzowego równania różniczkowego ruchu a następnie na zastosowaniu schematu jego całkowania. Otrzymuje się w ten sposób krokowy proces obliczeniowy o pełnych (zwykle pasmowych i symetrycznych) macierzach w uzyskiwanych ostatecznie układach algebraicznych równań liniowych. Ten ostatni fakt powoduje, że

Tab. 3.2: Zestawienie wyników obliczeń zadań testowych płyty.

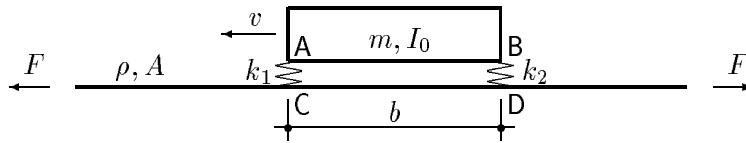
siatka podziału	liczba węzłów	ugięcie $w$	okres $T$	$\frac{Dw}{QL^2}$	$\frac{\omega}{\sqrt{D/\rho t L^4}}$
$2 \times 1$	6	318,	109,	0,564	4,84
$4 \times 2$	15	537,	133,	0,953	3,97
$8 \times 4$	45	720,	157,	1,277	3,37
Inne wartości porównawcze*:					
— metoda Ritza					3,47
— doświadczenia					3,42
— doświadczenia Plunketta					3,50
— elementy skończone (analiza modalna)					
— $2 \times 1$ (4 elementy trójkątne)					3,39
— $4 \times 2$ (16 elementów trójkątnych)					3,44

\*O.C. Zienkiewicz, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972

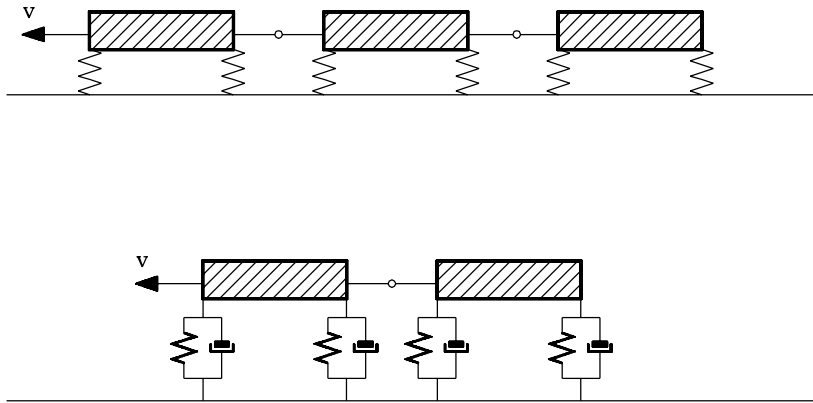
jakiegokolwiek zaburzenie w dowolnym punkcie przestrzennym chwili  $t_i$  wywołuje zmianę wszystkich elementów wektora rozwiązania w chwili  $t_{i+1}$ . Tak działają stosowane najczęściej metody: różnic centralnych, Newmarka, Wilsona itp. Próby obserwacji zjawisk falowych, w których istotne jest czoło fali i zjawiska zachodzące w tej strefie są wówczas zwykle kłopotliwe. Fala fizyczna w procesie symulacji będzie zawsze poprzedzana przez falę zaburzeń.

Druga trudność dotyczy odbić fal od fizycznych brzegów analizowanego numerycznie obszaru, w przypadku kiedy analiza odnosi się do obiektu o nieskończonych brzegach. Konieczność taka pojawia się przy rozpatrywaniu przypadków obciążenia szybko poruszającego się po nieskończonych obszarach (tor kolejowy, półprzestrzeń sprężysta). Stosowane niekiedy w celu uniknięcia odbić lepkie tłumiki wraz z nieskończonymi elementami dają poprawne rezultaty jedynie w przypadku szczególnie prostych zadań i kiedy daje się przewidzieć kształt odbijanej fali.

W tych też szczególnych przypadkach wygodna wydaje się być metoda elementów czasoprzestrzennych. Pozwala wykorzystać własność skończonej prędkości rozprzestrziania się informacji między węzłami siatki dyskretnej. Trzeba zaznaczyć, że odnosi się to do jednego uprzywilejowanego kierunku. W kierunku przeciwnym prędkość pozostaje nieskończona (rys. 3.4a). Stosując odpowiedni kształt siatki czasoprzestrzennej można



Rys. 3.10: Schemat zadania.



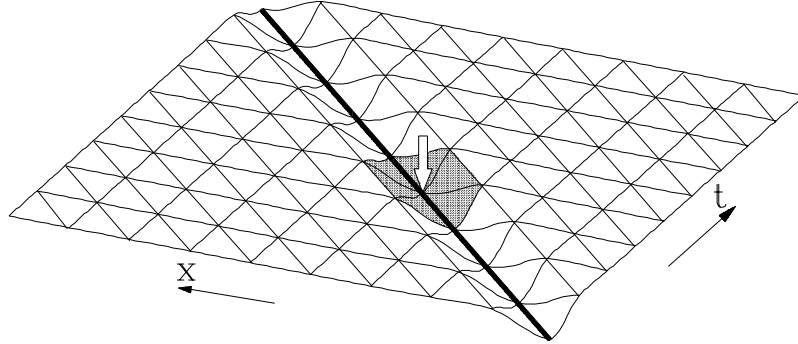
Rys. 3.11: Układy złożone o wielu punktach kontaktu.

uzyskać jednakową ograniczoną prędkość w obu kierunkach (rys. 3.4b).

Powyższa cecha daje się wykorzystać przy badaniu problemu stateczności ruchu układu pantografowego poruszającego się z dużą prędkością wzdłuż struny. Poprzez sprzężenie masowe amplitudy drgań w pewnych zakresach prędkości mogą rosnać nieskończenie.

Stateczność ruchu względnego układu mas sprężystie opartych na podłożu i układu ciągłego stanowiącego to podłoże poruszano w wielu pracach. Rozpatrywano je zwykle w sposób analityczny [40, 44]. W takim przypadku uwzględnienie dodatkowych parametrów jak np. tłumienie albo przyjęcie dowolnych wartości mas i sztywności staje się kłopotliwe. Pokazane poniżej rozwiązanie numeryczne, aczkolwiek nie pozwala uzyskać rozwiązań zamkniętych, ułatwia analizę nawet skomplikowanych układów dyskretnych, poruszających się po ośrodku ciągłym. Szczegółowo omówiony zostanie układ pokazany na rys. 3.10. Identycznie traktować można przypadki bardziej złożone, jak np. pokazane na rys. 3.11. Jeśli wykorzysta się elementy trójkątne i przyjmie ukośne ich boki zgodnie z kierunkiem ruchu obciążenia, to obszar wpływu zaburzeń powodowanych przez to obciążenie da się ograniczyć do strefy położonej w bezpośrednim sąsiedztwie punktu przy-





Rys. 3.12: Poruszająca się siła i ograniczone zaangażowanie węzłów siatki w rozwiązaniu.

łożenia siły (rys. 3.12). Wyseparowanie odpowiedniego podukładu elementów pozwala na powiązanie układu odniesienia z poruszającym się obciążeniem. W ten sposób doprowadzić można łatwo do zadania stacjonarnego, o ile w układzie fizycznym stacjonarność zachodzi.

### 3.3.1 Sformułowanie równowagi układu

Rozpatrujemy równanie ruchu struny

$$F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x \in \Omega = [0, l], \quad t \in [0, \infty). \quad (3.3)$$

Masa  $m$  o bezwładności obrotowej  $I_0$ , z dwoma stopniami swobody  $q^C$  i  $q^D$ , porusza się po strunie z prędkością  $v$ . Jej ruch względem punktów kontaktu  $C$  i  $D$  z podłożem opisuje równanie

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^A \\ q^B \\ q^C \\ q^D \end{Bmatrix} + \frac{m}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}^A \\ \ddot{q}^B \\ \ddot{q}^C \\ \ddot{q}^D \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{I_0}{b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}^A \\ \ddot{q}^B \\ \ddot{q}^C \\ \ddot{q}^D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

lub w skrócie

$$\mathbf{Kq} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.5)$$

Warunki kontaktu w punktach  $C$  i  $D$  mają postać następującą:

$$u(l - vt, t) = q^C(t), \quad u(l - vt + b, t) = q^D(t) . \quad (3.6)$$

Wariacja funkcji przemieszczeń struny oznaczona jest przez  $\delta \hat{u}(x, t)$  a wariacja przemieszczeń dyskretnego układu masowego przez  $\delta \hat{\mathbf{q}}$ . Równanie prac wirtualnych ma wobec tego postać:

$$\int_{\Omega} \delta \hat{u} \left( F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) d\Omega + \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \ddot{\mathbf{q}}) = 0 . \quad (3.7)$$

Równanie (3.7) jest całkowane w przedziale czasowym  $[t_a, t_p]$ :

$$\int_{t_a}^{t_p} \int_{\Omega} \delta \hat{u} \left( F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) d\Omega dt + \int_{t_a}^{t_p} \delta \hat{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \ddot{\mathbf{q}}) dt = 0 . \quad (3.8)$$

W ten sposób otrzymujemy bilans pracy wirtualnej w przedziale czasu (czaso-pracę). Równanie (3.8) jest całkowane przez części względem  $x$  i  $t$ . Przemieszczenia  $\hat{u}$  i  $\hat{\mathbf{q}}$  na krańcach przedziału  $t_a \leq t \leq t_p$  przyjmowane są jako znane [11]. Wobec tego

$$\delta \hat{u}(x, t_a) = 0, \quad \delta \hat{u}(x, t_p) = 0 \quad (3.9)$$

i

$$\delta \hat{\mathbf{q}}(t_a) = 0, \quad \delta \hat{\mathbf{q}}(t_p) = 0 . \quad (3.10)$$

### 3.3.2 Macierze czasoprzestrzenne poruszającej się masy

Funkcja interpolująca przemieszczenia wirtualne modyfikowana jest przez dodanie wyrazu trzeciego stopnia [99]

$$\hat{N}_i^t = \frac{1}{2} (1 + \tau \tau_i) + \alpha \tau_i (\tau^3 - \tau) , \quad (3.11)$$

gdzie  $\alpha$  jest parametrem, który wpływa na własności rozwiązania numerycznego. Przy  $\alpha \geq 1,25$  otrzymuje się macierze dające bezwarunkowo stabilny schemat całkowania równania ruchu.

Wówczas można wyznaczyć macierze sztywności i bezwładności

$$\mathcal{K}^M = \begin{bmatrix} \left( \frac{h}{3} - \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} & \left( \frac{h}{6} + \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} \\ \left( \frac{h}{6} + \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} & \left( \frac{h}{3} - \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{M}^M = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{R}^M = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R} \\ -\mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Ostatecznie zsumowanie  $\mathbf{K}^{S*} = \mathcal{K}^M + \mathcal{M}^M + \mathcal{R}^M$  daje w wyniku czasoprzestrzenną macierz sztywności masy.

### 3.3.3 Czasoprzestrzenna dyskretyzacja struny

Stosujemy liniową interpolację przemieszczeń  $u$  w obszarze elementu trójkątnego:

$$u(x, t) = ax + bt + c = \sum_{i=1}^3 N_i u(x_i, t_i). \quad (3.15)$$

Możemy zapisać elementy macierzy współczynników w sposób jawny [30]:

$$\mathcal{K}_{ij}^S = \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} F \frac{\partial N_j}{\partial x} dV. \quad (3.16)$$

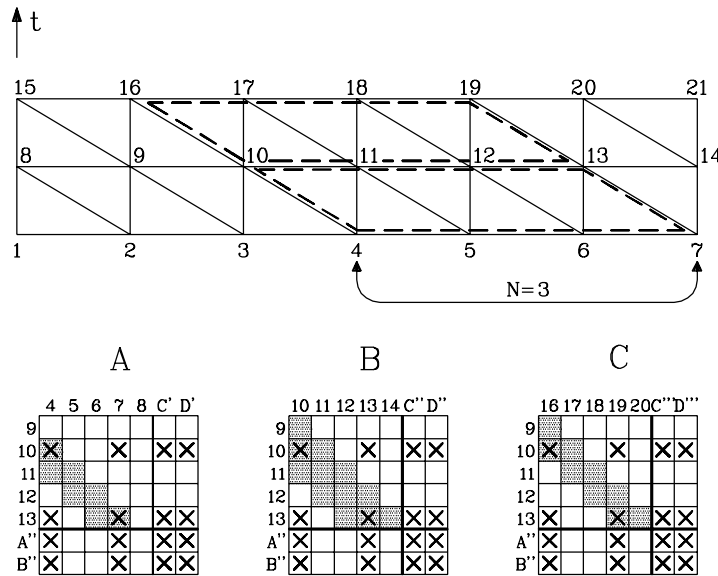
$$\mathcal{M}_{ij}^S = - \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} \rho A \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \quad (3.17)$$

lub wyznaczyć je w sposób jawny, całkując w obszarze trójkątnym  $V$ . Ostateczna macierz współczynników otrzymywana jest przez proste dodanie  $\mathbf{K}^{S*} = \mathcal{K}^S + \mathcal{M}^S$ .

### 3.3.4 Separacja podukładu elementów czasoprzestrzennych

W rozdziale 3 pokazano, że własnością trójkątnej siatki elementów czasoprzestrzennych jest ograniczenie prędkości przekazywania informacji między węzłami siatki. Prędkość ta jest równa stosunkowi długości elementu czasoprzestrzennego do wielkości kroku czasowego. Stąd też jakiegokolwiek zaburzenie fizyczne może się rozprzestrzeniać w kierunku ukośnych boków trójkątów także z prędkością ograniczoną. Fakt ten posłuży do wydzielenia z nieograniczenie wielkiej siatki jedynie podukładu węzłów wraz z wpisanymi weń elementami, do których ogranicza się zasięg zaburzenia (rys. 3.13). Przy następujących danych:  $m = 1$ ,  $I_0 = 0,001$ ,  $E = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\rho = 1$ , oraz przy przy zwiększającej się liczbie elementów w obrębie punktów kontaktu uzyskano obszary stabilności pokazane na rys. 3.14. Wprowadzenie tłumienia nieznacznie tylko zmienia obraz (rys. 3.15).

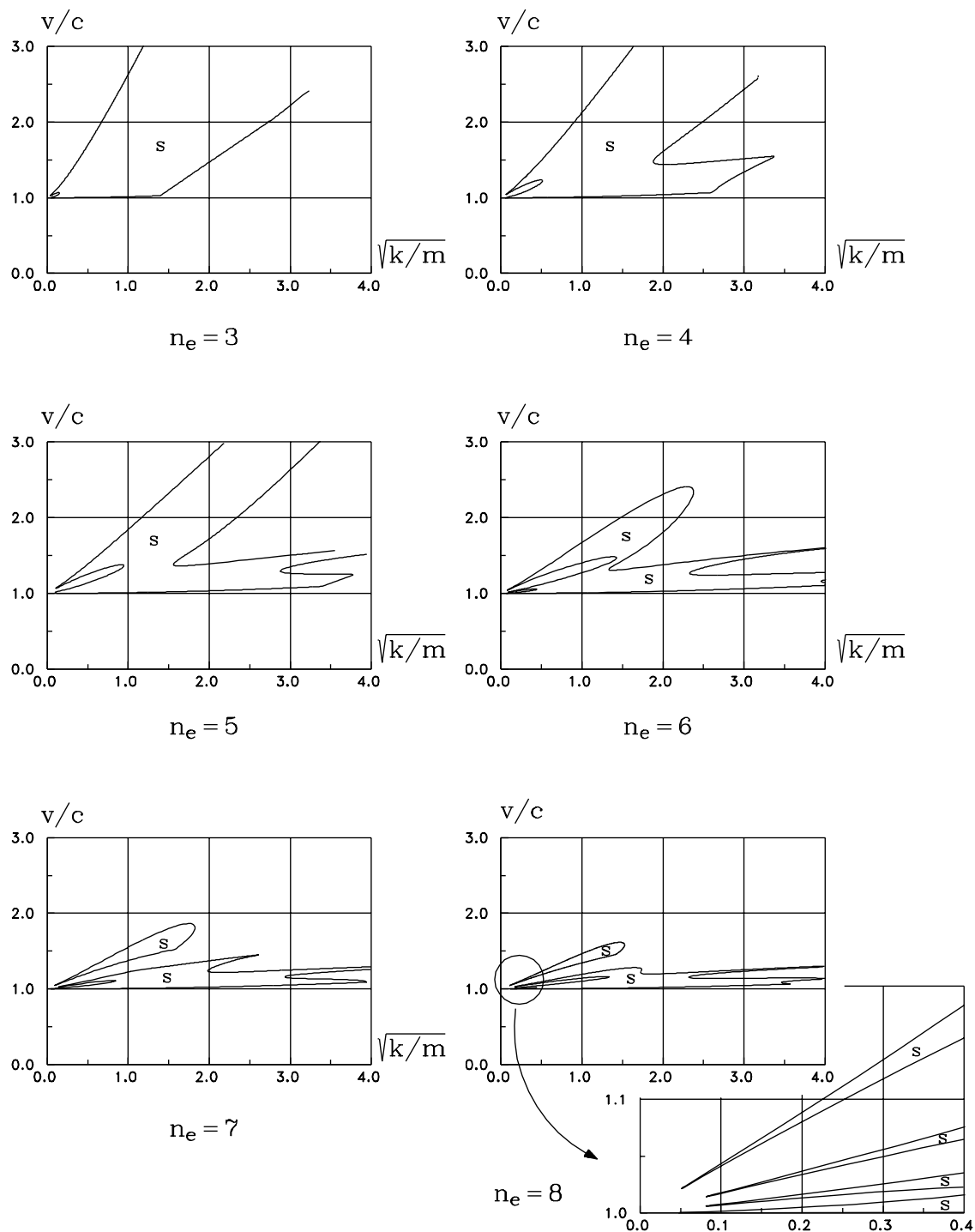
□



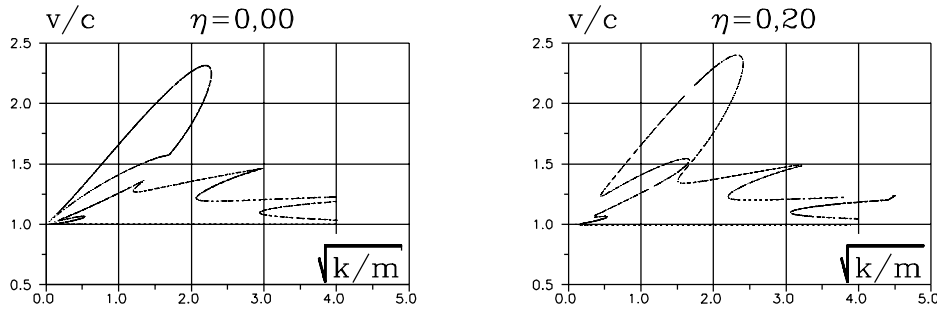
Rys. 3.13: Podukład elementów czasoprzestrzennych z współdziałającym układem dyskretnym.

W rozdziale 3 skupiono się na własnościach elementów czasoprzestrzennych typu sympleks. Tę grupę elementów i jej zastosowanie w analizie dynamicznej konstrukcji po raz pierwszy przedstawiono w pracy autora [30]. W niniejszej pracy w szerszym zakresie przedstawiono własności sympleksów oraz przykłady ich zastosowań.

Podstawowa zaleta wynika z topologii siatki, która wypełnia czasoprzestrzenną warstwę. Podczas budowy globalnej macierzy sztywności czasoprzestrzennej uzyskuje się bezpośrednio trójkątne macierze współczynników układu równań. W zależności od numeracji węzłów są to macierze trójkątne dolne (rys. 3.2) lub trójkątne górne (jeśli na rys. 3.2 odwróci się kolejność numeracji w każdej z chwil). Bez względu na sposób numerowania węzłów, wynikowy układ równań algebraicznych jest układem dającym się rozwiązać „węzeł po węźle”. Dotyczy to ogólnej  $n$ -wymiarowej konstrukcji. Uzyskuje się ukierunkowane rozseparowanie zmiennych. Polega ono na tym, że do obliczeń bierze się kolejno pojedyncze węzły, ale w ściśle określonej kolejności. W ten sam sposób można rozseparować także grupy węzłów (rys. 3.5). Koszt numeryczny rozwiązania układu równań spada znacząco. Jest on zależny liniowo od liczby stopni swobody ustroju (tab. 3.1). Tak korzystnego rezultatu nie uzyskuje się żadną inną metodą z konsystentnymi macierzami bezwładności i tłumienia. W metodach klasycznych wykorzystujących macierze konsystentne liczba operacji arytmetycznych, niezbędna do rozwiązania układu równań,



Rys. 3.14: Obszary stabilności przy zwiększającej się liczbie elementów w obrębie punktów kontaktu.



Rys. 3.15: Obszary stabilności przy 6 elementach między punktami kontaktu — przypadek bez tłumienia oraz z tłumieniem 0,2.

jest dodatkowo proporcjonalna do szerokości pasma macierzy. Mimo że budowa macierzy charakterystycznych elementów czasoprzestrzennych przewyższa kosztem budowę macierzy w metodach klasycznych, to sumaryczny koszt rozwiązania, w przypadku większych zadań, jest korzystny dla prezentowanego w niniejszej pracy podejścia.

Podstawową wadą elementów typu sympleks jest warunkowa stabilność rozwiązań ze względu na krok czasowy. W dużych zadaniach, o drobnej siatce podziału, może to być poważnym mankamentem wydłużającym obliczenia. W związku z tym opisane w rozdziale 3 techniki zaleca się stosować w zadaniach o dużych nieliniowościach, kiedy krok obliczeniowy, ze względu na własności fizyczne zadania, i tak musi być krótki.

Drugą własnością wynikającą z topologii siatki jest przepływ informacji z ograniczoną w jednym kierunku prędkością (rys. 3.4). W praktyce przynosi to taki efekt, że przyłożone w danym kroku obciążenie zewnętrzne wywiera w następnym kroku wpływ jedynie na część węzłów siatki. Propagacja informacji jest pewnego rodzaju falą, nie związaną jednak z układem fizycznym, a z układem numerycznym. Przy określonym doborze siatki fale te mogą się pokryć. Inne metody dyskretne rozwiązywania zadań dynamiki, o pełnych macierzach współczynników, mają tę cechę, że impuls przyłożony w dowolnym węźle siatki daje w następnym kroku różny od zera wynik w całej siatce przestrzennej. Użycie elementów symplektycznych, przy użyciu których to нефизyczne zjawisko częściowo się eliminuje, poprawia własności rozwiązań numerycznych. Wykorzystano to z powodzeniem do badania układów jednowymiarowych, obciążonych przesuwającą się siłą lub układem masowym. W takim przypadku można wydzielić z nieskończonego układu elementów pewien niewielki fragment, do którego to tylko ogranicza się wpływ przesuwającej się siły. Fragment taki o kilku lub kilkudziesięciu najwyżej stopniach swobody (rys. 3.13) można badać pod względem stabilności ruchu, bez potrzeby odwoływania się do nieskończonej

struktury. Jako zadanie praktyczne przyjęto układ pantografowy, o dwóch punktach kontaktu, jadący wzdłuż struny z prędkością przekraczającą prędkość rozchodzenia się fali w strunie. Otrzymane wyniki potwierdziły badania Bogacza [39, 40, 44], w których wykazano istnienie nieskończenie wielu przedziałów niestabilności. Obliczenia numeryczne z wykorzystaniem trójkątnych elementów struny uwiarykowały takie przedziały. Ich liczba zwiększa się wraz z zagęszczeniem dyskretyzacji odcinka struny między punktami kontaktu z układem masowym. W takim przypadku układ dyskretny, pod kątem fizycznej zdolności przenoszenia pełnego spektrum częstotliwości, coraz bardziej upodabnia się do układu ciągłego.





## Rozdział 4

# Warunki kontaktu

Analiza zagadnień kontaktowych doczekała się bogatej literatury, począwszy od sformułowań matematycznych [114, 131, 130, 105, 160, 60, 161, 78], poprzez metody obliczeniowe [3, 59, 91, 151, 17, 137, 50, 49, 32, 24, 37, 152, 123, 57], do konkretnych zastosowań [154, 135, 45, 126, 35, 18, 53, 92].

Spróbujemy w skrócie sklasyfikować podstawowe metody obliczeniowe, stosowane w analizie kontaktu ciał i podać ich najbardziej charakterystyczne cechy.

- Metody więzów geometrycznych.

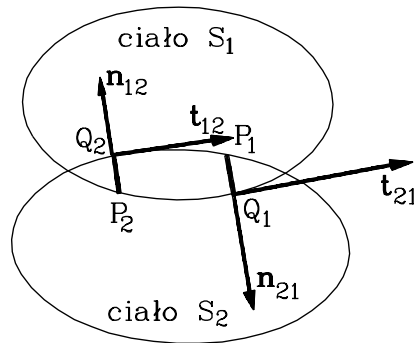
- *Metoda jawna rzutowania.*

Metoda jest łatwa w zastosowaniu, lecz nie gwarantuje zachowania masy w procesie deformacji. Nie są znane bezpośrednio siły kontaktu.

Na koniec kroku czasowego punkt  $P_1$ , który przeniknął brzeg ciała  $S_2$  jest rzutowany na ciało  $S_2$  w punkcie  $Q_1$  i uzyskuje status kontaktu (rys. 4.1). Prędkość normalna ustalana jest jako równa zero. Prędkość styczna pozostaje niezmieniona. Kontrolowany jest znak sił węzłowych. Należy stosować mały krok czasowy w celu uzyskania wymaganej dokładności.

- *Metoda niejawna rzutowania.*

Metoda zachowuje masę ciała. Siły kontaktu nie są bezpośrednio znane. Pozostawianie punktu w strefie kontaktu określa znak siły normalnej. Metoda ta może być udoskonalona poprzez wprowadzenie zmodyfikowanych ograniczeń na jednostronne więzy geometryczne [24]. Wówczas upodabnia się do metody funkcji kary przy więzach geometrycznych w sformułowaniu prędkościowym.



Rys. 4.1: Przybliżone modelowanie oddziaływania ciał przy przybliżonej konfiguracji w przedziale czasowym procesu deformacji.

W kroku czasowym sprawdzany jest jednakowy status punktu kontaktu i punktów swobodnego brzegu. Punkt  $P_1$  przenikający brzeg ciała  $S_2$  w konfiguracji przybliżonej rzutowany jest na ciało  $S_2$  na punkt należący do odcinka  $P_1Q_1$  (rys. 4.1). Odcinek ten wynika z warunku kontaktu ciał  $S_1$  i  $S_2$  i jest ustalany w sposób przybliżony w chwili  $t_0$ . Punkt  $P_1$  uzyskuje status kontaktu. Prędkość normalna na końcu kroku ustalana jest jako równa zero. Prędkość styczna może zmieniać się dowolnie. Można wyznaczyć nowe przybliżenie geometrii w chwili końcowej przedziału czasu  $t_1$ . Znak siły normalnej pozwala określić punkt jako swobodny lub będący w kontakcie. Krok czasowy może być dłuższy niż w wariancie jawnym metody.

- Metody funkcji kary.

Siła normalna kontaktu wyraża się wartością

$$\mathbf{F}_{n_{ij}} = \zeta \mathbf{u}_{n_{ji}} H(-u_{n_{ji}}),$$

gdzie  $H(\cdot)$  jest funkcją Heaviside'a, a  $\zeta = 1/\kappa$  z małą wartością  $\kappa$  jest współczynnikiem kary.

Warunki kontaktu  $\mathbf{B}\mathbf{u} \geq \boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{B}$  – macierz kinematyki warunków brzegowych,  $\boldsymbol{\gamma}$  – wektor początkowych szczelin, spełnione są w sposób przybliżony. Dodawany jest fikcyjny człon energetyczny (człon funkcji kary)  $\pi(\mathbf{u}) = \bar{\pi}(\mathbf{u}) + \kappa [(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma})^T (\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma})]$ ,  $\bar{\pi} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}$ , gdzie  $\kappa$  jest parametrem funkcji kary. Interpretacją fizyczną  $\kappa$  może być sztywność fikcyjnej sprężynki pomiędzy dwoma punktami kontaktu.

Ostatecznie otrzymuje się  $(\mathbf{K} + \kappa \mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{u} = \mathbf{f} + \kappa \mathbf{B} \boldsymbol{\gamma}$ .

Dobór parametru  $\kappa$  omawiany jest np. w pracach [68, 69]. Za optymalną podano wartość [169]  $\kappa = k_1 / \sqrt{n\varepsilon}$ , gdzie  $\varepsilon$  – dokładność maszyny cyfrowej (przy której  $1 + \varepsilon > \varepsilon$ ),  $n$  – liczba niewiadomych,  $k_1$  – najmniejsza sztywność elementów będących w kontakcie.

- *Funkcja kary nałożona na przemieszczenia normalne w sformułowaniu przemieszczeniowym* [154].

Metody te stosuje się do opisów przyrostowych, przy małych przyrostach odkształceń.

- *Funkcja kary nałożona na prędkości normalne w sformułowaniu prędkościowym*.  
Znajduje zastosowanie w sytuacji, kiedy punkt utrzymuje się w kontakcie w wyniku numerycznej niestabilności, podczas zmiany statusu węzła.
- *Funkcja kary nałożona na przemieszczenia normalne w sformułowaniu prędkościowym*.

Przemieszczeń normalnych używa się jedynie do określenia statusu kontaktu. Oblicza się je całkując prędkość. Metoda nazywana jest dualną metodą miękkiej penetracji (*ang.* dual soft way method) z uwagi na fizyczną analogię zachowania się ciała, z możliwością małej penetracji, proporcjonalnej do siły normalnej, skierowanej w kierunku przeciwnym. Metoda jest wygodna pod warunkiem, że człon zawierający siły kontaktu nie dominuje w funkcjonale energetycznym.

- Metody mieszane [3, 59, 91].

- *Metoda mnożników Lagrange’a* [89, 55].

Jest ona sformułowana jako zadanie minimalizacji:

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n^*) < L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) < L(\mathbf{v}^*, \mathbf{F}_n) ,$$

gdzie

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) = \Phi(\mathbf{v}) + \langle \mathbf{F}_n, \mathbf{v} \rangle .$$

$\langle \mathbf{F}_n, \mathbf{v} \rangle$  jest formą liniową,  $\Phi(\mathbf{v})$  jest wypukłym funkcjonalem pola prędkości,  $\mathbf{F}_n$  jest mnożnikiem Lagrange’a, będącym w praktyce siłą normalną.

Realizując metodę mnożników Lagrange’a w formie dyskretnej postępuje się następująco. Warunki kontaktu  $\mathbf{B}\mathbf{u} \geq \boldsymbol{\gamma}$  dodaje się do zdyskretyzowanej postaci energii potencjalnej  $\pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) = \bar{\pi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma})$ , gdzie  $\boldsymbol{\Lambda}$  jest wektorem

mnożników Lagrange'a. Ostatecznie otrzymuje się układ równań

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}$$

o rozbudowanej macierzy współczynników w stosunku do liczby stopni swobody zadania. Jest on źle uwarunkowany. Nieodpowiednia kolejność niewiadomych w podmacierzy macierzy współczynników może prowadzić do osobliwości. Z tego względu utrudnione jest stosowanie tego podejścia do zadań 3-wymiarowych. Zbieżność metody jest zwykle słaba. Z tego względu stosuje się metody powiększonego lagrangianu (*ang.* augmented Lagrangian), których zbieżność jest zdecydowanie lepsza.

– *Metoda powiększonego lagrangianu.*

Metodę formułuje się poprzez dodanie do lagrangianu dodatkowego członu. Ostatecznie jest

$$L_\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) = L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) + \frac{\zeta}{2} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{d}\|^2 .$$

W trakcie realizacji dodanie do energii potencjalnej członu  $-\frac{1}{2\kappa} \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  regularyzuje wynikowy układ równań metody mnożników Lagrange'a. Zerowa podmacierz zastępowana jest macierzą diagonalną  $-\frac{1}{\kappa} \mathbf{I}$ . Nie usuwa to wprawdzie trudności związanych z osobliwością podmacierzy w układzie równań, ale ułatwia jego rozwiązanie. Warunki kontaktu spełnione są w sposób przybliżony. Wówczas  $\mathbf{u}$  spełnia zmodyfikowany warunek  $\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{\kappa} \mathbf{A} = 0$ . W trakcie iteracyjnego rozwiązywania rozszerzonego układu równań zmienia się liczba aktywnych ograniczeń. Trudność tą można usunąć wprowadzając warunki kontaktu przy wszystkich węzłach mogących znaleźć się w kontakcie.

Metoda powiększonego lagrangianu wraz z algorytmem Uzawa [67] prowadzi do iteracyjnego schematu rozwiązania dwóch odrębnych zadań: zadania opisanego prędkościami z klasycznym rozmiarem macierzy oraz zadania kontaktowego zawierającego siły, z prędkościami jako parametrem. Przybliżone siły normalne dają nowe pole prędkości, a następnie wyznaczane jest kolejne przybliżenie sił. W pracy [3] proponuje się wykorzystanie uogólnionej metody Newtona–Raphsona. W innych pracach iteracyjne rozwiązywanie zadania kontaktowego połączone jest z iteracyjną metodą Gaussa–Seidela rozwiązywania wynikowego układu równań (np. [123]).

W dalszej części rozdziału przedstawiony zostanie warunek kontaktu Signoriniego odniesiony do warstwy czasowej  $[t_0, t_1]$ . Do modelowania warunków kontaktu zastosowana zo-

stanie zmienna w czasie siatka przestrzenna. Wprowadzenie dodatkowych węzłów w czasie (lokalnie gęstszy podział w czasie) pozwala zbudować wygodniejszy schemat obliczeniowy zadania kontaktowego. Nieokreśloności powstałe przy obliczaniu przemieszczeń poprzez całkowanie prędkości (nieciągłych w chwili kontaktu) można usunąć stosując technikę hamowania ruchu w kroku poprzedzającym kontakt. Wymienione podejścia wykorzystano do symulacji numerycznej kontaktu tocznego w układzie koło-szyna. Pokazano w tym zadaniu proces oscylacji siły kontaktu i powstające w efekcie nierównomierne zużycie powierzchni. W przypadku ciał o małej sztywności uwzględniono duże przemieszczenia i obroty. Przeprowadzono obliczenia drgań sprężystej obręczy usztywnionej cięgnami przy odbiciu od sztywnego podłoża.

## 4.1 Dynamiczne warunki kontaktu

Wprowadźmy ruch ciała odniesienia.  $\delta \mathbf{x}$  będzie przemieszczeniem  $P_0 \vec{P}_1$  (rys. 4.2):

$$\delta \mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} dt \quad (4.1)$$

i

$$\mathbf{u}_n = \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d . \quad (4.2)$$

Szczelina  $d$  oznaczana przez  $QK$  na rys. 4.2 jest wyznaczana przez

$$d = (P_1 \vec{P}_0 - P_1 \vec{Q}) \cdot \mathbf{n} . \quad (4.3)$$

$\mathbf{F}$  jest siłą kontaktu, złożoną z sił normalnych do powierzchni kontaktu i sił stycznych, zgodnych z prawem tarcia:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t , \quad (4.4)$$

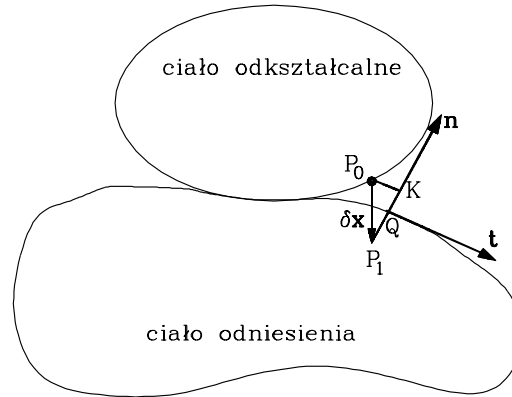
gdzie:

$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  jest siłą normalną,  $\mathbf{F}_n = F_n \cdot \mathbf{n}$ ,

$\mathbf{F}_T = \mathbf{F} - \mathbf{F}_n$  jest siłą styczną. Przyjęte oznaczenia podano na rys. 4.1.

Należy tu podkreślić, że warunki kontaktu opisane są przemieszczeniami normalnymi. Jeśli używa się sformułowań prędkościowych, poprawne ujęcie warunku kontaktu (warunku niepenetrowania) uzyskuje się przy wykorzystaniu do wyznaczenia przemieszczenia związku (4.1).

Przyjmijmy, że ciało  $S_j$  będzie ciałem odniesienia. Normalna zewnętrzna siły  $n_{ij}$  (rzezywista bądź założona) wyznaczana jest w punkcie kontaktu z innym ciałem, przy czym



Rys. 4.2: Konfiguracja przed procesem deformacji oraz przesunięcie punktu  $P$ .

punkt ten może być rzeczywistym punktem kontaktu, bądź wstępnie przyjętym. W szczególności może dojść do kontaktu między dwoma obszarami tego samego ciała. Płaszczyzna styczna w punkcie kontaktu pozwala wyznaczyć dwie pozostałe osie układu odniesienia. Indeksami  $i$  i  $j$  oznaczają będziemy numer ciała.  $n$  będzie kierunkiem normalnym, a  $T$  stycznym.

Względne przemieszczenie normalne punktu ciała  $S_i$  względem ciała  $S_j$  wynosi

$$u_{n_{ij}} = \mathbf{u}_{ij} \mathbf{n}_{ij} , \quad (4.5)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_{ij}(t) = \mathbf{u}_{ij}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_{ij} dt. \quad (4.6)$$

$\mathbf{v}_{ij}$  jest względną prędkością punktów ciała  $S_i$  w układzie odniesienia związanym z ciałem  $S_j$  i ma składowe normalną  $\mathbf{v}_{n_{ij}}$  i styczną  $\mathbf{v}_{T_{ij}}$ :

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_{n_{ij}} + \mathbf{v}_{T_{ij}}. \quad (4.7)$$

Siła normalna skierowana od ciała  $S_j$  do ciała  $S_i$  określana jest następująco:

$$F_{n_{ji}} = \mathbf{F}_{ji} \mathbf{n}_{ji}, \quad (4.8)$$

zaś styczna siła kontaktu:

$$F_{T_{ji}} = \mathbf{F}_{ji} - F_{n_{ji}} \mathbf{n}_{ji}. \quad (4.9)$$

Ogólnie warunki tarcia opisane są przez warunki dyssypacji

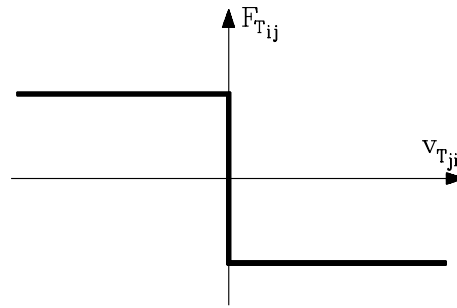
$$\mathbf{F}_T \cdot \mathbf{v}_T \leq 0 . \quad (4.10)$$

Prawo tarcia określa wyrażenie

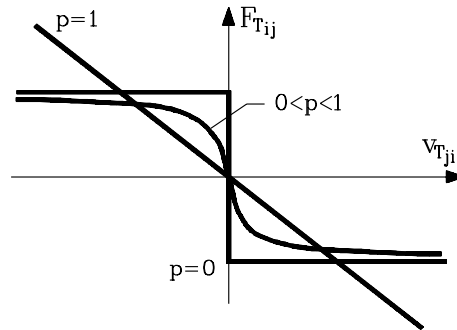
$$\mathbf{F}_T = \mathcal{H}(\mathbf{v}) \quad (4.11)$$

gdzie  $\mathcal{H}(\mathbf{v})$  jest funkcjonalem historii prędkości, spełniającym takie same warunki co równania reologiczne. Prawo tarcia jako prawo powierzchniowe winno uwzględniać własności ciała z wypełniającym je ośrodkiem ciągłym. Przykładem prawa tarcia może być:

- prawo tarcia Coulomba — ([131], rys. 4.3), jeśli  $|F_T| < f|\frac{u_n}{\kappa}H(u_n)|$ , to  $v_T = 0$  i  $F_T = \mathcal{H}(u_n, v_T) = -f|\frac{u_n}{\kappa}H(u_n)|\text{sgn}(v_T)$ .



Rys. 4.3: Wykres  $(v_T, F_T)$  prawa tarcia Coulomba.



Rys. 4.4: Wykres  $(v_T, F_T)$  prawa tarcia lepkiego:  $F_{T_{ij}} = -\alpha|v_{T_{ij}}|^{p-1}v_{T_{ij}}$ .

$$\mathbf{F}_{T_{ji}} = -\mu F_{n_{ij}} \frac{\mathbf{v}_{T_{ij}}}{\|\mathbf{v}_{T_{ij}}\|} \quad (4.12)$$

- prawo tarcia lepkiego (Nortona–Hoffa) (rys. 4.4)

$$\mathbf{F}_{T_{ji}} = -\alpha\|\mathbf{v}_{T_{ij}}\|^{p-1}\mathbf{v}_{T_{ij}}. \quad (4.13)$$

- zregularyzowane prawo Nortona–Hoffa

$$\mathbf{F}_{Tji} = -\alpha \left( \|\mathbf{v}_{Tij}\| + \|\mathbf{v}_{Tij}\| \right)^{p-1} \mathbf{v}_{Tij}, \quad (4.14)$$

gdzie  $\mathbf{v}_0$  jest pewnym małym wektorem, a  $\|\mathbf{v}_0\|$  pewną małą liczbą dodatnią.  $P$  jest liczbą z przedziału  $[0, 1]$ .

Przypadkiem granicznym tarcia lepkiego przy  $p = 0$  jest tarcie Tresci. Przy  $p = 0$  i  $\alpha$  zależnym od sił normalnych utrzymuje się prawo tarcia Coulomba.

Prawo tarcia można w związku z powyższym zapisać ogólnie jako

$$\mathbf{F}_{Tji} = \mathbf{H}(\mathbf{v}_{Tij}). \quad (4.15)$$

Warunki kontaktu Signoriniego spełnione są w chwilach  $t_0$  i  $t_1$ , jeśli

$$\begin{aligned} u_{nij} - d_0 &\leq 0 \quad , \\ F_{nji} &\leq 0 \quad , \\ F_{nji} (u_{nij} - d_0) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.16)$$

gdzie  $d_0$  jest odległością pomiędzy  $i$  i  $j$ . Można więc określić moc siły normalnej w dowolnej chwili  $t$  na kroku czasowym jako równą zero:

$$F_{nji} v_{nij} = 0. \quad (4.17)$$

Wówczas praca w przedziale czasu  $[t_0, t_1]$  będzie równa zero:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{nji} v_{nij} dt = 0. \quad (4.18)$$

Powyższy związek wyraża dualność siły normalnej i normalnej prędkości względnej. Z tego też względu pole wirtualnych prędkości należy dobierać w sposób zgodny z warunkami kontaktu.

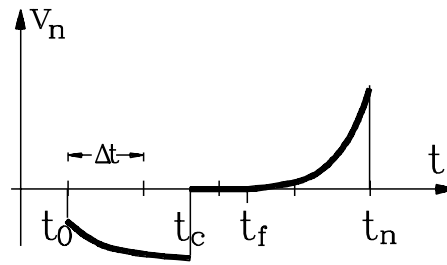
Możemy wykonać całkowanie (4.18) przez części:

$$\left[ F_{nji} (u_{nij} - d_0) \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF_{nji}}{dt} (u_{nij} - d_0) dt = 0. \quad (4.19)$$

Po uwzględnieniu warunków Signoriniego (4.16) otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dF_{nji}}{dt} (u_{nij} - d_0) dt = 0. \quad (4.20)$$

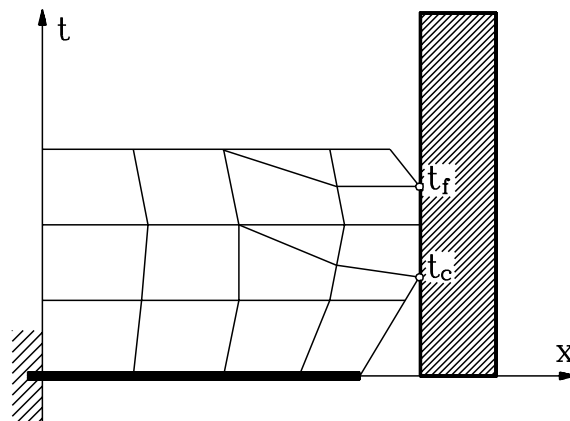


Rys. 4.5: Prędkość względna normalna w przedziale czasu  $[t_0, t_1]$ .

#### 4.1.1 Prędkość w strefie kontaktu

Prędkość punktu materialnego wchodzącego w kontakt z innym ciałem jest funkcją nieciągłą (rys. 4.5). Istotne są dwa punkty charakterystyczne procesu kontaktowego: osiągnięcie kontaktu  $t_c$  (punkt ten jest właśnie punktem nieciągłości) oraz oderwanie się  $t_f$  (ten punkt nieciągłości ma mniejsze znaczenie). Najczęściej długość przedziału czasu  $\Delta t = t_1 - t_0$  jest mała na tyle, że punkty  $t_c$  i  $t_f$  nie zawierają się w nim jednocześnie.

Konsekwencją rozważań prowadzonych w p. 4.1, a zwłaszcza postulatu doboru pola prędkości wirtualnych zgodnie z warunkami kontaktu, jest taki dobór dyskretyzacji czasoprzestrzennej, który pozwala wyodrębnić w sposób naturalny punkty  $t_c$  i  $t_f$ . Konieczne jest zatem zagęszczenie podziału w czasie w strefie kontaktu poprzez wprowadzenie dodatkowych węzłów o współrzędnych właśnie  $t_c$  i  $t_f$  (rys. 4.6). Efektem wspomnianej nieciągłości prędkości są trudności z wyznaczeniem położenia punktu w sposób konsekwentny,



Rys. 4.6: Drgania osiowe pręta — rozwój siatki czasoprzestrzennej w strefie kontaktu.

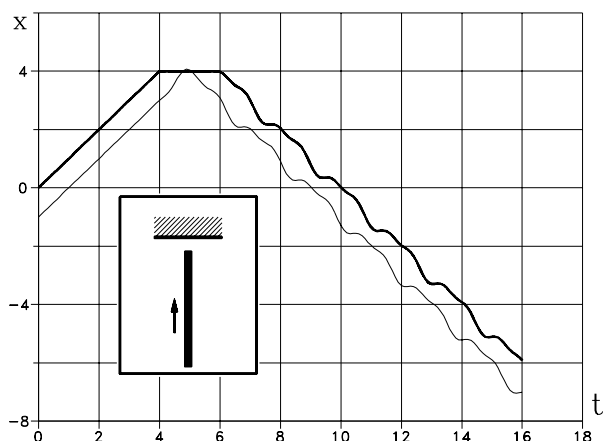
głości prędkości są trudności z wyznaczeniem położenia punktu w sposób konsekwentny,

tj. z pola prędkości, np. według związku

$$x_1 = x_0 + [(1 - \beta)v_0 + \beta v_1] h, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (4.21)$$

Ponieważ  $x_1$  określane jest przez geometrię ciał, a  $v_1$  winno być równe zeru przy  $t_c$ , wobec tego (4.21) może być spełnione tylko w sposób przybliżony.

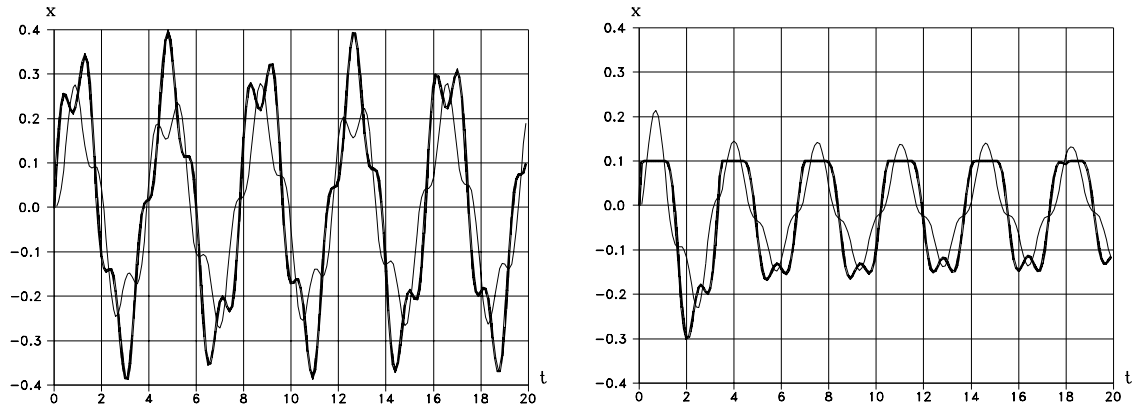
Przedstawione poniżej przykładowe zadania rozwiązano przyjmując zagęszczoną w czasie siatkę elementów. W pierwszym sprężysty pręt o długości  $L=1$ , module Younga  $E=1$  i gęstości masy  $\rho=1$  uderza w sztywną przeszkodę z prędkością  $v=1$ . Podziału przestrzennego dokonano na dwa elementy. W strefie kontaktu czworokątny element czasoprzestrzenny zastąpiono parą elementów: trapezowym i trójkątnym. Węzeł pośredni przypadał na chwilę wejścia swobodnego końca pręta w kontakt lub utraty kontaktu. Rys. 4.7 przedstawia przemieszczenia obu końców pręta w czasie. Drugie zadanie modelowano iden-



Rys. 4.7: Zderzenie sprężystego pręta ze sztywną przeszkodą.

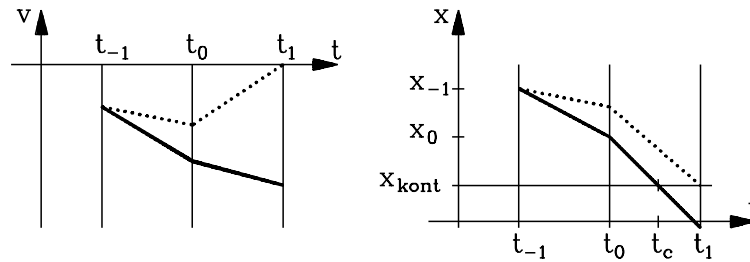
tyczną jak poprzednio siatką elementów, przy czym jeden z końców pręta zamocowano. Drugiemu swobodnemu końcowi nadano prędkość początkową  $v=1$  i ustawiono w odległości  $d=0,1$  od niego sztywną przeszkodę. Linia pogrubiona pokazuje przemieszczenia w czasie swobodnego końca pręta, linia cienka zaś punktu w środku długości pręta.

Widoczną na rys. 4.5 nieciągłość prędkości w strefie kontaktu można usunąć. Jednocześnie konsekwentna stanie się wówczas zależność przemieszczeń od prędkości (jak np. (4.21)). W tym celu związki wynikające z warunków kontaktu narzucić trzeba na rozwiązanie w chwili poprzedzającej penetrację ciała, tj. już w chwili  $t_0$ , jeśli penetracja



Rys. 4.8: Przemieszczenie punktów pręta bez kontaktu z przeszkodą (lewy rysunek) i z uwzględnieniem kontaktu (prawy rysunek).

następuje w chwili  $t_1$ . Nałożone ograniczenia mają za zadanie wyhamować punkt materialny do takiej prędkości  $v_0$ , aby w następnym kroku czasowym móc spełnić warunek  $v_1 = 0$  i  $x_1 = x_{kont}$  (rys. 4.9). W najprostszym przypadku, ilustrowanym na rys. 4.9,



Rys. 4.9: Hamowanie punktu w strefie kontaktu: linia ciągła – ruch swobodny, linia przerywana – ruch po uwzględnieniu ograniczeń.

prędkość w chwili  $t_0$  powinna mieć wartość

$$v_0 = \frac{x_{kont} - x_{-1}}{h} - (1 - \beta) v_{-1} \quad , \quad (4.22)$$

położenie zaś

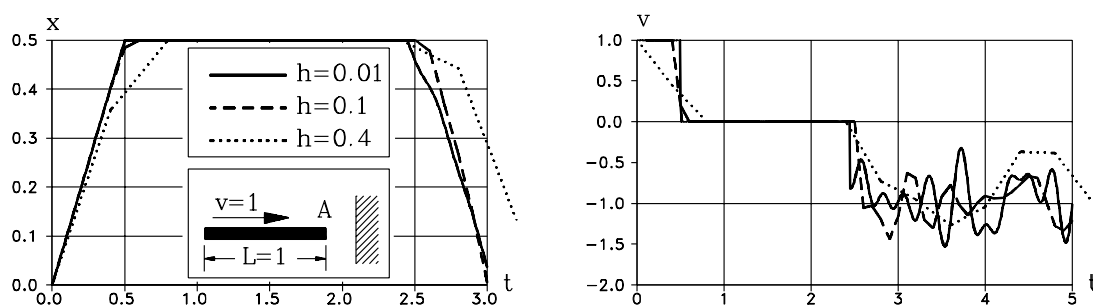
$$x_0 = (1 - \beta)x_{-1} + \beta x_{kont} + (1 - \beta)^2 h v_{-1}. \quad (4.23)$$

Wtedy w chwili  $t_1$  prędkość  $v_1$  przyjmie wartość 0, a  $x_1$  wartość  $x_{kont}$ .

Trzeba tu zwrócić uwagę, że hamowanie przed kontaktem jest procesem odbierania energii. Można tego dokonać dwojako: narzucając warunek prędkości na określony węzeł,

albo przykładając do tego węzła odpowiednio dobraną siłę hamującą. Oba podejścia są równoważne, gdyż wartość siły równa jest wartości reakcji przy narzuconym warunku na prędkość. Siła hamująca (reakcja) działa na kroku  $\Delta t$ . W efekcie węzeł uderza w przeszkodę z prędkością nieco mniejszą i sztywna przeszkoda zwraca w związku z tym mniej pędu po odbiciu. Odebrany pęd trzeba zwrócić w pierwszym kroku, w którym węzeł porusza się swobodnie po oswoobodzeniu się z kontaktu.

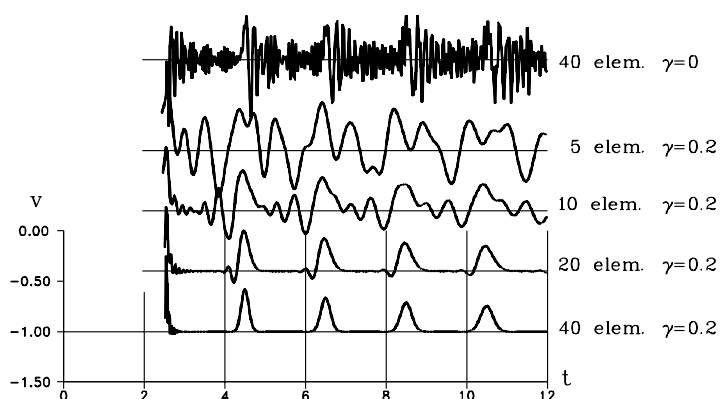
Poniższy przykład ilustruje omówione podejście. Pręt sprężysty o długości  $L=1$ , danych materiałowych  $E=1$ ,  $\rho=1$ , porusza się z prędkością  $v=1$ . W odległości  $d=0,5$  uderza w sztywną przeszkodę. Dokonano podziału przestrzennego na 8 elementów. Parametr  $\alpha$  przyjęto równy 0,8, uzyskując bezwarunkową stabilność procedury. Z rys. 4.10 widać, że



Rys. 4.10: Schemat zadania oraz przemieszczenia i prędkości w czasie punktu czołowego A przy wybranych wartościach kroku czasowego  $h=0,01$ ,  $0,1$  i  $0,4$ .

prędkość po odbiciu pręta pozostaje równa 1. Widać to zwłaszcza, jeśli obserwację prowadzi się przez dłuższy okres czasu. Linia ciągła, odpowiadająca krokowi  $h=0,4$  uwidacznia miejsca hamowania i zwrotu pędu. Widać to też, choć nieco mniej wyraźnie, przy  $h=0,1$ . Prędkość końca pręta po odbiciu zaburzona jest drganiami pasożytniczymi. Wprowadzenie niewielkiego tłumienia może poprawić obraz odpowiedzi układu. Warunkiem jest jednak względnie drobna dyskretyzacja (rys. 4.11). Przy gęstym podziale drgania pasożytnicze mają wysoką częstość i dają się łatwiej tłumić. Widać, że dopiero podział na 20 lub 40 elementów daje właściwą postać wyników.

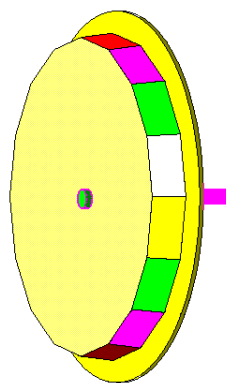
Algorytm obliczeniowy jest prosty i można go zbudować sprawdzając każdorazowo kilka warunków. W zależności od sytuacji obliczenia kontynuuje się, powtarza się bieżący krok lub powraca i powtarza krok poprzedni. Schemat obliczeń pokazuje tabela 4.1. Metodę przedstawioną w tabeli 4.1 wykorzystano do rozwiązania zadania kontaktowego odkształcalnego koła toczonego się po sztywnym podłożu.



Rys. 4.11: Prędkość końca pręta po odbiciu przy różnej gęstości podziału przestrzennego, bez tłumienia ( $\gamma = 0$ ) oraz z małym tłumieniem ( $\gamma = 0, 2$ ) ( $\alpha = 0, 75$ ,  $h = 0, 02$ ).

#### 4.1.2 Zagadnienie kontaktu tocznego — przykład

Jednym ze zjawisk towarzyszących oddziaływaniu walca i pasma (koła i szyny) jest polifalowanie powierzchni pasma, które przy wielokrotnym walcowaniu na zimno (jak np. walcowanie blachy) może mieć tendencję do wzrostu amplitudy nierówności. Zjawisko to jest również obserwowane w eksploatacji szyn i kół kolejowych (rys. 4.12). Nierówności te



Rys. 4.12: Poligonizacja koła kolejowego.

powstają po kilku latach przeciętnej eksploatacji i występować mogą zarówno na główce szyny, jak i na powierzchni kół pojazdów (rys. 1.1). Obserwowana jest też duża szkodliwość hałasu [70].

Zjawisko to jest od dawna obserwowane, ale dotychczas nie jest w pełni wyjaśnione. Istniejące hipotezy [117, 157] nie są zadawalające, gdyż nie obejmują większości warunków

Tab. 4.1: Schemat obliczeniowy zadania kontaktowego z hamowaniem i zwracaniem pędu.

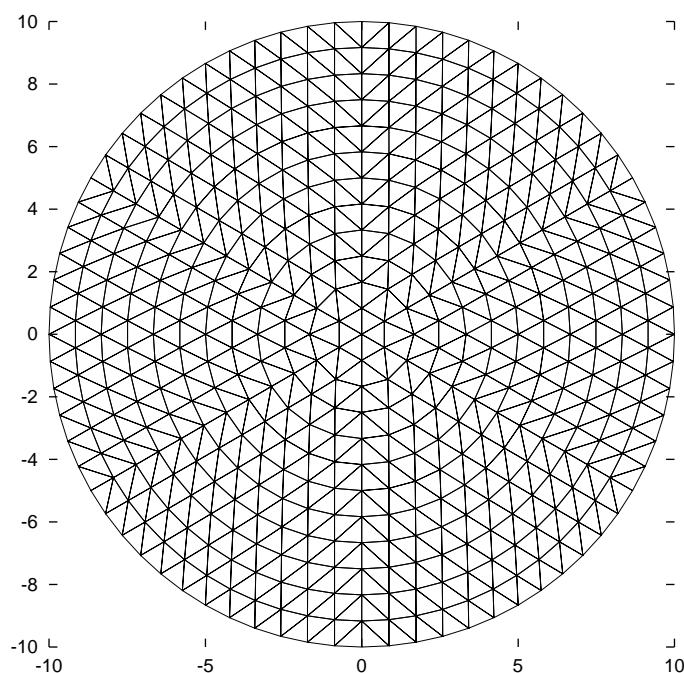
<p>1° początkowo:  indeks=0, krok <math>i</math>;</p> <p>2° moduł obliczeniowy:  <math>\mathbf{A}\mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{B}\mathbf{V}_i + \mathbf{s}_i = \mathbf{F}_i</math>;</p> <p>3° jeśli indeks=0 i nie ma penetracji, to  <math>i := i + 1, \rightarrow 2^\circ</math>;</p> <p>4° jeśli indeks=0 i zachodzi penetracja, to  zadana prędkość <math>\bar{v} = (x_{kont} - x_{i-2})/h - (1 - \beta)v_{i-2}</math>,  indeks=1, <math>i := i - 1, \rightarrow 2^\circ</math>;</p> <p>5° jeśli indeks=1, to  obliczyć reakcję i zapamiętać <math>\bar{R}</math>,  <math>\bar{v}=0</math>, indeks=2, <math>\rightarrow 2^\circ</math>;</p> <p>6° jeśli indeks=2 i zachodzi ściskanie w kontakcie (odpowiedni zwrot sił kontaktu),  to  <math>\bar{v}=0</math>, <math>i := i + 1, \rightarrow 2^\circ</math>;</p> <p>7° jeśli indeks=2 i zachodzi odrywanie w kontakcie, to  indeks=0, siła zewnętrzna <math>F := F + \bar{R}</math>, <math>\rightarrow 2^\circ</math>.</p>
--

generacji korugacji, a tylko niektóre z nich.

Dotychczasowe badania numeryczne zagadnienia kontaktu toczonego z wykorzystaniem metody elementów skończonych ograniczały się do analizy quasistatystycznego procesu toczenia walca po sprężysto–plastycznym paśmie [126, 84, 45] lub symulacji numerycznej krótkotrwałych procesów niestacjonarnych [41]. M.E.S. wykorzystywano na ogół do określenia częstości własnych podukładów [127, 117, 43] poszukując związku pomiędzy długością fali nierówności i prędkością względnego ruchu. Poszukuje się też rozwiązań z wykorzystaniem modeli zużycia, pokazujących pogłębianie początkowo małych nierówności szyn po wielokrotnych przejazdach wózka [118, 80].

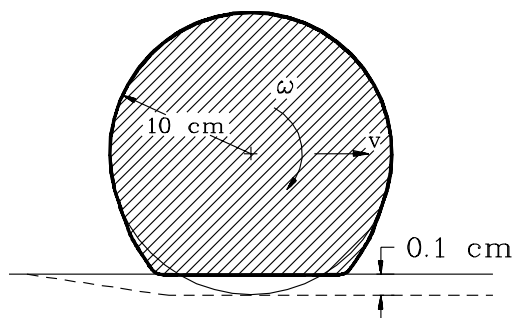
Do pełnego zbadania zjawiska wymagane jest uwzględnienie m.in. teorii plastyczności, teorii drgań, tarcia i zużycia. Ze względu na złożony model dynamiczny pojazdów czy urządzeń walcowniczych niemożliwe jest zbadanie analityczne zagadnienia.

Rozważając zagadnienie toczenia się odkształcalnego walca (koła) analizę numerycznej ograniczono do prześledzenia efektów wywołanych zjawiskami dynamicznymi kontaktu. Do obliczeń przyjęto koło o promieniu  $R=10$  cm, grubości 1 cm, wykonane ze stali ( $E=2,05 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu=0,3$ ,  $\rho=7,83$  g/cm<sup>3</sup>). Koło toczy się po sztywnym podłożu z prędkością kątową  $\omega$ . Rozpatrywane prędkości liniowe mieściły się w przedziale 90–180 km/h. Przyjęto materiał sprężysty, w płaskim stanie naprężenia. Obszar podzielono na 864 elementy trójkątne z 469 węzłami (rys. 4.13). Aby uniknąć wielokrotnych obrotów macierzy,

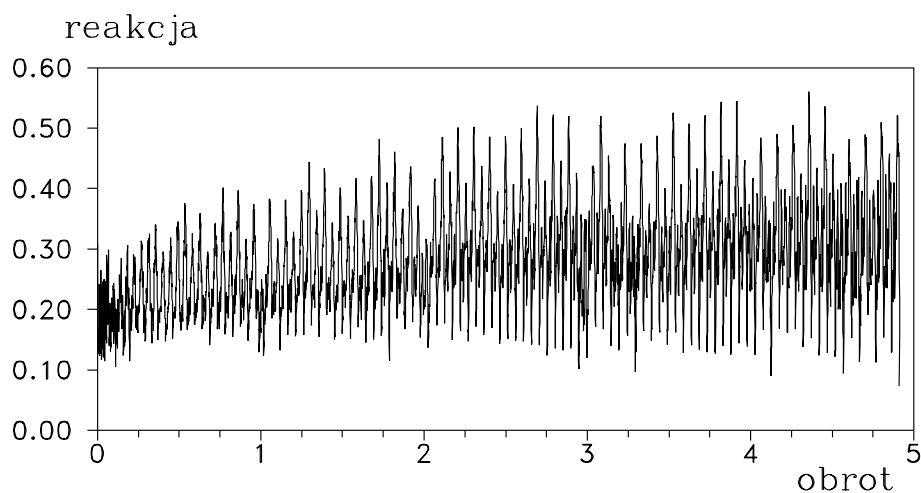


Rys. 4.13: Siatka podziału przestrzennego przyjęta do obliczeń.

związanych z obrotem struktury i tym samym akumulacji błędów zaokrągleń przyjęto, że koło pozostaje nieruchome, a obraca się wokół niego sztywne podłoże. Nadano przy tym kołu wszystkie obciążenia wynikające z ruchu wirowego. W początkowej fazie koło obracając się osiada łagodnie na podłożu. Spłaszczenie powodowane przez podłoże osiąga wartość ostateczną  $d=0,1$  cm (rys. 4.14). Aby usunąć wpływ warunków początkowych oraz zmniejszyć efekt odbicia fal i interferencji przyjęto stosunkowo duże tłumienie numeryczne. Wartość parametru  $\gamma$  (2.74) wyniosła w obliczeniach 0,2 i dała w efekcie tłumienie o dekrementem logarytmicznym  $\Lambda = 0,03$ . W praktyce w tym przypadku drgania zgodne z pierwszą formą własną i okresie  $T \approx 80 \mu\text{s}$  wytłumiły się w 95% już po 1/4 obrotu koła.

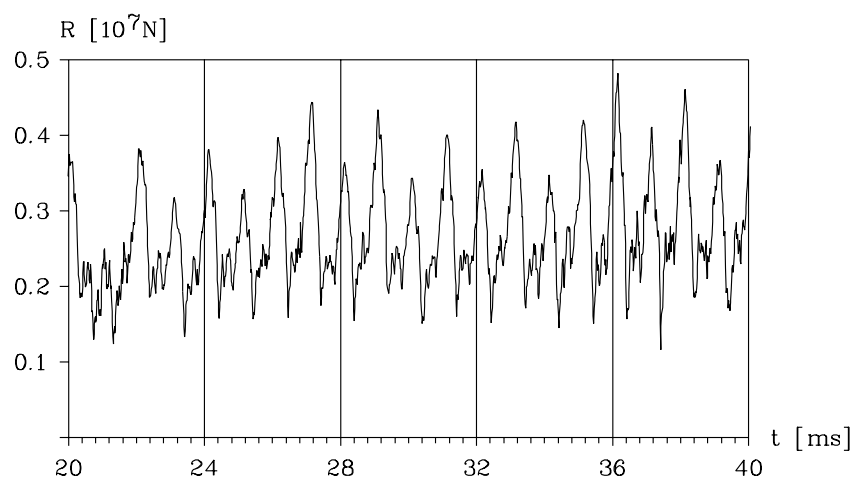


Rys. 4.14: Schemat zadania.

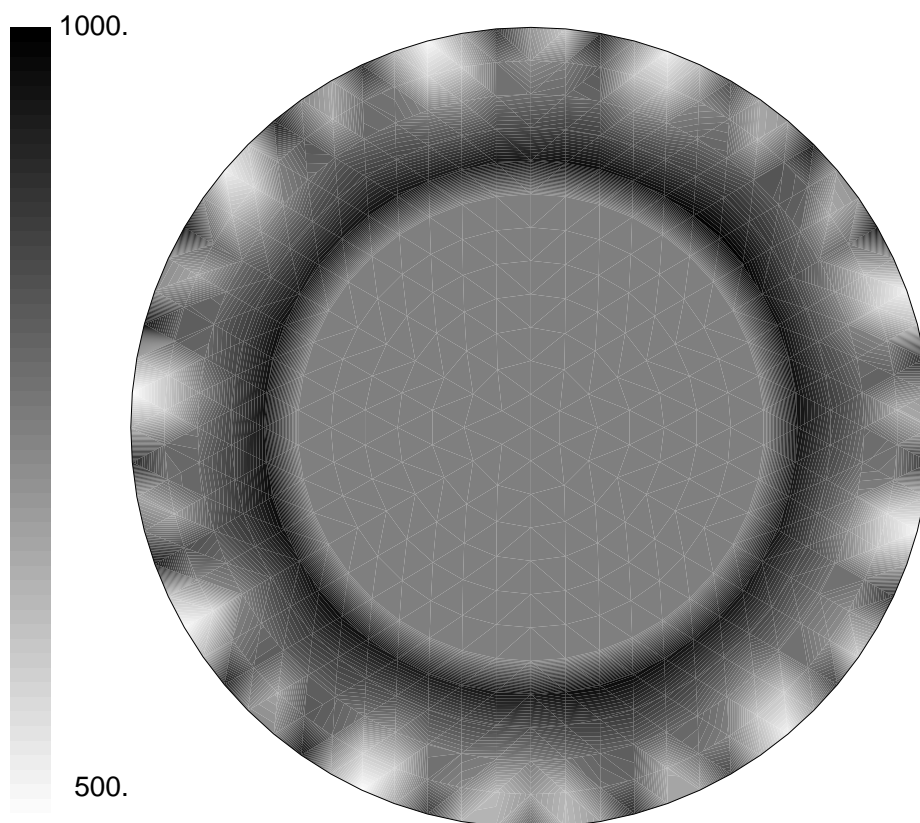
Rys. 4.15: Reakcja kontaktu w czasie przy prędkości  $\omega=0,3 \cdot 10^{-3}$  rad/s.

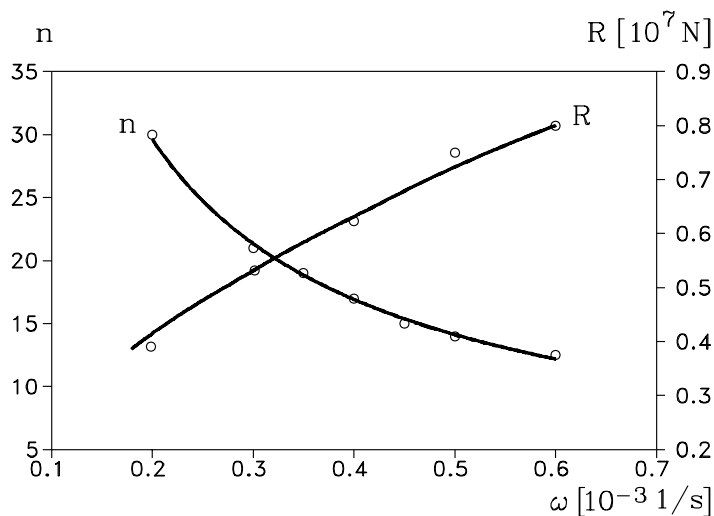
Wyniki obliczeń wykazały, że siła w strefie kontaktu jest zmienna, mimo jednostajnego toczenia się koła i znacznego tłumienia. Przebieg pierwszych pięciu obrotów przy prędkości  $\omega=0,3 \cdot 10^{-3}$  rad/s przedstawia rys. 4.15. Wycinek wykresu dokładniej pokazano na rys. 4.16. Aby prześledzić rozkład naprężeń w materiale w kolejnych fazach obrotu zsumowano drugi niezmiennik naprężeń  $J_2$  z wszystkich kroków jednego pełnego obrotu (rys. 4.17). Rysunek nie ma interpretacji przestrzennej. Obrazuje jednak periodyczny rozkład ewentualnego zużycia powierzchni koła podczas eksploatacji. Liczba oscylacji reakcji zmniejsza się wraz ze wzrostem prędkości. Zaobserwowano to np. w pracach [135, 114] w przypadku koła gumowego. Można wykonać przybliżony wykres zależności liczby cykli przypadającej na jeden pełny obrót od prędkości kątowej  $\omega$  (rys. 4.18).





Rys. 4.16: Fragment wykresu reakcji kontaktu w czasie.

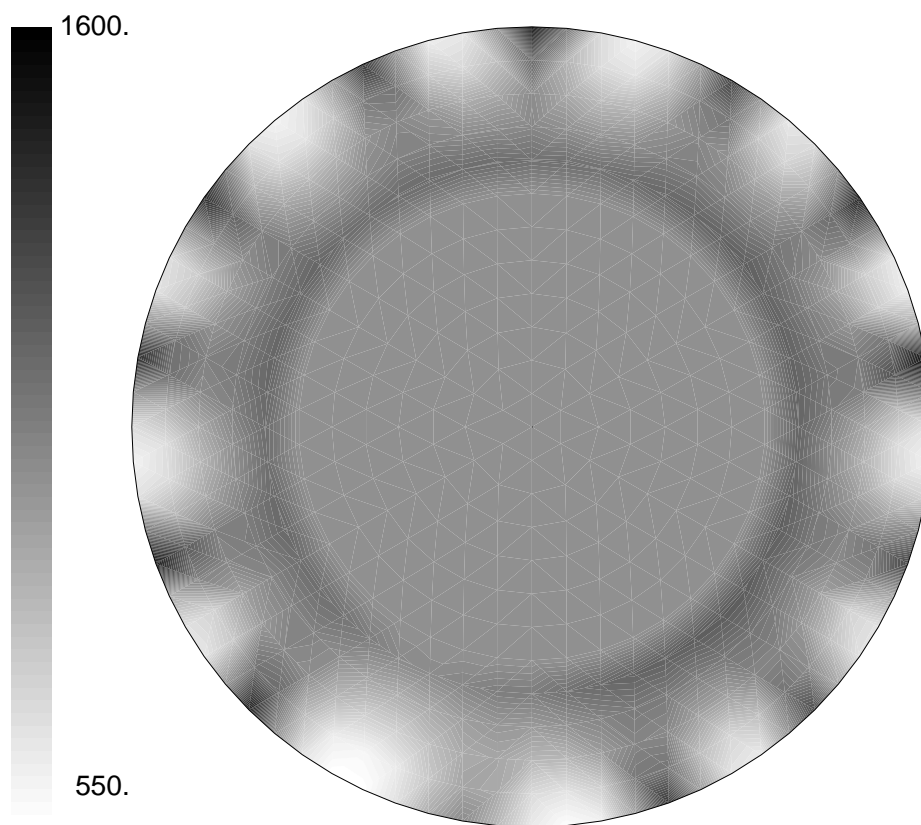
Rys. 4.17: Drugi niezmiennik naprężenia  $J_2$  podczas pełnego obrotu przy prędkości  $\omega = 0,30 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$  [MPa].



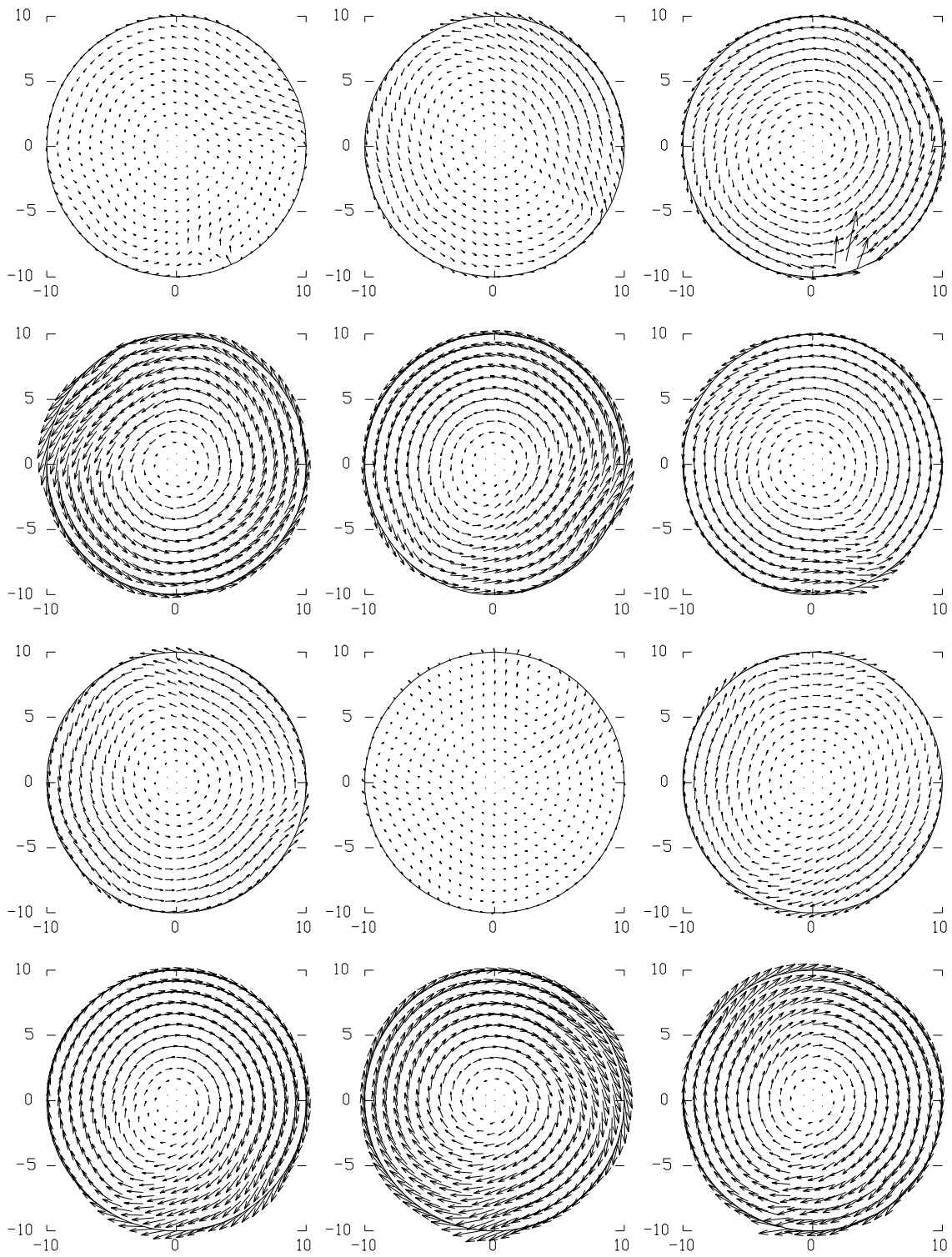
Rys. 4.18: Zależność liczby cykli reakcji  $n$  i jej maksymalnej wartości  $R$  od prędkości kątowej  $\omega$ .

Aby przedstawić zmianę rozkładu prędkości w kolejnych etapach toczenia, zamieszczono rys. 4.20. Strefa kontaktu rozpościera się w dolnej części koła i przesuwa się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (przechodzi z godziny 6 na 5). Materiał obraca się względem osi koła raz w lewo, raz w prawo. Wzbudzenia ruchu zaś doznaje w strefie kontaktu. Jednocześnie wartości sił kontaktu rosną wraz ze wzrostem częstotliwości  $\omega$ . W celu dokonania porównania przedstawiono wykres  $J_2$  wykonany przy prędkości większej,  $\omega=0,52 \cdot 10^{-3}$  rad/s (rys. 4.19). Obserwuje się spadek liczby karbów przy jednoczesnym wzroście wartości napeżeń. W przedstawionym rozwiązaniu, przy przyjętej wielkości nacisku statycznego i prędkościach obrotu, przekroczona zostaje granica plastyczności. Układ rzeczywisty w praktyce należałoby przeprojektować.

Obserwację prowadzono do czasu pełnego obrotu koła. Jeśli liczba karbów przypadająca na jeden obrót nie jest liczbą całkowitą (tzn. następują przesunięcia fazowe przy każdym kolejnym obrocie), to zaburzony zostaje wykres w okolicy dolnego punktu obwodu koła, od którego zaczyna się i na którym kończy się obserwację.



Rys. 4.19: Drugi niezmiennik naprężenia  $J_2$  podczas pełnego obrotu przy prędkości  $\omega=0,52 \cdot 10^{-3}$  rad/s [MPa].



Rys. 4.20: Rozkład prędkości w kolejnych etapach.

## 4.2 Duże przemieszczenia

W poprzednich punktach wykazano, że formuły prędkościowe, mimo pewnych wad, mogą okazać się użyteczne w modelowaniu zjawisk kontaktowych. W punkcie 4.1.1 zwrócono uwagę, na sformułowanie wyrażone prędkościami, kiedy to na prędkości nakładane są warunki brzegowe. Ma ono wadę nieciągłości pola prędkości w chwili kontaktu. Zaletą formuł prędkościowych jest fakt, że ułatwiają one uwzględnienie bardziej złożonych reologicznie związków konstytutywnych. Nie ma więc jednoznacznej oceny przydatności wybranego sformułowania. Tym bardziej jest ona trudna, im bardziej złożony jest problem.

Poniżej przedstawimy sposób uwzględnienia dużych obrotów materiału w opisie prędkościowym oraz podamy przyrostowy opis przy dużych odkształceniach. Okazuje się, że uwzględnienie tego typu zjawisk również nie przedstawia trudności. Przyjęto, że przypadające na krok czasowy wielkości przyrostów odkształceń nie są tak duże, by znacząco pogorszyć zbieżność i dokładność rozwiązania [79, 153].

### 4.2.1 Duże obroty

Oznaczmy przez  $d^{t_0}\mathbf{x}$  wektor wyznaczony w chwili  $t_0$ . Wektor  $d^t\mathbf{x}$  w chwili  $t$  dany jest jako wynik transformacji stycznej

$$d^t\mathbf{x} = {}^t_{t_0}\mathbf{F} d^{t_0}\mathbf{x} . \quad (4.24)$$

Różniczkowanie (4.24) względem  $t$  prowadzi w rezultacie do związku

$$\frac{d^t\mathbf{x}}{dt} = ({}^t\mathbf{W} + {}^t\mathbf{D}) d^{t_0}\mathbf{x} , \quad (4.25)$$

gdzie człon  ${}^t\mathbf{W}d^t\mathbf{x}$  określa ruch sztywny

$${}^t\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{grad} \mathbf{v} - (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T \right) , \quad (4.26)$$

a człon  ${}^t\mathbf{D}d^t\mathbf{x}$  dotyczy czystego odkształcenia

$${}^t\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{grad} \mathbf{v} + (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T \right) . \quad (4.27)$$

Po rozkładzie

$${}^t_{t_0}\mathbf{F} = {}^t_{t_0}\mathbf{R} {}^t_{t_0}\mathbf{Y} \quad (4.28)$$

związek pomiędzy  ${}^t_{t_0}\mathbf{R}$  i  ${}^t\mathbf{W}$  można określić w następujący sposób:

$$\frac{d^t_{t_0}\mathbf{R}}{dt} \left( {}^t_{t_0}\mathbf{R} \right)^{-1} - {}^t\mathbf{W} = \mathbf{0} . \quad (4.29)$$

Po scałkowaniu (4.29) otrzymuje się macierz obrotu w przedziale  $[t_0, t]$

$${}^t_{t_0}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} e^{-t\mathbf{W}(t-t_0)}, \quad (4.30)$$

która może być rozwinięta w szereg z dwoma członami

$${}^t_{t_0}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} - (t - t_0)t\mathbf{W} + \frac{(t - t_0)^2}{2} {}^t\mathbf{W}^2 - \dots \quad (4.31)$$

Związek konstytutywny w przypadku materiału hyposprężystego opisany jest przez związek

$$\frac{d_J\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{E}\mathbf{D}. \quad (4.32)$$

$\frac{d_J\boldsymbol{\sigma}}{dt}$  jest pochodną czasową we współobrotowym układzie współrzędnych, a  $\mathbf{D}$  jest tensorem prędkości obrotu. Tensor odkształcenia w chwili  $t$  opisuje zależność

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{E}\mathbf{D}dt. \quad (4.33)$$

Po wprowadzeniu dyskretyzacji czasoprzestrzennej wektora prędkości w układzie odniesienia w konfiguracji  $t_i$  (przy przyjętym liniowym rozkładzie) ma on postać

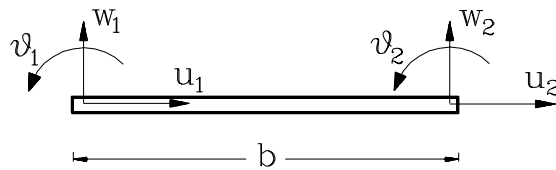
$$\boldsymbol{\sigma} = ({}^t_{t_0}\mathbf{R})^{-1} \left( \boldsymbol{\sigma}_0 + (1 - \alpha^2)\frac{h}{2}\mathbf{E}\mathbf{D}_0 \right) \left[ ({}^t_{t_0}\mathbf{R})^{-1} \right]^T + \alpha^2\frac{h}{2}\mathbf{E}\mathbf{D}, \quad (4.34)$$

gdzie  $\alpha = (t_i - t_0)/h$ ,  $h = t_1 - t_0$ . Odkształcenie określone przez (4.34) można wprowadzić do równania pracy wirtualnej.

Dalsze przykładowe rozważania poprowadzimy rozwijając element ramownicy płaskiej.

#### 4.2.2 Element ramownicy płaskiej

Rozpatrujemy prosty element ramownicy płaskiej (rys. 4.21). Przyjmujemy liniową inter-

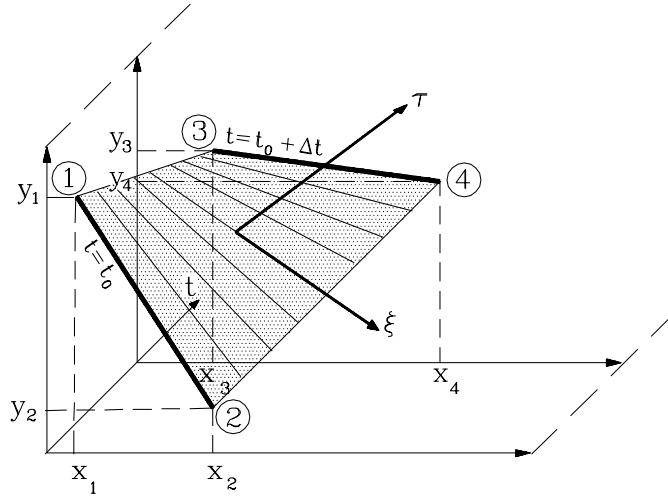


Rys. 4.21: Przemieszczenia elementu ramownicy płaskiej.

polację przemieszczeń  $u$ ,  $w$ ,  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 \\ \vartheta &= N_1 \vartheta_1 + N_2 \vartheta_2, \end{aligned} \quad (4.35)$$



Rys. 4.22: Element ramownicy w chwili  $t_i$  i  $t_{i+1}$ .

$\varphi_a$  i  $\varphi_p$  są kątami nachylenia osi pręta w chwilach  $t_0$  i  $t_0 + \Delta t$ . Dystrybucja przemieszczeń wirtualnych może być opisana funkcjami wyższego rzędu, typu

$$\tilde{H}_a = \frac{1}{2}(1 - \tau) - \alpha(\tau^3 - \tau), \quad \tilde{H}_p = \frac{1}{2}(1 + \tau) + \alpha(\tau^3 - \tau). \quad (4.43)$$

Iteracyjny, niejawny schemat obliczeń przedstawia rysunek 4.23.

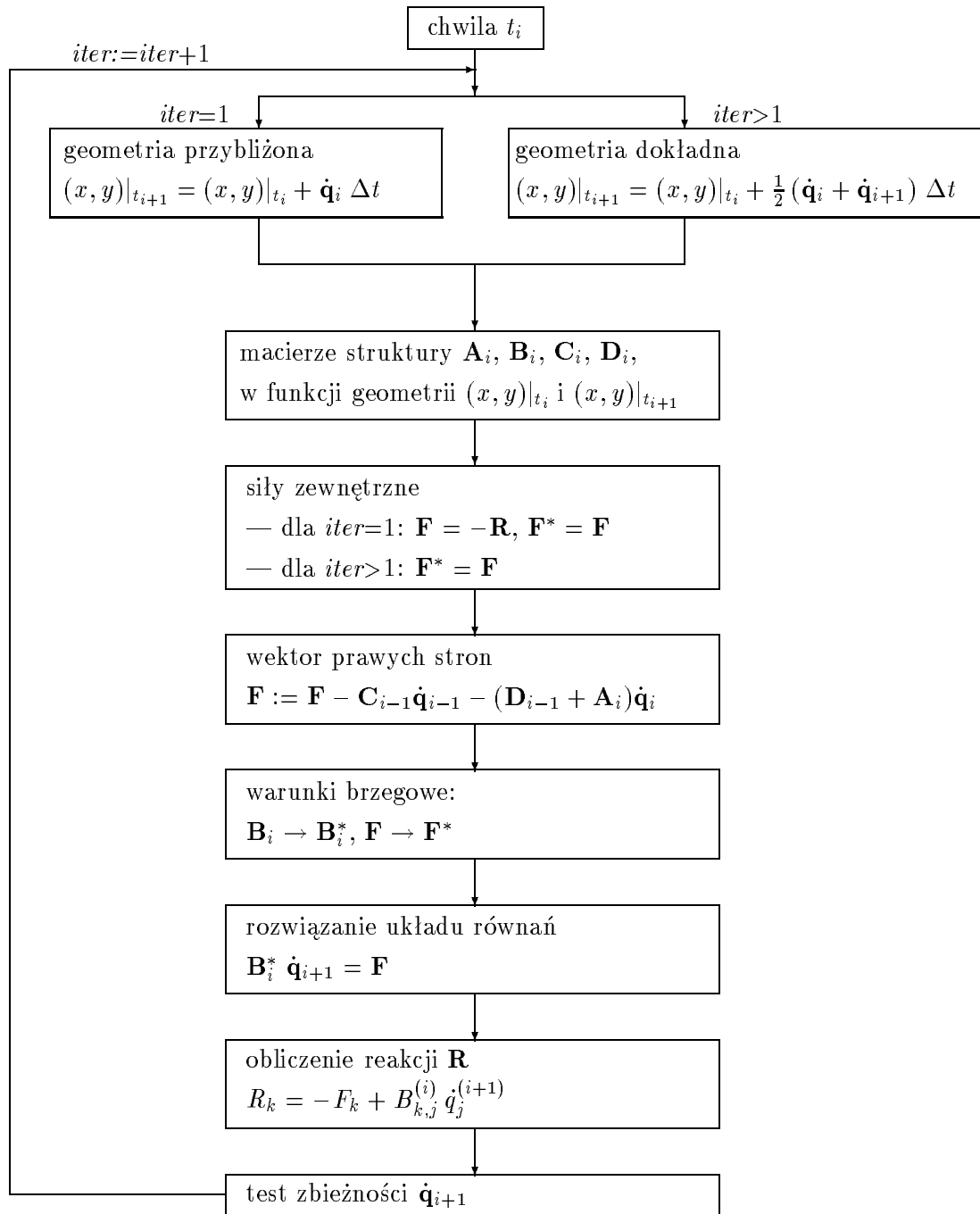
Przykładowe obliczenia wykonano rozważając okrąg złożony z  $2 \times 32$  elementów, spadający pionowo z prędkością  $v$  na nieskończenie sztywną, nieruchomą powierzchnię. Przyjęto następujące wartości liczbowe:  $E = 0,004$ ,  $A = 4,0$ ,  $I = 0,333$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $K = 1,2$ ,  $\nu = 0,1$ ,  $\Delta t = 25$ ,  $v = 0,0015$  (w jednostkach: cm, g,  $\mu s$ ). Wyniki podano na rysunku 4.24. Zdeformowany okrąg pokazano w odstępach czasu  $200 \Delta t$ . W drugim przykładzie do sprężystego okręgu dodano sztywny pierścień wewnętrzny i szprychy–ciągna, o dużej sztywności, pracujące jedynie przy rozciąganiu. Kolejne fazy odbicia pokazuje rys. 4.25 (naniesiono tylko szprychy aktywne w danym momencie).

### 4.3 Procedura przyrostowa

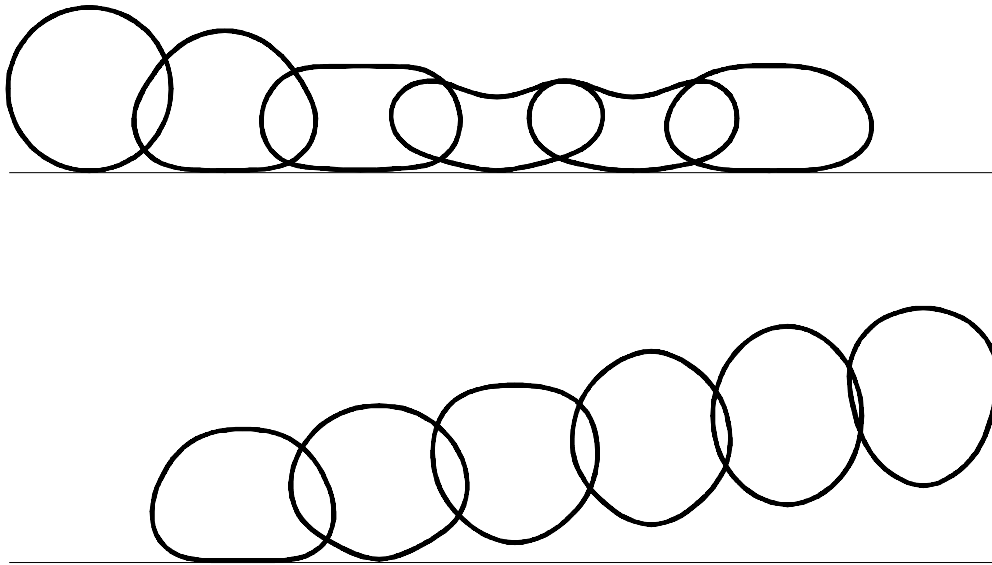
Rozpatrzmy warstwę czasową  $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$ . Równanie pracy wirtualnej można zapisać w następującej postaci:

$$\int_{V_{t_i}} (\mathbf{S}_{t_i}(t) \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t_i} + \rho_{t_i} \ddot{\mathbf{u}}_{t_i}(t) \delta \mathbf{u}_{t_i}) dV_{t_i} = R(t), \quad (4.44)$$

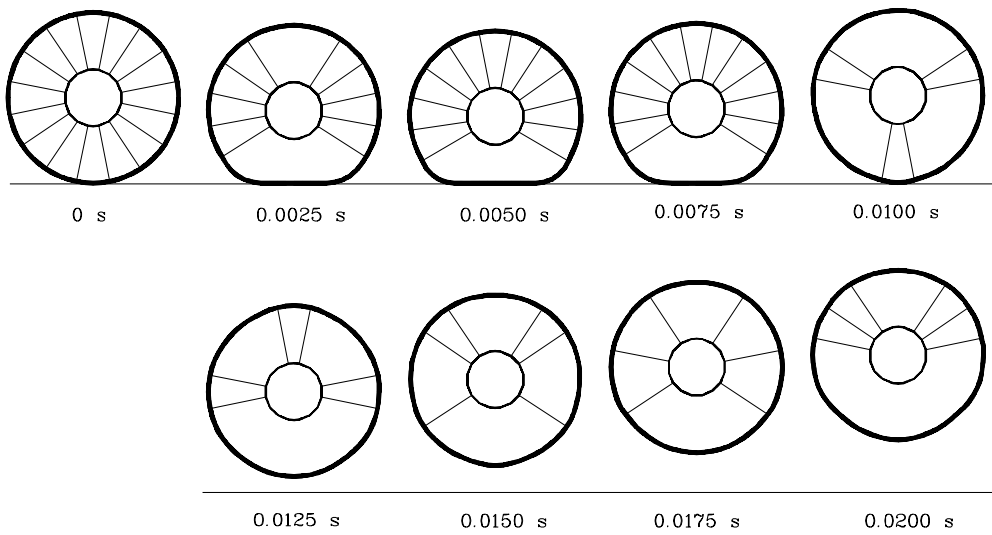




Rys. 4.23: Schemat obliczeń w przypadku dużych przemieszczeń.



Rys. 4.24: Odbicie sprężystego okręgu.



Rys. 4.25: Odbicie koła z cięgnami.

- $\mathbf{S}_{t_i}(t)$  – II tensor Pioli–Kirchhoffa w chwili  $t$  odniesiony do konfiguracji  $t_i$ ,  
 $\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i}(t)$  – tensor odkształceń Greena–Lagrange’a,  
 $\rho_{t_i}$  – gęstość masy w chwili  $t_i$ ,  
 $R(t)$  – praca wirtualna sił zewnętrznych

$$R(t) = \int_{V_t} f_i^B(t) \delta u_i dV_t + \int_{S_t} f_i^S(t) \delta u_i dS_t .$$

$f_i^B(t)$  i  $f_i^S(t)$  są składnikami zewnętrznie przyłożonych sił objętościowych i powierzchniowych, określanych w chwili  $t$ . Równanie (4.44) jest całkowane w przedziale czasu  $[t_i, t_i + \Delta t]$ . Przyjmuje się także dekompozycję przyrostową

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{t_i}(t) &= \mathbf{S}_{t_i}(t_i) + \Delta \mathbf{S} = \boldsymbol{\tau}_{t_i} + \Delta \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t_i}(t) &= \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{u}_{t_i}(t) &= \mathbf{u}_{t_i}(t_i) + \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.45)$$

oraz prawo konstytucyjne

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}_{t_i} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (4.46)$$

Po wykorzystaniu (4.45) i (4.46) równanie (4.44) przybiera postać

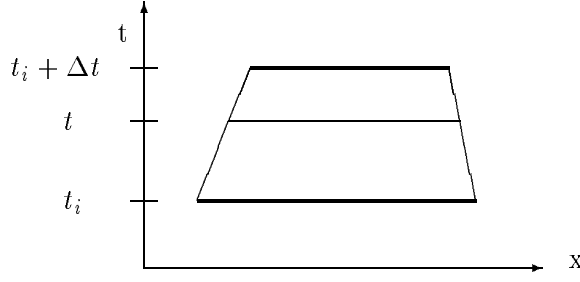
$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \int_{V_{t_i}} \boldsymbol{\tau}_{t_i} \delta(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV_{t_i} dt + \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \int_{V_{t_i}} \Delta \mathbf{S} \delta(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV_{t_i} dt + \\ & + \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \int_{V_{t_i}} \rho_{t_i} \ddot{\mathbf{u}}_t(t_i) \delta(\Delta \mathbf{u}) dV_{t_i} dt + \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \int_{V_{t_i}} \rho_{t_i} \Delta \mathbf{u} \delta(\Delta \mathbf{u}) dV_{t_i} dt = \\ & = \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} R(t) dt . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Całka podwójna  $\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \int_{V_{t_i}}$  może być zastąpiona w zapisie przez całkę po obszarze czasoprzestrzennym  $\Omega_i = \{\mathbf{x}, t : \mathbf{x} \in V_t, t_i \leq t \leq t_i + \Delta t\}$ . Przyrost odkształcenia  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  dzielony jest na część liniową  $\Delta \mathbf{e}$  i nieliniową  $\Delta \boldsymbol{\eta}$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta} . \quad (4.48)$$

Po uwzględnieniu (4.46) i (4.48) oraz po zaniedbaniu członów małych wyższego rzędu można scałkować (4.47) przez części

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\tau}_{t_i} \delta(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \mathbf{C}_{t_i} \Delta \mathbf{e} \delta(\Delta \mathbf{e}) d\Omega_i - \int_{\Omega_i} \rho_{t_i} \dot{\mathbf{u}}_t(t) \delta(\Delta \dot{\mathbf{u}}) d\Omega_i \\ & - \int_{\Omega_i} \rho_{t_i} \Delta \dot{\mathbf{u}} \delta(\Delta \dot{\mathbf{u}}) d\Omega_i = \mathbf{Q}_i - \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\tau}_{t_i} \delta(\Delta \boldsymbol{\eta}) d\Omega_i . \end{aligned} \quad (4.49)$$



Rys. 4.26: Nieprostokątny element czasoprzestrzenny (obiekt jednowymiarowy).

Wektor przemieszczeń węzłów czasoprzestrzennej warstwy  $i$  oznaczmy przez  $\mathbf{q}^i$ . Łączy on w sobie przemieszczenia w chwilach ograniczających warstwę  $i$  z góry i z dołu (rys. 4.26):

$$\mathbf{q}^i = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}^a \\ \mathbf{q}^p \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i+1} \end{array} \right\}. \quad (4.50)$$

Warstwę czasoprzestrzenną dyskretyzuje się elementami czasoprzestrzennymi  $\Omega_{e_j}$  tak, że wypełniają one całą warstwę  $i$

$$\Omega_i = \bigcup_{j=1}^{NE} \Omega_{e_j}, \quad \forall_{j,k \in [1, NE]} \Omega_{e_j} \cap \Omega_{e_k} = \mathbf{0}. \quad (4.51)$$

Przemieszczenia wewnątrz elementu są interpolowane z przemieszczeń węzłowych

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}^a \\ \mathbf{q}^p \end{array} \right\}. \quad (4.52)$$

Wówczas odkształcenia i naprężenia wyrażone są przez działanie operatorów różniczkowych:  $\mathcal{D}(x)$  – liniowego i  $\mathcal{D}_N$  – nieliniowego:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{e} = \mathcal{D}_N\mathbf{u}. \quad (4.53)$$

W efekcie równanie sił działających na warstwę czasoprzestrzenną  $i$  sprowadza się do postaci:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}_N\mathbf{N})^T \boldsymbol{\tau} \mathcal{D}_N\mathbf{N} d\Omega_i - \int_{\Omega_i} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega_i \right] \Delta \mathbf{q} = \\ & = \mathbf{F} - \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \hat{\boldsymbol{\tau}} d\Omega_i + \left[ \int_{\Omega_i} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega_i \right] \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Można to zapisać krócej następująco:

$$\left( \mathbf{K}_L^i + \mathbf{K}_{NL}^i + \mathbf{M}^i \right) \Delta \mathbf{q}^i = \Delta \mathbf{F} - \left( \mathbf{F}_N^i + \mathbf{M}^i \mathbf{q}^i - \mathbf{F}^i \right), \quad (4.55)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L^i &= \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \mathbf{C} \mathcal{D}\mathbf{N} \, d\Omega_i \\ \mathbf{K}_{NL}^i &= \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}_N \mathbf{N})^T \boldsymbol{\tau} \mathcal{D}_N \mathbf{N} \, d\Omega_i \\ \mathbf{M}^i &= - \int_{\Omega_i} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \, d\Omega_i \\ \mathbf{F}_N &= \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \hat{\boldsymbol{\tau}} \, d\Omega_i . \end{aligned} \quad (4.56)$$

Należy podkreślić, że wektor obciążeń  $\mathbf{F}$  w (4.54) zawiera składowe impulsów, o wymiarze [Ns]. Stąd macierze sztywności  $K_L$  i  $K_{NL}$  mają wymiar [Ns/m], a macierze mas wymiar [kg/s].

### 4.3.1 Algorytm krokowy

Krokowy algorytm rozwiązywania równania (4.55) można zapisać następująco:

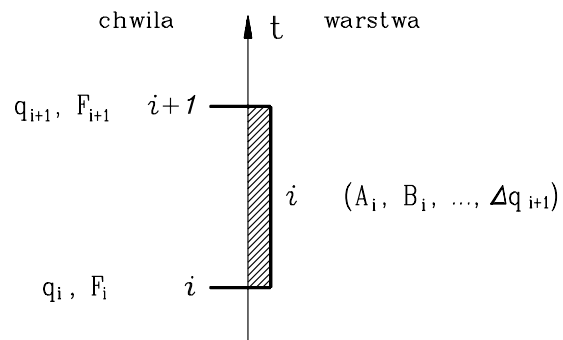
$$\mathbf{C}_{i-1} \Delta \mathbf{q}_{i-1} + (\mathbf{D}_{i-1} + \mathbf{A}_i) \Delta \mathbf{q}_i + \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{q}_{i+1} = \Delta \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^K - \mathbf{F}_i^M . \quad (4.57)$$

Indeks  $i$  oznacza numer kroku czasowego,  $\Delta \mathbf{q}_i$  jest wektorem przyrostów przemieszczeń w chwili  $t_i$ .  $\mathbf{F}_i^K$  akumuluje siły wewnętrzne, a  $\mathbf{F}_i^M$  – przyrosty sił węzłowych spowodowanych bezwładnością i tłumieniem. Wektory te opisano poniżej:

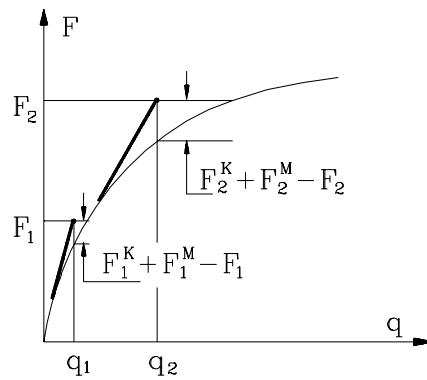
$$\mathbf{F}_i^K = \sum_{n=1}^i \left[ \mathbf{C}_{n-2}^K \Delta \mathbf{q}_{n-2} + (\mathbf{D}_{n-2}^K + \mathbf{A}_{n-1}^K) \Delta \mathbf{q}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1}^K \Delta \mathbf{q}_n \right], \quad (4.58)$$

$$\mathbf{F}_i^M = \sum_{n=1}^i \left[ \mathbf{C}_{n-2}^M \Delta \mathbf{q}_{n-2} + (\mathbf{D}_{n-2}^M + \mathbf{A}_{n-1}^M) \Delta \mathbf{q}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1}^M \Delta \mathbf{q}_n \right]. \quad (4.59)$$

Macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  są odpowiednimi ćwiartkami macierzy globalnej, odniesionymi do odpowiednich warstw czasoprzestrzennych (np. rys. 3.2). Rysunek 4.27 przedstawia warstwę czasową  $i$  ograniczoną przez chwile  $i$  i  $i+1$ , oraz wielkości określone bądź w warstwie czasowej, bądź w punktach czasu. Schemat rozwiązywania zadania w jednym kroku czasowym odbywa się jednoetapowo, to jest bez iteracyjnego doprowadzania do całkowitej równowagi sił na końcu kroku czasowego (rys. 4.28). Dopuszczono takie podejście,



Rys. 4.27: Schemat warstwy czasowej i wyznaczone w jej obrębie wielkości.



Rys. 4.28: Przyrostowe rozwiązanie równania nieliniowego z poprawką obciążenia  $F_i^K + F_i^M - F_i$ .

Tab. 4.2: Algorytm obliczeń w jednym kroku obliczeniowym.

Dane:  $\Delta \mathbf{q}_1$

Wartości początkowe:  $i = 0$ ,  $\mathbf{F}_i = 0$ ,  $\mathbf{F}_i^K = 0$ ,  $\mathbf{F}_i^M = 0$ ,  $\mathbf{q}_i = 0$

1.  $i := i + 1$ ,
2. Określić  $\Delta \mathbf{F}_i$ ,
3. Obliczyć  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$ ,  $\mathbf{D}_i$ , w chwili  $t_i$ ,
4. Wyznaczyć:

$$\mathbf{F}_i^K := \mathbf{F}_i^K + \mathbf{C}_{i-2}^K \Delta \mathbf{q}_{i-2} + (\mathbf{D}_{i-2}^K + \mathbf{A}_{i-1}^K) \Delta \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{B}_{i-1}^K \Delta \mathbf{q}_i$$

$$\mathbf{F}_i^M := \mathbf{F}_i^M + \mathbf{C}_{i-2}^M \Delta \mathbf{q}_{i-2} + (\mathbf{D}_{i-2}^M + \mathbf{A}_{i-1}^M) \Delta \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{B}_{i-1}^M \Delta \mathbf{q}_i$$

5. Rozwiązać ze względu na  $\Delta \mathbf{q}_i$ :

$$\mathbf{C}_{i-1} \Delta \mathbf{q}_{i-1} + (\mathbf{D}_{i-1} + \mathbf{A}_i) \Delta \mathbf{q}_i + \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{q}_{i+1} = \Delta \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^K - \mathbf{F}_i^M$$

6.  $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta \mathbf{q}_{i+1}$ ,  $\mathbf{F}_i := \mathbf{F}_i + \Delta \mathbf{F}_i$ .

Tab. 4.3: Algorytm procesu krokowego (wersja programowa).

1. Obliczenie wektora prawych stron, zawierającego tymczasowy wektor  $R$  oraz całkowity wektor sił  $\sum F$ 

$$F = R - \sum F$$
2.  $F := F - D_{i-1}q_i$
3. Odwzorowanie wektora sił na nową siatkę węzłów:
$$F \longrightarrow \hat{F}$$

$$q_i \longrightarrow \hat{q}_i$$

$$G \longrightarrow \hat{G}$$

$$\sum F \longrightarrow \sum \hat{F}$$
4. Obliczenie współczynników macierzy elementów i utworzenie macierzy globalnych  $A_i, B_i, C_i, D_i$ .
5. Obliczenie:
  - $\hat{F} := \hat{F} + A_i \hat{q}_i$
  - $B_i$  przechowane w  $S_B$
  - $R = -C_i \hat{q}_i$
  - $D_i$  przechowane w  $S_D$ .
6. Rozwiązanie układu równań:
$$B_i q_{i+1} = \hat{F}.$$
7. Obliczenie  $\Delta\sigma$ .
8. Dodanie składników do wektora sił  $\sum F$  i obliczenie tymczasowego wektora  $G$ :
$$\sum \hat{F} := \sum \hat{F} + G$$

$$\sum \hat{F} := \sum \hat{F} + A_i^M \hat{q}_i + B_i^M q_{i+1} + \int_V (\mathcal{D}N_i^i)^T \Delta\sigma dV$$

$$G = C_i^M \hat{q}_i + D_i^M q_{i+1} + \int_V (\mathcal{D}N_i^{i+1})^T \Delta\sigma dV.$$
9.  $i := i + 1$ ; powrót do 1.



gdyż przedziały czasowe wynikające z całkowania równania różniczkowego ruchu są bardzo małe w porównaniu z krokiem czasowym stosowanym zwykle w rozwiązywaniu zadań quasi–statycznych. Niezrównoważenia sił po pierwszym kroku iteracyjnym są wówczas małe. Korekta dokonywana jest w następnym kroku czasowym. W tablicy 4.2 usystematyzowano etapy algorytmu krokowego obliczeń zadania nieliniowego. Występujące symbole mają następującą interpretację:

- $i$  jest numerem warstwy czasowej i numerem kroku obliczeniowego.
- $\mathbf{F}_i$  jest wektorem aktualnego obciążenia zewnętrznego. Powstaje przez zsumowanie przyrostów obciążenia zewnętrznego  $\Delta \mathbf{F}_i$ .
- $\mathbf{F}_i^K$  jest wektorem sił wewnętrznych. Tworzony jest przez sumowanie po każdym kroku sił wewnętrznych, wyznaczanych z obliczanych przyrostów przemieszczeń.
- $\mathbf{F}_i^M$  jest wektorem sił bezwładności. Tworzony jest podobnie jak  $\mathbf{F}_i^K$ .
- Macierze  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$  i  $\mathbf{D}_i$  są podmacierzami globalnej macierzy współczynników warstwy  $i$ . Powstają w wyniku zsumowania  $\mathbf{K}_L^i$ ,  $\mathbf{K}_{NL}^i$  i  $\mathbf{M}^i$  (4.55), (4.56).
- Macierze  $\mathbf{A}_i^K$ ,  $\mathbf{B}_i^K$ ,  $\mathbf{C}_i^K$  i  $\mathbf{D}_i^K$  są odpowiednimi podmacierzami uwzględniającymi  $\mathbf{K}_L^i$  i  $\mathbf{K}_{NL}^i$  (4.56), a macierze  $\mathbf{A}_i^M$ ,  $\mathbf{B}_i^M$ ,  $\mathbf{C}_i^M$  i  $\mathbf{D}_i^M$  są podmacierzami uwzględniającymi  $\mathbf{M}^i$  (4.56).

Algorytm obliczeń opisany w tablicy 4.2 wymaga innego zorganizowania, kiedy chce się go zastosować w praktyce. Pojawia się konieczność ujęcia etapów uwzględniających nieliniowości materiałowe, geometryczne, zmianę siatki podziału, a w ślad za tym odwzorowania pól naprężeń i przemieszczeń, bardziej ekonomicznego gospodarowania pamięcią operacyjną itd. Taką użytkową wersję algorytmu przedstawia tablica 4.3.

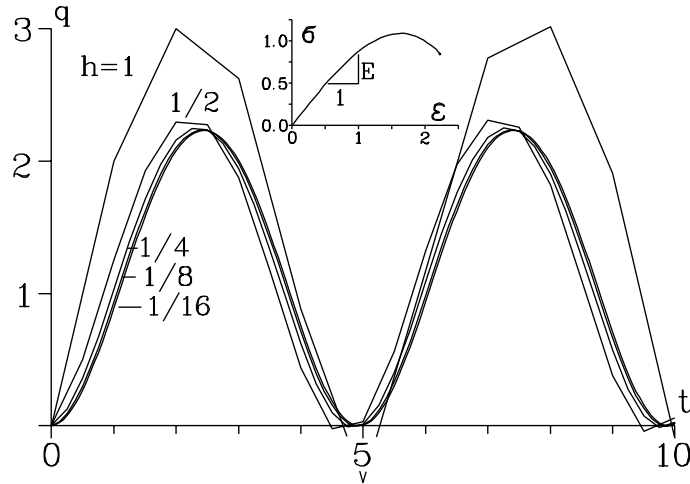
### Dokładność algorytmu

Wektor  $\mathbf{F}_i^K$  powstaje faktycznie w wyniku akumulacji naprężeń i budowy na ich podstawie wektora sił węzłowych.

Metodę numeryczną zadania nieliniowego można nazwać jako przyrostową z jednokrokową korektą Newtona–Raphsona. Wyznaczone rozwiązania nie są wprawdzie dokładne, ale nie mają rosnącego błędu, jak byłoby to w przypadku np. metody Eulera. Ponieważ stosowane kroki czasowe są małe, błędy takiego podejścia są również małe.

Badania dokładności dokonano analizując zachowanie się pojedynczego elementu skończonego pręta drgającego osiowo, modelowanego dwoma trójkątnymi elementami czasoprzestrzennymi. Przyjęto moduł sprężystości będący funkcją odkształcenia  $E = 1 - 1/8\epsilon^2$ .

Porównanie przemieszczeń w czasie przy różnych krokach czasowych, począwszy od największego ze względu na stabilność  $h_{max} = 1$ , przedstawia rys. 4.29.



Rys. 4.29: Dokładność algorytmu przyrostowego przy różnym kroku czasowym.

□

W rozdziale 4 wyprowadzono dynamiczne warunki kontaktu ciał odkształcalnych. Przyjęto warunki Signoriniego, które przekształcono do postaci całkowej (4.20). Określa ona zerowanie się pracy w przedziale  $[t_i, t_i + h]$  w przypadku kontaktu. Warunek (4.20) jest wygodny przy modelowaniu kontaktu w warstwie czasoprzestrzennej.

W zadaniach opisanych prędkościami przemieszczeń trudności sprawia nieciągłość składowej normalnej prędkości w chwili kontaktu (rys. 4.5). W takim przypadku, jeśli przyjmuje się małe kroki czasowe, można przyjąć przybliżenie ciągłą funkcją prędkości. Nie będzie wprawdzie zgodności pola prędkości z polem przemieszczeń, ale można dopuścić takie rozwiązanie, gdyż odstępstwo od dokładnych rozwiązań, mierzone energetycznie, jest niewielkie.

Nowym sposobem modelowania zadań w strefie kontaktu jest wprowadzenie dodatkowych węzłów w chwili początkowej i końcowej kontaktu (rys. 4.6). Wówczas całe przedziały czasu  $[t_{i-1}, t_c]$ ,  $[t_c, t_i]$ ,  $[t_j, t_f]$ ,  $[t_f, t_{j+1}]$  mają jeden, określony stan ograniczeń kontaktowych: ograniczenia aktywne lub nieaktywne. Upraszcza to np. uwzględnienie prawa tarcia. W literaturze można spotkać prace, w których krok czasowy ulega skróceniu w ca-

łej lub wybranej części układu. Odbywa się to przez zastosowanie metody o zmiennym kroku całkowania równań różniczkowych. Skrócenie kroków poprawia w takim przypadku dokładność określania stref kontaktu, lecz precyzyjne dopasowanie serii kroków czasowych do chwili rozpoczęcia i zakończenia kontaktu jest trudne w praktycznej realizacji. W odróżnieniu od tego, prezentowane w niniejszej pracy podejście pozwala ustalić położenie dodatkowych węzłów w czasie w sposób dokładny. Należy podkreślić, że do uzyskania rozwiązania w danej warstwie czasoprzestrzennej opisaną w pracy metodą można z powodzeniem wykorzystać istniejące, klasyczne procedury metody elementów skończonych, budowania macierzy struktury i rozwiązywania układu równań.

Druga propozycja przedstawiona w pracy dotyczy sposobu modyfikacji prędkości w chwili poprzedzającej kontakt, tak aby zarówno prędkości jak i przemieszczenia były opisane funkcjami ciągłymi. Wymaga się przy tym, aby przemieszczenia konsekwentnie wynikały z prędkości. Wspomniana modyfikacja polega na odpowiednim wyhamowaniu ruchu punktu tuż przed jego zetknięciem się z przeszkodą. Wytracona energia oddawana jest w chwili odrywania się punktu od przeszkody.

Oba zaproponowane podejścia ułatwiają nie tylko numeryczną realizację kontaktu, ale także poprawiają dokładność dyskretnych rozwiązań. Zamieszczone przykłady numeryczne pozwalają prześledzić zachowanie się układu w wybranych sytuacjach. Okazuje się, że w zadaniach opisujących zderzenia nie jest łatwo wyeliminować efekty pożyteczne, związane z zastąpieniem układu ciągłego dyskretnym. Najczęściej w praktyce usuwa się drgania o wyższej częstotliwości przez dodanie tłumienia (np. rys 2.10). Może okazać się to niewystarczające. Jak pokazuje rys. 4.11 duże tłumienie, w przypadku podziału na niewielką liczbę elementów przestrzennych, nie wygładza dostatecznie wyników wykresów przemieszczeń. Zaproponowana metoda hamowania ruchu punktu przed zderzeniem łagodzi efekt wstrząsu w chwili kontaktu.

Modelowanie czasoprzestrzenne kontaktu zastosowano do analizy przyczyn powstawania korugacji kół kolejowych przy dużych prędkościach toczenia. Wykazano, że nierówności powstają na skutek efektów falowych, kiedy kontakt pomiędzy kołem i szyną nie jest punktowy, a ma miejsce na dłuższym odcinku. Uzyskany w pracy obraz zużycia kół kolejowych jest pierwszym skutecznym wynikiem modelowania zjawiska korugacji, nie opisanym dotąd przez badaczy w literaturze.

Prędkościowy opis zastosowano także skutecznie w symulacji odbicia elastycznego okręgu, wzmocnionego cięgnami. W tym, oraz w poprzednio przytoczonych obliczeniach zadań o wielu węzłach zlokalizowanych w strefie kontaktu, nie zaobserwowano braku zbieżności procesu na skutek przemiennej wchodzenia węzła w kontakt i odrywania się (tzw.

migotania). W przypadku koła kolejowego liczba węzłów w strefie kontaktu wahała się od 4 do 8. W przypadku elastycznej obręczy dochodziła do 10, a w zadaniu dynamicznego zgniatania cylindra (rys. 2.24) nawet do 100. We wszystkich przypadkach zbieżność osiągnano bardzo szybko.

## Rozdział 5

# Adaptacja siatki

Zanim przejdziemy do opisu metod pozwalających na skuteczną adaptację przestrzennej siatki podziału (dyskretyzacji), spróbujemy zastanowić się, jakie czynniki skłaniają do ponoszenia tego dodatkowego trudu obliczeniowego. Zadania dynamiki wskutek dyskretyzacji procesu w czasie stają się w istocie ciągiem wielu następujących po sobie zadań statyki. Wybór najkorzystniejszych parametrów obliczeń początkowej fazy procesu staje się nieaktualny na dalszym etapie obliczeń. Takie czynniki jak np. przemieszczające się obciążenie, rozwój stref plastycznych, przemieszczające się strefy kontaktu nakładają konieczność aktualizowania tych parametrów.

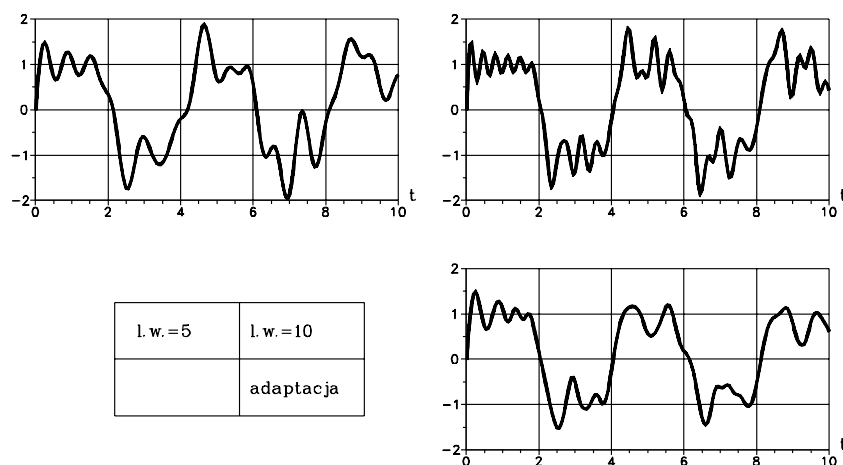
Można napotkać wiele prac na temat adaptacji siatki dyskretyzacji przestrzennej. Głównym celem, jaki stawiają sobie badacze, jest zmniejszenie błędu dyskretyzacji poprzez odpowiedni dobór wymiarów siatki w pewnych strefach. Pierwsza grupa prac to teoretyczne oszacowania błędu dyskretyzacji w odniesieniu do znanego rozwiązania ścisłego [9, 63]. W praktyce, gdy rozwiązanie ścisłe nie jest znane, oszacowania trzeba dokonać na podstawie znanego charakteru rozwiązania danego równania różniczkowego. Dokonuje się tego znając jedynie rozwiązanie przybliżone [177, 173, 178, 158, 174, 176]. Można poprawić siatkę i ponownie przeanalizować rozwiązanie. W przypadku zadań statyki konstrukcji technika taka jest skuteczna, gdyż dodatkowy nakład pracy nie jest duży. Nieco inaczej ma się sytuacja w przypadku zadań typu parabolicznego (transport ciepła itp.), z pierwszą pochodną względem czasu [51, 52, 74, 125, 1, 156]. Są to zadania przedstawiające ewolucję procesu w czasie. Jeśli na danym etapie obliczeń zachodzi konieczność zmiany siatki, należy przenieść do nowej już bazy wszystkie zmienne zadania. Jest to możliwe, ponieważ ze względu na własności tej grupy problemów, a konkretnie ze względu na dużą relaksację rozwiązania, wszelkie zaburzenia wprowadzane zmianą siatki przenoszą się do

następnych kroków z malejącą amplitudą. Tu można wymienić prace na temat tzw. ruchomych elementów skończonych [36, 12, 93, 170]. W tej grupie zadań najczęściej stosowane są metody różnicowe. W pracy [140] czasowy krok obliczeniowy składa się z dwóch kroków obliczeniowych: przesunięcia Lagrange'a (wymagającego rozwiązania sztywnego równania różniczkowego), a następnie etapu redystrybucji siatki. Węzły nie zawsze przesuwa się do rejonów o dużych gradientach rozwiązania i druga faza obliczeń ma za zadanie usunąć ten mankament. Praca [66] proponuje wygładzanie ruchu węzłów zarówno w kierunku  $x$  jak i  $t$ . Pierwsze zapobiega zbieganiu się lub zbyt niemu oddalaniu węzłów. Drugie zapobiega zbyt szybkiej odpowiedzi punktów na gradienty bieżącego rozwiązania, gdyż geometria węzłów dana jest w sposób niejawni. W często cytowanych pracach [129, 128] stosowana jest metoda elementów skończonych, a ruch węzłów regularyzowany jest funkcją kary.

Najtrudniej jest w przypadku zadań hiperbolicznych drugiego rzędu (drgania konstrukcji). Próby nieciągłej zmiany siatki podjęto w pracach [87, 90]. Nie uzyskano jednak skutecznych sposobów rozwiązywania praktycznych zadań. Jeszcze inną grupę stanowią prace [94, 163, 171, 172]. Wykorzystano w nich oszacowania błędu  $a$ -posteriori, opracowane w zadaniach statyki.

W zagadnieniach drgań konstrukcji zaburzenia propagują się ze stałą amplitudą. Jakkolwiek zmiana parametrów zadania (np. liczby elementów skończonych, ich wielkości, rozmieszczenia węzłów) powoduje, że mamy do czynienia już ze zmienionym zadaniem fizycznym. Zwykła zmiana siatki jest w istocie przejściem w sposób nieciągły od jednego zadania do drugiego. Przeniesienie do nowego zadania przemieszczeń, prędkości czy przyspieszeń z zadania poprzedniego wprowadza uderzenie we wszystkich węzłach, którym przypisano zmodyfikowane (np. wyinterpolowane) wartości funkcji zadania poprzedniego. W praktyce dalsze rozwiązanie zaczyna odbiegać nie tylko wartościami liczbowymi ale często jakościowo różni się od oczekiwanego. Gdy procesy wolnozmiennie znacząco dominują nad procesami falowymi, opisana sytuacja występuje w nieco mniejszym zakresie i w krótkim czasie obserwacji może nie zostać dostrzeżona (co nie znaczy, że taka metodologia adaptacji jest poprawna). Mimo to w niektórych pracach dotyczących zastosowań  $h$ -adaptacji w dynamice można taką technikę napotkać (np. [163, 171, 172]). Rys. 5.1 pokazuje drgania pręta zamocowanego w lewym końcu, przy podziale na 5 i 10 elementów przestrzennych, oraz z  $h$ -adaptacją, polegającą na cyklicznej zamianie siatek 5 i 10 węzłowej. Zamian dokonywano co 20 kroków ( $\epsilon = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $L = 1$ ,  $\Delta t = 0,05$ ). Wymuszenie drgań następowało przez nadanie prędkości początkowej skrajnemu swobodnemu węzłowi. Obliczeń dokonano całkując równanie różniczkowe metodą trapezów. Interpolo-

wano wykorzystywane w procedurze wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Jak



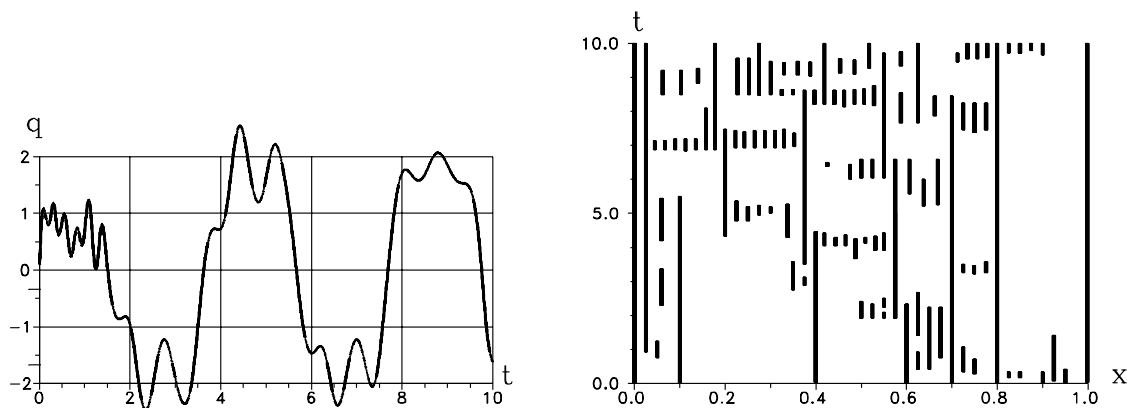
Rys. 5.1: Drgania swobodne pręta modelowanego siatką 5 i 10 węzłową, oraz przy adaptacji (przemieszczenia w czasie swobodnego końca).

widać z rysunku, wynikowy wykres przemieszczeń wygląda raczej poprawnie. Tłumienie, sztuczne (numeryczne) lub fizyczne, wygładza nieco wykres i usuwa drgania pasożytnicze we wszystkich trzech przypadkach. Pewne zastrzeżenia można mieć do zmniejszenia się przemieszczeń. Ścisła wartość powinna wynosić  $\pm 1$ . W przypadku adaptacji dostrzec można stopniowe odchodzenie od tych wartości.

Jednak już modyfikacja siatki prowadzona w nieco mniej regularny sposób daje wynik odbiegający znacznie od oczekiwanego (rys. 5.2). W takim przypadku cała idea adaptacyjnej poprawy dokładności rozwiązania staje się chybiona. Musi więc być zastosowana inna technika niż wzmiankowane dotąd w literaturze.

W zadaniach hiperbolicznych pierwszego rzędu udaje się sprowadzić problem do zadania eliptycznego drugiego rzędu [138, 7]. Warstwę czasoprzestrzenną dyskretyzując się wówczas w dowolny sposób a następnie rozwiązuje zadanie jak zadanie statyczne. Niestety, techniki tej, ze względu na warunki brzegowe, nie da się zastosować do równania drugiego rzędu.

Własności ciągłej w czasie aproksymacji dają kolejne, nowe możliwości podejścia do problemu. Uzyskano pewne obiecujące rozwiązania drgań podłużnych pręta z ograniczoną adaptacją siatki w czasie ( $r$ -adaptacja). Oszacowano parametry ograniczające prędkość adaptacji. Pokazano przykłady zastosowania w obliczeniach zadania kontaktowego. Pod-



Rys. 5.2: Rozbieżność drgań swobodnych pręta przy zastosowaniu interpolacji w  $h$ -adaptacji: przemieszczenia oraz lokalizacja węzłów siatki.

jęto też próbę nieciągłego przejścia do nowej siatki podziału przez dobór warunków początkowych etapu po modyfikacji.

## 5.1 Błędy w rozwiązaniach przybliżonych

W celu uporządkowania terminologii wydzielimy podstawowe źródła błędów, pojawiające się w poszczególnych fazach obliczeń. Są to:

- błąd modelowania — różnica pomiędzy ustrojem fizycznym a jego modelem matematycznym;
- błąd dyskretyzacji — błąd powstały w wyniku zastąpienia nieskończenie wielu stopni swobody ciągłego modelu matematycznego przez skończoną liczbę stopni swobody jego dyskretnego odpowiednika;
- błąd zaokrążeń — powodowany przez reprezentację liczb rzeczywistych skończoną liczbą cyfr;
- błąd dziedziczny — na danym etapie obliczeń jest sumą błędów dyskretyzacji i zaokrążeń;
- błąd operacji — błąd zaokrążeń wprowadzony przez algorytm.

Niektóre źródła błędów w niektórych przypadkach mogą być łatwo usunięte. Np. błąd zaokrążeń i błąd operacji można pomniejszyć przez przeskalowanie danych wprowadza-



nych do obliczeń. Przykładowo zmiana układu miar z [kg, m, s] na [cm, g,  $\mu$ s] powoduje, że parametry materiałowe, prędkości, naprężenia mają rząd wielkości zbliżony.

### Przyczyny złego uwarunkowania zadania

Układ elementów skończonych prowadzi do źle uwarunkowanych układów równań jeśli element lub grupa elementów otrzymuje duże przemieszczenie bryły sztywnej przy małej deformacji. Przykładami mogą być [58]:

- inkluzje o dużych modułach,
- elementy skończone np. płyty, które umożliwiają poprzeczne odkształcenie tnące, lecz mają duże sztywności na ścinanie,
- elementy o dużym skrzywieniu lub wydłużeniu kształtu,
- pewne rodzaje sztywnych podpór.

Można w powyższych przypadkach uniknąć trudności przez zmianę modelu. Należy więc odpowiednio:

- dokonać usztywnienia inkluzji przez nałożenie więzów,
- użyć elementu płyty cienkiej lub zmniejszyć sztywność na ścinanie,
- przemodelować siatkę, stosując bardziej regularne kształty elementów,
- użyć inaczej ukierunkowanych stopni swobody.

Złe uwarunkowanie macierzy sztywności może też być spowodowane przez mieszanie elementów o różnych rozmiarach lub przez użycie drobnej siatki. Stwierdzono, że zależność liczby uwarunkowania macierzy  $\mathbf{K}$  od wymiarów siatki wyraża się następująco [71]:

$$C(\mathbf{K}) = b \left( \frac{h_{max}}{h_{min}} \right)^{2m-1} N^{2m} \quad (5.1)$$

gdzie:

- $b$  — dodatnia stała, niezależna od  $h_{max}$  i  $h_{min}$ ,
- $h_{max}$  i  $h_{min}$  — najmniejsza i największa odległość między węzłami w siatce,
- $N$  — liczba elementów,
- $2m$  — rząd równania różniczkowego,
- $n$  — wymiarowość<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Na przykład pręt osiowo obciążony ma  $2m/n = 2/1$ , belka:  $2m/n = 4/1$ , płaski stan odkształcenia:  $2m/n = 2/2$ , cienka płyta zginana:  $2m/n = 4/2$ , ciało trójwymiarowe:  $2m/n = 2/3$ , powłoka cienka:  $2m/n = 4/3$ . W przypadku belki zginanej, gdy stosunek  $h_{max}/h_{min}$  zmienia się z 1/1 na 10/1,  $C(\mathbf{K})$  zwiększa się 1000 razy. Jeśli podwaja się liczbę elementów  $C(\mathbf{K})$  wzrasta 16 razy. Przy obydwu zmianach jednocześnie  $C(\mathbf{K})$  wzrasta ok. 16 000 razy. Wówczas dokładność niektórych wartości wynikowych może spaść o ok. 4 cyfry znaczące.

Metody obliczeniowe oparte na dyskretyzacji równań różniczkowych i obszaru, w którym proces jest badany prowadzą zwykle do układów równań algebraicznych. W przypadku dużych układów, o kilkunastu lub kilkudziesięciu tysiącach równań błędy operacji mogą mieć duży wpływ na ostateczne wyniki. Pewnym wskaźnikiem wielkości tych błędów, miarą numeryczną uwarunkowania macierzy współczynników układu równań jest liczba uwarunkowania macierzy  $C(\mathbf{K})$ . Duża wartość liczby uwarunkowania stanowi ostrzeżenia przed możliwością pojawienia się znacznego błędu.

Spektralna liczba uwarunkowania macierzy  $\mathbf{K}$  określana jest jako

$$C(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \quad (5.2)$$

gdzie  $\lambda_{max}$  i  $\lambda_{min}$  są największą i najmniejszą wartością własną  $\mathbf{K}$ . Można wykazać, że przy każdej potędze 10 w stosunku  $\lambda_{max}/\lambda_{min}$  proces rozwiązania układu równań gubi ok. jedną cyfrę dokładności w postaci przemieszczenia odpowiadającej  $\lambda_{min}$ . W bezpośrednich metodach rozwiązywania układu równań (np. eliminacja Gaussa) trudności mogą pojawić się pod koniec procesu eliminacji wprzód, kiedy to obliczane są różnice liczb bliskich sobie co do wartości. Błąd propaguje się w fazie podstawień powrotnych.

Mając do czynienia z czasoprzestrzennymi elementami symplektycznymi oraz z macierzą trójkątną współczynników układu równań łatwo jest wyznaczyć liczbę uwarunkowania

$$C(\mathbf{K}) = \frac{\max_i a_{ii}}{\min_i a_{ii}} \quad (5.3)$$

W takim przypadku dokładność obliczeń zapewniają bliskie sobie elementy diagonalne<sup>2</sup>.

### Błąd dyskretyzacji

W procesie dyskretyzacji ciągły model matematyczny opisuje się elementami skończonymi. Wybiera się liczbę, typ i kształt elementów, zagęszczenie siatki, rozkład obciążenia ciągłego na węzły oraz opisuje warunki podparcia. Wprowadzone w ten sposób przybliżenie stanowi błąd dyskretyzacji. W dalszej części analizowany będzie jedynie ten rodzaj błędu, określający w praktyce różnicę między modelem dyskretnym a fizycznym. Ten ostatni przyjmuje się tu jako dokładny.

Podstawowym wymaganiem jakie zawsze należy spełnić jest dopasowanie siatki dyskretnego modelu do kształtu obiektu fizycznego. Przy tym linia łamana konturu siatki

---

<sup>2</sup>Przez elementy bliskie sobie należy tu rozumieć liczby różniące się od siebie co najwyżej o 2–3 rzędy wielkości.

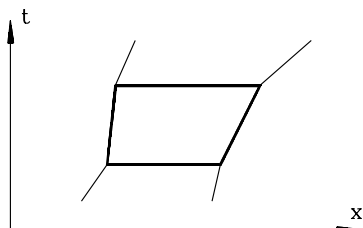
podziału nie powinna ani być wpisana w kontur obszaru fizycznego, ani go opisywać. Powinna nakładać się na niego.

Pomimo że uczyniono duży postęp w oszacowaniach błędów dyskretyzacji i rozwoju technik adaptacyjnych, wykorzystujących te oszacowania, to jednak ciągle dąży się do znalezienia wygodnego, skutecznego i niedrogo kryterium. Obecnie istnieją 3 główne grupy kryteriów oszacowania błędu:

- 1) residualne – polegające na szacowaniu residuum [8, 10, 9];
- 2) poobliczeniowe (*a posteriori*) – uzyskiwane na podstawie wyższego rzędu rozwiązania M.E.S. Może być ono otrzymywane przy zastosowaniu różnorodnych technik rzutowania (np. wygładzanie rozwiązania nieciągłego przez uśrednianie). Dowód zbieżności pewnej techniki tego typu przedstawiono w pracy [2]. Główną zaletą poobliczeniowego oszacowania błędu jest, poza oszacowaniem globalnym, możliwość określenia wielkości błędu w poszczególnych elementach. Łatwe jest też wówczas sporządzenie mapy błędu oraz otrzymanie informacji o błędzie w danym punkcie. Można wykazać związek kryterium residualnego i poobliczeniowego [177];
- 3) interpolacyjne – oparte na oszacowaniu *a priori* interpolacji [63, 64]. Ogólnie oszacowanie to daje mało wiarygodne wyniki lecz jest wygodne w użyciu jako wskaźnik błędu.

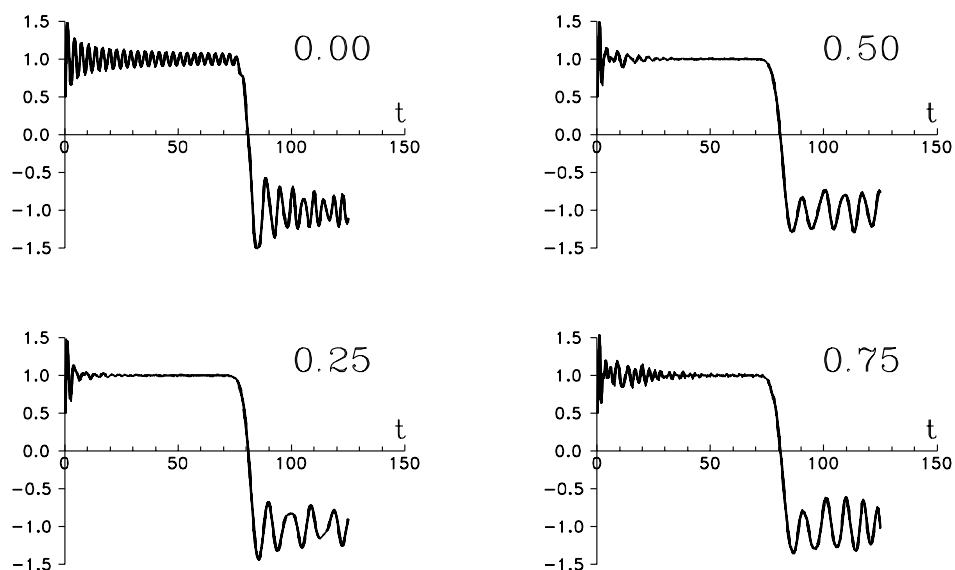
## 5.2 R-adaptacja

Zaletą metody elementów czasoprzestrzennych jest możliwość modyfikacji siatki podziału przestrzennego w trakcie procesu (stosowanie niestacjonarnego podziału konstrukcji). Dokonuje się tego bądź w celu dostosowania kształtu siatki i położenia węzłów do potrzeb modelowania zadania bądź w celu minimalizacji błędu aproksymacji. Jak wspomniano już we wstępie do rozdziału, zmiana siatki w trakcie całkowania równania różniczkowego w czasie jest trudna. Powstają bowiem i propagują się zaburzenia wywołane właśnie zmianą siatki. Zaburzenia te nie mogą przesłaniać uzyskiwanych korzyści. Spróbujmy zbadać prostą modyfikację siatki jednowymiarowej w przestrzeni rzeczywistej (jak np. na rys. 5.3). Funkcje interpolujące  $\mathbf{N}$  (1.1) czy (2.11) opisane są teraz nie na prostokącie  $\{x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$ , a na czworokącie. Dalsza część postępowania jest podobna jak w najprostszych zadaniach o regularnej siatce. Kompletuje się czasoprzestrzenne macierze struktury i rozwiązuje krokowo układy równań, znajdując przemieszczenia w kolejnych chwilach. Węzły przesuwa się zależnie od potrzeb, zagęszczając lub rozrzedzając lokalnie siatkę. Uwidacznia to następujący przykład. Pręt drgający osiowo, z zamocowanym



Rys. 5.3: Przykład modyfikacji siatki konstrukcji jednowymiarowej.

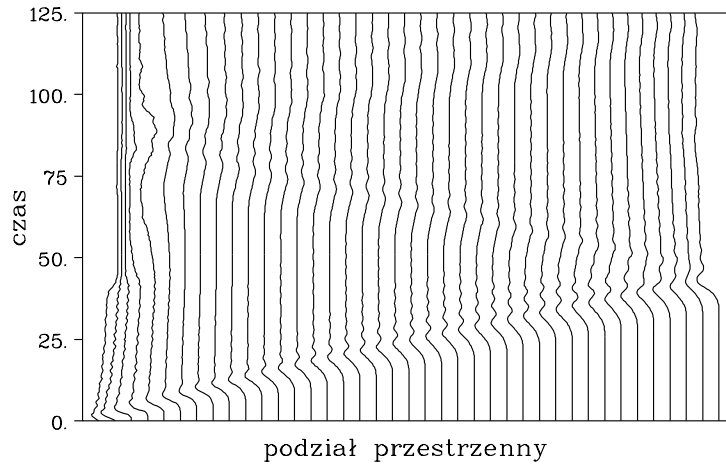
lewym końcem, podzielono na 40 elementów przestrzennych. Prawy, swobodny koniec obciążono siłą stałą. Z uwagi na oszacowanie błędu umożliwiono zmiany położenia węzłów z maksymalną prędkością tej zmiany wynoszącą 0,25, 0,50 i 0,75  $b_{sr}/h$  (średnia długość elementu przestrzennego  $b_{sr}$  do kroku czasowego  $h$ ). Obserwowano przemieszczenia w czasie obciążonego końca pręta (rys. 5.4). Ścisłym rozwiązaniem jest prostoliniowy kształt prostokątny. W pokazanym przykładzie adaptacja siatki usuwa wyższe częstotliwości drgań,



Rys. 5.4: Przemieszczenia końca pręta przy współczynniku adaptacji: 0,0, 0,25, 0,50 i 0,75.

powstałe w wyniku odbić fali od węzłów siatki.

Obserwację położenia węzłów siatki ukazuje rys. 5.5. Można zauważyć, że węzły najpierw przemieszczają się w kierunku czoła fali, a następnie, po jego przejściu, podążają za nim.



Rys. 5.5: Przemieszczenia węzłów w czasie będące wynikiem adaptacji.

### 5.2.1 Analiza stabilności

Równanie różniczkowe ruchu drugiego rzędu można sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego. Analiza stabilności opiera się na założeniu, że metoda numeryczna całkowania tego równania nie może przenosić błędu z kroku na krok ze wzrastającą amplitudą. Poniżej przytoczymy kilka kryteriów stosowanych przy szacowaniu stabilności.

Najczęściej stosowanym kryterium stabilności schematów różnicowych jest warunek konieczny Neumanna. Sprowadza się on do faktu, że pierwiastki równania charakterystycznego metody nie mogą być, co do modułu, większe od jedności. Przy tym pierwiastki o module równym jeden muszą być pojedyncze. W tym przypadku wartości własne  $\lambda_i$  macierzy przejścia  $\mathbf{T}$  (lub inaczej: macierzy wzmocnienia) muszą zawierać się w kole jednostkowym

$$|\lambda_i| \leq 1. \quad (5.4)$$

Warunek ten jest wystarczającym warunkiem stabilności, jeśli macierz przejścia jest macierzą normalną<sup>3</sup>.

Poniżej podane zostaną warunki dostateczne stabilności schematu różnicowego.

- Warunkiem wystarczającym stabilności jest spełnienie warunku Neumanna i diagonalizowalność macierzy  $\mathbf{T}$ :  $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{H} = \mathbf{A}$ .  $\mathbf{A}$  jest macierzą diagonalną oraz  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{H}^{-1}$  są ograniczone niezależnie od dostatecznie małego  $h$ . Wówczas  $\mathbf{T}^n = \mathbf{H}\mathbf{A}^n\mathbf{H}^{-1}$ .

<sup>3</sup>Są to stosunkowo rzadkie przypadki.

Wektory własne zawarte w macierzy  $\mathbf{H}$  można znormalizować i wówczas  $\|\mathbf{T}\|$  jest ograniczona przez  $p$ , ponieważ norma macierzy o wymiarze  $p \times p$  nie przekracza  $p$  razy moduł największego elementu.

- Dalej, jeśli  $\mathbf{T}$  ma pełen układ wektorów własnych i istnieje stała  $\delta$  taka, że  $\Delta \geq \delta > 0$ , gdzie jest  $\Delta^2$  jest wyznacznikiem  $\mathbf{H}^*\mathbf{H}$ , tj. wyznacznikiem Grama znormalizowanych wektorów własnych, wówczas warunek Neumanna jest warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności.
- Jeśli macierz  $\mathbf{T}$  jest ograniczona przy  $0 < h < \tau$  w  $\mathcal{L}$  i jeśli wszystkie, za wyjątkiem co najwyżej jednej, wartości własne leżą w kole zawartym w kole jednostkowym

$$|\lambda_i| \leq \gamma < 1, \quad i = 2, \dots, p, \quad (5.5)$$

to warunek Neumanna jest konieczny i wystarczający.

- Warunek Laxa–Wendroffa. Jeśli  $\mathbf{T}$  spełnia warunek

$$|\mathbf{v}^*\mathbf{T}\mathbf{v}| \leq [1 + \mathcal{O}(h)]|\mathbf{v}|^2 \quad \text{dla dowolnego wektora } \mathbf{v}, \quad (5.6)$$

to odpowiedni schemat różnicowy jest stabilny.

Szerzej zagadnienie stabilności schematów różnicowych przedstawiono w pracach [155, 119]. Tam też można znaleźć dowody przedstawionych wyżej kryteriów. W analizie wykorzystywać będziemy kryterium Neumanna stowarzyszone z warunkami ograniczoności macierzy wektorów własnych.

Trzeba tu mocno podkreślić, że pomimo różnic w sformułowaniu przemieszczeniowym i prędkościowym, w końcowej fazie uzyskuje się schematy różnicowe. Formułę prędkościową (np. 2.71)

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{i+1} \\ \mathbf{x}_{i+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_v \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{x}_i \end{Bmatrix} + \mathbf{b}_v \quad (5.7)$$

można zastąpić formułą przemieszczeniową

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \mathbf{x}_i \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_x \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i-1} \end{Bmatrix} + \mathbf{b}_x, \quad (5.8)$$

i odwrotnie. Przykładem tego może być tabela 2.2, w której przedstawiono różne, prędkościowe i przemieszczeniowe schematy obliczeniowe w jednolitej formie przemieszczeniowej.

Schemat procesu krokowego rozwiązania można zatem zapisać następująco (por. (2.26) i [30, 17]):

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{B}\mathbf{q}_i + \mathbf{C}\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{F}_i. \quad (5.9)$$

Taki trójwarstwowy schemat można przedstawić w formie dwuwarstwowej:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{i+1} \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i-1} \end{Bmatrix}, \quad (5.10)$$

albo krócej

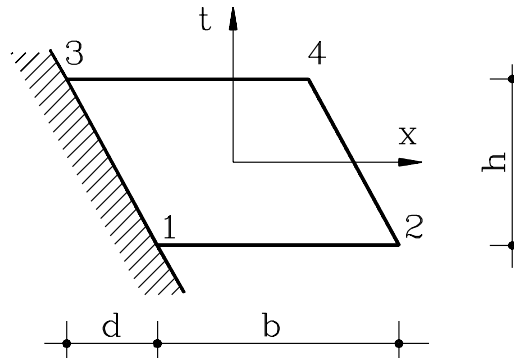
$$\mathbf{q}^{II} = \mathbf{T} \mathbf{q}^I. \quad (5.11)$$

W dalszej części przeanalizowana zostanie stabilność wybranych przypadków siatki niestacjonarnej.

### Stabilność ukośnych elementów czworokątnych pręta drgającego osiowo

Zachodzi pytanie, jak bardzo można modyfikować siatkę elementów trójkątnych i czworokątnych w przypadku pręta drgającego osiowo lub struny.

Rozważmy element równoległoboczny jak na rys. 5.6. Wykorzystujemy rzeczywiste



Rys. 5.6: Skośny czworokątny element pręta

funkcje kształtu

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \tau \tau_i) \quad (5.12)$$

oraz wirtualne funkcje kształtu

$$\hat{N}_i = \frac{1}{2}(1 + \xi \xi_i) \left[ \frac{1}{2}(1 + \tau \tau_i) + \alpha \tau_i (\tau^3 - \tau) \right]. \quad (5.13)$$

Elementy macierzy sztywności  $K_{ij}$  wyraża zależność

$$\frac{1}{EA} K_{ij} = \frac{h}{4b} \xi_i \xi_j \left( 1 + \frac{5 - 4\alpha}{15} \tau_i \tau_j \right), \quad (5.14)$$

a macierzy bezwładności  $M_{ij}$  związek

$$\frac{1}{\rho A} M_{ij} = -\frac{d}{4h} (\xi_i \tau_j + \tau_i \xi_j) - \frac{\xi_i \xi_j d^2}{4bh} - \frac{\tau_i \tau_j b}{4h} - \frac{\xi_i \xi_j \tau_i \tau_j}{180bh} (15b^2 + 15d^2 - 12\alpha d^2) . \quad (5.15)$$

Przy zamocowaniu węzłów 1 i 3 otrzymuje się układ o jednym stopniu swobody, z macierzą sztywności w postaci

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} , \quad (5.16)$$

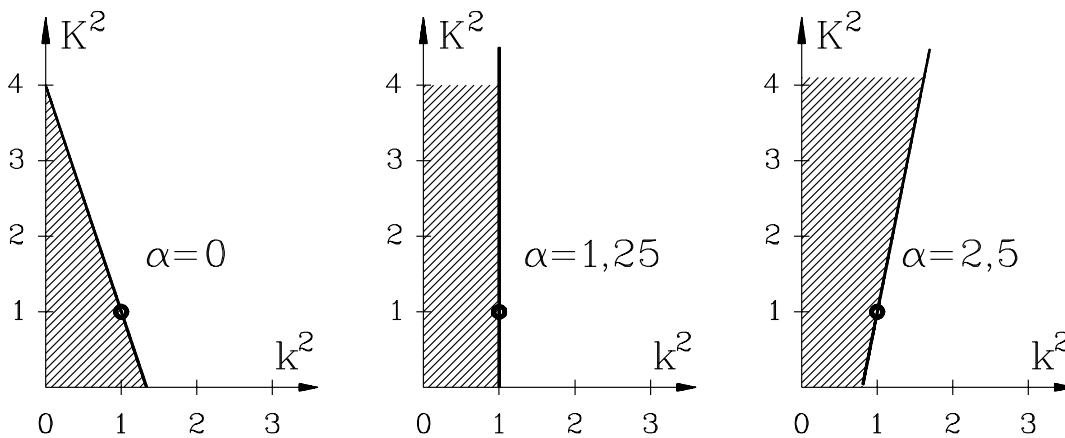
gdzie:

$$\begin{aligned} K_{11}^* &= \frac{EAh}{15b} (5 - \alpha) - \frac{(b^2 + d^2)\rho A}{3bh} + \frac{\rho Ad}{2h} + \frac{\rho A \alpha d^2}{15bh} \\ K_{12}^* &= \frac{EAh}{30b} (5 + 2\alpha) + \frac{\rho Ab}{3h} - \frac{\rho Ad^2}{30bh} (5 + 2\alpha) \\ K_{21}^* &= \frac{EAh}{30b} (5 + 2\alpha) + \frac{\rho Ab}{3h} - \frac{\rho Ad^2}{30bh} (5 + 2\alpha) \\ K_{22}^* &= \frac{EAh}{15b} (5 - \alpha) - \frac{(b^2 + d^2)\rho A}{3bh} - \frac{\rho Ad}{2h} + \frac{\rho A \alpha d^2}{15bh} . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Macierz przeniesienia przy warunku (5.4) prowadzi do nierówności

$$-1 \leq \frac{2K^2(5 - \alpha) - 10(1 - k^2) + 2\alpha k^2}{(K^2 - k^2)(5 + 2\alpha) + 10} \leq 1 , \quad (5.18)$$

gdzie:  $K = ch/b$ ,  $k = d/b$ . Rysunek 5.7 przedstawia nierówności (5.18) przy różnych



Rys. 5.7: Obszary stabilności przy różnych współczynnikach  $\alpha$ .





Wprowadźmy bezwymiarowe parametry  $s$  i  $k$ :

$$s = \frac{d}{ch}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (5.22)$$

$$k = \frac{d}{b}, \quad 0 \leq k \leq 2. \quad (5.23)$$

Obszar stabilności w układzie  $k, s$  ograniczony jest nierównością

$$\left(3 - \frac{3k}{\ln \frac{2+k}{2-k}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq s \leq \sqrt{3}. \quad (5.24)$$

Nierówność tę pokazuje rys. 5.8. Tangens nachylenia prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych  $(k, s)$  określony jest wartością

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{ch}. \quad (5.25)$$

Proste, w układzie  $(k, s)$  przechodzące przez początek układu współrzędnych i odpowiednio w układzie  $(K, k)$  o stałej rzędnej, określają punkty obszaru stabilności zadania przy różnych wartościach  $h$ . W układzie  $(s, k)$  rosnące nachylenie odpowiada malejącemu  $h$ . Można zauważyć, że pełny zakres stabilności przy parametrze  $k$  otrzymuje się, kiedy

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.26)$$

Zachodzi to, kiedy krok czasowy  $h$  jest równy

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{c}. \quad (5.27)$$

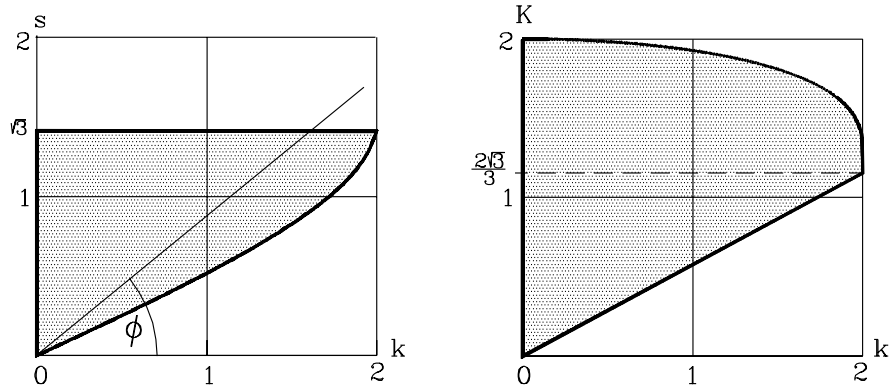
Graniczny krok czasowy  $h_{cr}$  można wyznaczyć z (5.24)

$$\frac{ds}{dk}|_{k=0} = \frac{1}{2}. \quad (5.28)$$

To z kolei prowadzi do warunku

$$h \leq \frac{2b}{c}. \quad (5.29)$$

Rys. 5.8 pokazuje obszar stabilności przy liniowych funkcjach wirtualnych. Jeśli zmodyfikuje się je członem sześciennym, wówczas obszar stabilności nieco się poszerza (rys. 5.9). Nie uzyskuje się wydłużenia kroku  $h$  i to należy tu podkreślić.



Rys. 5.8: Obszar stabilności zadania przy siatce czworokątnej.

### Stabilność elementów trójkątnych pręta

Identycznie można postąpić w przypadku siatki zbudowanej z elementów trójkątnych. Tutaj podziału dokonano, tak aby w co drugiej warstwie kierunku podziału na trójkąty był przeciwny. Przyjęto liniowy w czasie i przestrzeni rozkład przemieszczeń rzeczywistych i wirtualnych. Otrzymano następujące współczynniki macierzy sztywności:

$$\mathbf{A} = \frac{32 E A h b}{4b^2 - d^2} - \frac{4\rho A(4b^2 + d^2)}{h(2b + d)}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{B} = \frac{2\rho A(2b - d)}{h}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{B}. \quad (5.30)$$

Poszukiwanie wartości własnych macierzy  $\mathbf{T}$  prowadzi do nierówności:

$$-2 \leq k \leq 0 \quad s > \sqrt{\frac{8}{2-k} \frac{k^2}{4+k^2}}, \quad (5.31)$$

$$0 \leq k \leq 2 \quad s > \frac{k}{\sqrt{2-k}}, \quad (5.32)$$

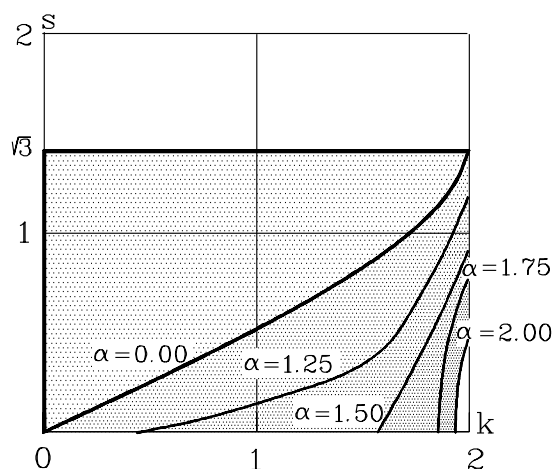
$$-2 \leq k \leq 2 \quad s < \frac{2}{\sqrt{2-k}}. \quad (5.33)$$

Graficznie powyższe nierówności obrazuje rys. 5.10. Tutaj, podobnie jak i w przypadku czworokątów, bezpieczny zakres zmiany położenia węzłów zawiera się w obrębie charakterystyk

$$\left| \frac{d}{h} \right| \leq c \leq \frac{b}{h}. \quad (5.34)$$

#### 5.2.2 Zamiana siatki

Przejdzie do nowej, zmienionej siatki odbywa się według następujących kroków:



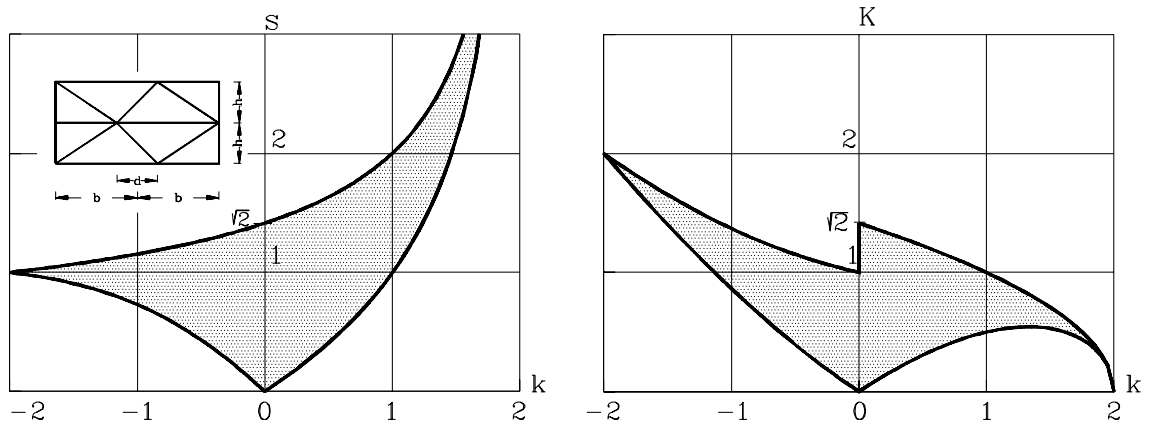
Rys. 5.9: Obszary stabilności elementów czworokątnych przy różnych współczynnikach  $\alpha$ .

- 1) wyznaczenie błędu aproksymacji w węzłach siatki,
- 2) normalizacja węzłowych wartości błędu.
- 3) obliczenie składowych przesunięcia węzłów w kierunku węzłów o większej wartości błędów; rozpartywany węzeł umieszczany jest w środku ciężkości węzłów sąsiednich z wagami równymi węzłowym wartościom błędów,
- 4) sprawdzenie skrzywienia siatki; położenie kwestionowanych węzłów jest korygowane, tak aby uzyskać w ich otoczeniu siatkę dostatecznie regularną.

Dodatkowym wymogiem jest zachowanie konturu obszaru. Węzły leżące na brzegu powinny na nim pozostać również po zamianie siatki. Oczywistym staje się, że węzły narożne nie mogą zmienić położenia.

O ile trzy pierwsze punkty postępowania są jednoznaczne i nie przedstawiają większych trudności, to poprawa regularności siatki może być przeprowadzana na wiele sposobów. Pierwszy, najprostszy, polega na poprawianiu położenia kolejnych węzłów przez przesuwanie ich do geometrycznego środka węzłów otaczających. Już po jednokrotnym wykonaniu takiej czynności w odniesieniu do wszystkich węzłów otrzymuje się siatkę dobrze wygładzoną.

Drugą metodę opisał Benson [38]. Pozwala ona na regularyzację siatek czworokątnych. Wykrywa się dwa typy skrzywienia siatki: objętościowe, związane z nieproporcjonalnym zwiększeniem bądź zmniejszeniem pola powierzchni elementu, oraz skośne, przy którym powstają elementy bardzo wydłużone. Podejście to można z powodzeniem stosować do siatek trójkątnych, szczególnie takich, które pokrywają obszar prostokątny.



Rys. 5.10: Obszar stabilności zadania przy siatce trójkątnej.

Skrzywienie objętościowe  $R_v$  określa stosunek najmniejszego pola do największego w otoczeniu rozpatrywanego węzła (rys. 5.11):

$$R_v = \frac{\min(A_1, A_2, A_3, A_4)}{\max(A_1, A_2, A_3, A_4)}, \quad (5.35)$$

$$R_v = \frac{\min(A_1, A_2, A_3, A_4)}{\max(A_1, A_2, A_3, A_4)}, \quad (5.36)$$

gdzie

$$A_1 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \quad A_2 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3, \quad A_3 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4, \quad A_4 = \mathbf{v}_4 \times \mathbf{v}_1, \quad (5.37)$$

$$A_1 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \quad A_2 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3, \quad A_3 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4, \quad A_4 = \mathbf{v}_4 \times \mathbf{v}_1. \quad (5.38)$$

Skrzywienie skośne określa najmniejszy sinus kątów utworzonych przy badanym węźle.

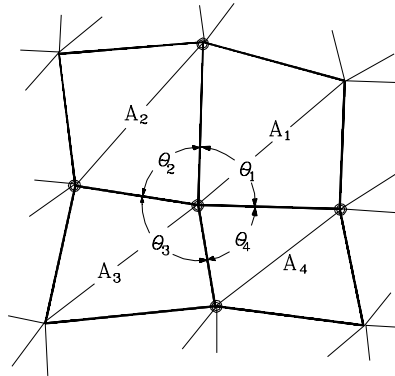
$$\sin \theta_1 = \frac{A_1}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|}, \quad \sin \theta_2 = \frac{A_2}{\|\mathbf{v}_2\| \|\mathbf{v}_3\|}, \quad (5.39)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{A_3}{\|\mathbf{v}_3\| \|\mathbf{v}_4\|}, \quad \sin \theta_4 = \frac{A_4}{\|\mathbf{v}_4\| \|\mathbf{v}_1\|},$$

$$R_\theta = \min(\sin \theta_1, \sin \theta_2, \sin \theta_3, \sin \theta_4). \quad (5.40)$$

Porównując sinusy kątów można zapobiec powstawaniu trójkątów o kątach bardzo ostrych lub rozwartych, a więc w rezultacie bardzo wydłużonych. Unika się w ten sposób odwracania elementów.

W każdym kroku obliczeniowym wymaga się sprawdzenia warunków zapobiegających degeneracji siatki, które podano poniżej.



Rys. 5.11: Siatka czworokątna sprawdzana ze względu na skrzywienie.

1. Największa wartość przesunięcia węzła  $d_{max}$  w jednym kroku obliczeniowym

$$d_{max} = c \Delta t / \beta_1 . \quad (5.41)$$

2. Minimalny wymiar elementu  $b_{min}$

$$b_{min} = \beta_2 c \Delta t . \quad (5.42)$$

3. Skrzywienie objętościowe  $R_v$

$$R_v > R_v^0 . \quad (5.43)$$

4. Skrzywienie skośne  $R_\theta$

$$R_\theta > R_\theta^0 . \quad (5.44)$$

Bezpiecznie jest przyjmować współczynniki  $\beta_1, \beta_2$  większe niż 1;  $R_v^0$  i  $R_\theta^0$  mogą być przyjmowane ok. 0,5.

### 5.2.3 Odwzorowanie naprężeń

Pierwszym etapem obliczeń z modyfikacją siatki podziału jest budowa nowej siatki według strategii zapewniającej minimalny błąd aproksymacji. Drugim etapem, opisanym poniżej, jest rzutowanie składowych naprężeń na nową siatkę podziału.

Algorytm rzutowania spełniać musi kilka podstawowych warunków.

- Procedura rzutowania musi być efektywna, gdyż stosowana jest w każdym kroku obliczeniowym.

- Rzutowanie musi być dokładne.
- Rzutowanie musi być zachowawcze. Całka z danej wielkości w obszarze przestrzennym powinna pozostać niezmienną po rzutowaniu.
- Kryteria stabilności ograniczają wielkość przesunięcia węzłów w jednym kroku obliczeniowym.
- Algorytm musi być zgodny. Oznacza to, że jeśli nowa siatka jest identyczna z pierwotną, wówczas rzutowanie nie może zmieniać wartości odwzorowywanych wielkości.

W naszym przypadku jedynymi wielkościami rzutowanymi są naprężenia. Gdybyśmy mieli do czynienia z siłami węzłowymi, wówczas rzutowanie ich byłoby trywialne. Naprężenia jednak nie mogą być skupiane w węzłach i rozdzielane elementom nowej siatki. To znacznie utrudnia zadanie.

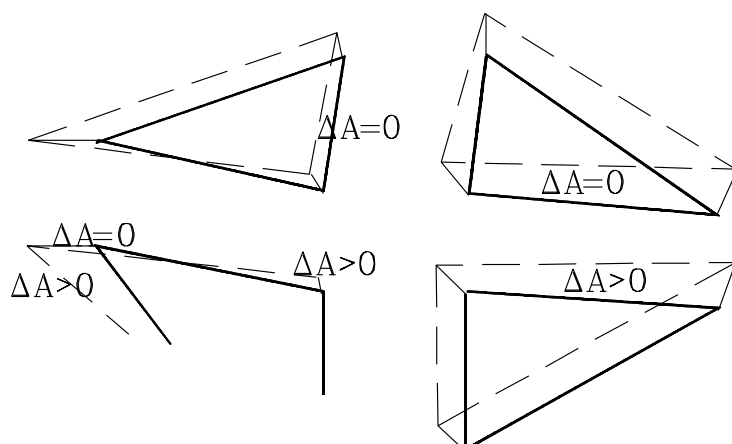
Przyjmijmy, że wielkość przesunięcia węzła w jednym kroku jest mniejsza od przestrzennego wymiaru elementu trójkątnego. Wówczas można obliczyć wymagane wartości z błędem niższego rzędu. Przybliżona formuła wzoru wynika z konieczności skrócenia czasu obliczeń

$$\sigma_i^+ = \frac{1}{A_i^+} \left[ \sigma_i^- A_i^- + \sum_{j=1}^3 (\sigma_j^- - \sigma_i^-) \Delta A_j^- \right]. \quad (5.45)$$

$\Delta A_j^-$  oznacza przyrost powierzchni w pierwotnej siatce, który jest równy zero gdy pokrywa się z obszarem elementu w nowej geometrii  $A_j^+$ , a jest dodatni w przypadku przeciwnym (5.12). W ten sposób przyrost ten brany jest do obliczeń jeden raz przy przejściu procedury od elementu do elementu. Należy zauważyć, że jedynie w pobliżu narożników obliczenia nie są dokładne, a wpływ tego na wyniki jest znikomy. Lub inaczej, jeśli podobszary wyznaczone przez przecinające się stare i nowe krawędzie obliczane są dokładnie (co nie jest łatwe) to związek (5.45) jest dokładny, efektywny zachowawczy i zgodny.

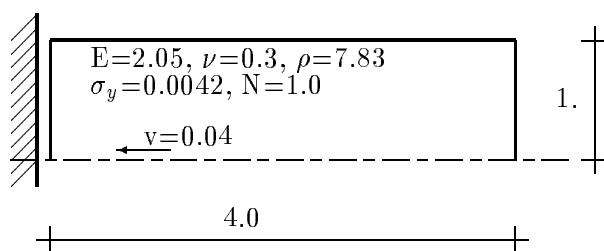
#### 5.2.4 Przykład

Modelowano zderzenie sprężysto-lepkoplastycznego płaskiego ciała z nieruchomą, sztywną przeszkodą (rys. 5.13). Z prostokątnego obszaru ciała o wymiarze  $4,0 \times 2,0$  wybrano symetryczną połowę. Obliczenia prowadzono z użyciem czworobocznych elementów czasoprzestrzennych płaskiego stanu odkształcenia. Rejestrowano przemieszczenia punktu leżącego na osi symetrii, na swobodnym brzegu obszaru. Efekt uzyskany przy zastosowaniu adaptacji siatki pokazuje rys. 5.14a. Stosowano różne gęstości siatek podziału (rys.



Rys. 5.12: Zmiany pola elementów podczas rzutowania.

5.14b) i różny krok czasowy (rys. 5.15b). Obserwowano też zachowanie się modelu przy różnych współczynnikach płynięcia  $\gamma$  (rys. 5.15a).

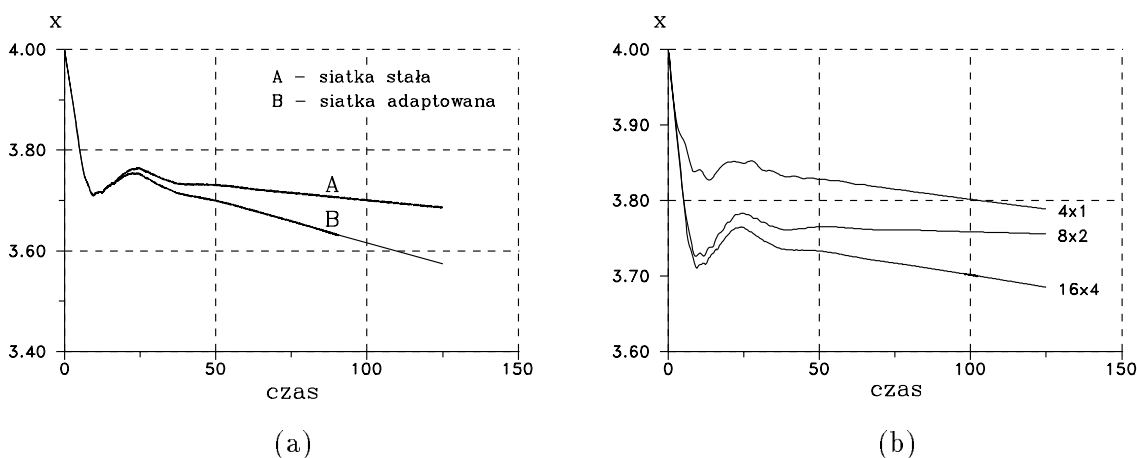


Rys. 5.13: Zderzenie pręta z przeszkodą.

### 5.2.5 Analiza kontaktu tocznego

Numeryczna analiza tocznego zagadnienia kontaktowego napotyka na wiele trudności. Podstawową sprawą jest konieczność zastosowania drobnej dyskretyzacji w strefie kontaktu, aby skutecznie móc śledzić zachodzące tam procesy. Podczas przejazdu walca strefa kontaktu przesuwają się i należałoby zmniejszyć odległość między węzłami siatki dyskretnej w całej strefie przejazdu. Podnosi to ogromnie koszt obliczeń. Nieliniowości geometryczne i materiałowe (przyjęto sprężysto-lepkoplastyczny model materiału) jeszcze bardziej zwiększają koszty. Należy tu zaznaczyć, że zadania kontaktowe wymagają





Rys. 5.14: Przemieszczenie poziome w czasie swobodnego końca pręta: (a) stała i adaptowana siatka, (b) wybrane gęstości siatek.

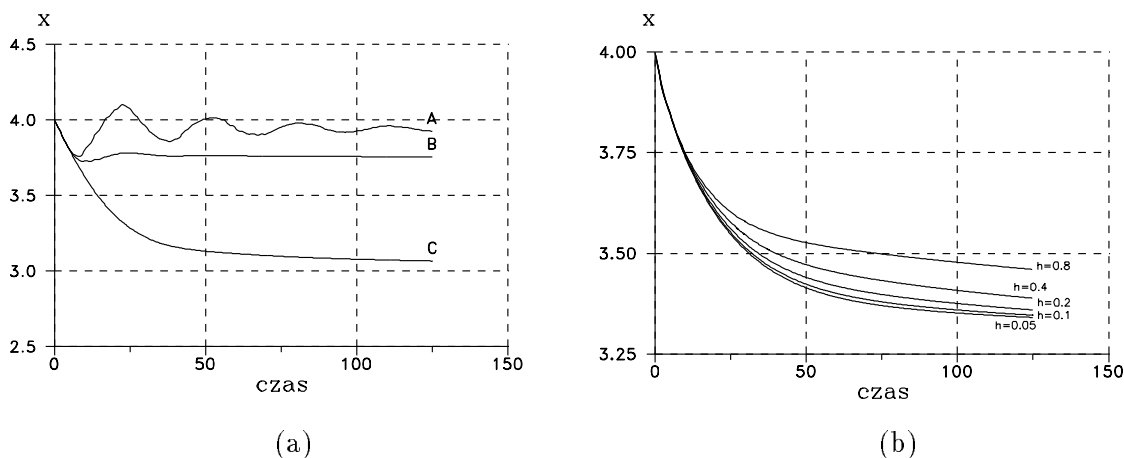
stosunkowo małego kroku całkowania równania różniczkowego ruchu.

Wobec powyższych trudności zdecydowano się przyjąć metodę adaptacyjną budowy siatki dyskretnej walcowanej strefy. W każdym kroku obliczeń szacuje się błąd aproksymacji i w zależności od jego wartości modyfikuje siatkę podziału. Tak zwana r-adaptacja zachowuje niezmienną liczbę węzłów, powodując ich przesuwanie ku obszarom o dużych gradientach naprężeń.

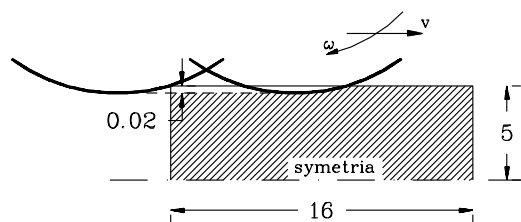
Techniki adaptacyjne są znane i stosowane głównie w zadaniach dyfuzji lub w zadaniach typu statyki. Bogaty materiał na ten temat zawiera monografia [63]. W prezentowanym obecnie podejściu adaptację siatki umożliwiła metoda elementów czasoprzestrzennych. Metoda elementów czasoprzestrzennych w sposób naturalny pozwala na modyfikację siatki podziału z kroku na krok [33]. Pomimo, że metoda jest warunkowo stabilna zarówno ze względu na krok czasowy jak i predkość modyfikacji siatki [31], to w prezentowanym problemie oba te ograniczenia nie są aktywne.

### Przykład

Przykład liczbowy dotyczy walcowania lepko-sprężystoplastycznej tarczy w płaskim stanie odkształcenia. Rozpatruje się połowę obustronnie ściskanego parą walców pasma (rys. 5.16). Obrót walca zależny jest od przebytej drogi. W strefie kontaktu uwzględnia się tarcie ze wzmocnieniem w strefie sklejenia. Zastosowano materiał sprężysto-lepkoplastyczny, opisany w pracach [136, 139] i adaptowany do obliczeń numerycznych w pracy [175]. Prędkość



Rys. 5.15: Przesunięcie poziome w czasie swobodnego końca pręta: (a) przy (A)  $\gamma = 5 \cdot 10^{-5}$ , (B)  $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$ , (C)  $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$ ; (b) przy różnych krokach czasowych ( $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$ ).



Rys. 5.16: Schemat walcowanego obustronnie pasma.

kość odkształceń lepkoplastycznych opisuje związek

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_y} \right) \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma} . \quad (5.46)$$

$\gamma$  jest współczynnikiem pełzania. Funkcja płynięcia  $F = (3I_2)^{1/2} - \sigma_y$ . Funkcja  $\Phi$  przyjmowana jest w formie wykładniczej

$$\Phi \left( \frac{F}{\sigma_y} \right) = \left( \frac{F}{\sigma_y} \right)^N . \quad (5.47)$$

Wyrażenie  $\langle \cdot \rangle$  przyjmuje wartość zależnie od wartości funkcji płynięcia  $F$ :

$$\left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_y} \right) \right\rangle = H(F) \cdot \Phi \left( \frac{F}{\sigma_y} \right) . \quad (5.48)$$

We wzorze (5.48)  $H$  oznacza funkcję Heaviside'a.

Przyjęto następujące dane liczbowe:  $E=2,05$ ,  $\nu=0,3$ ,  $\rho=7,83$ ,  $\eta_z=0,2$  (tłumienie zewnętrzne),  $\gamma=5\cdot 10^{-4}$ ,  $\mu=0,5$ ,  $N=1$ ,  $\sigma_y=0,0042$ . Na rysunkach 5.17 i 5.18 pokazano kolejne fazy dostosowywania się siatki podziału oraz naprężenia w chwili, gdy środek walca znajduje się w głębi pasma.

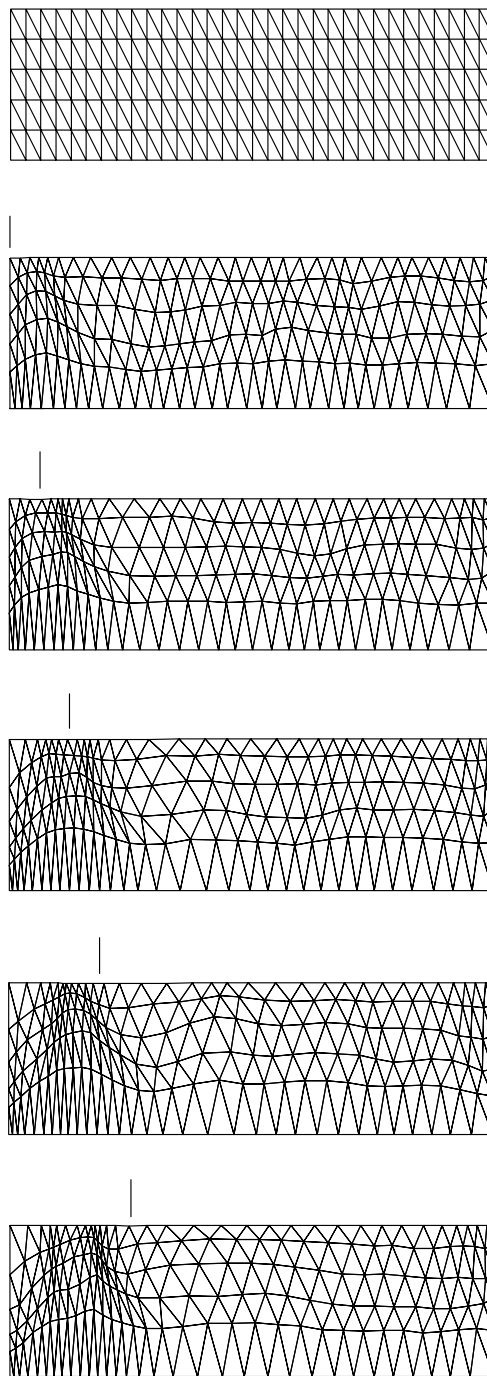
Przy stałej siatce podziału otrzymano deformacje pokazane na rys. 5.19. Zdeformowany kontur pokazano w odstępach czasu równych 5 ms. Odpowiada to czasowi przejazdu walca od pozycji  $-2$  cm do pozycji  $+18$  cm. W trzech przejazdach walec deformuje materiał. Później zaobserwowana jest faza odprężenia materiału. Rysunek 5.20 przedstawia wykresy naprężeń  $\sigma_x$  zarejestrowane w tych chwilach.

### 5.3 H-adaptacja

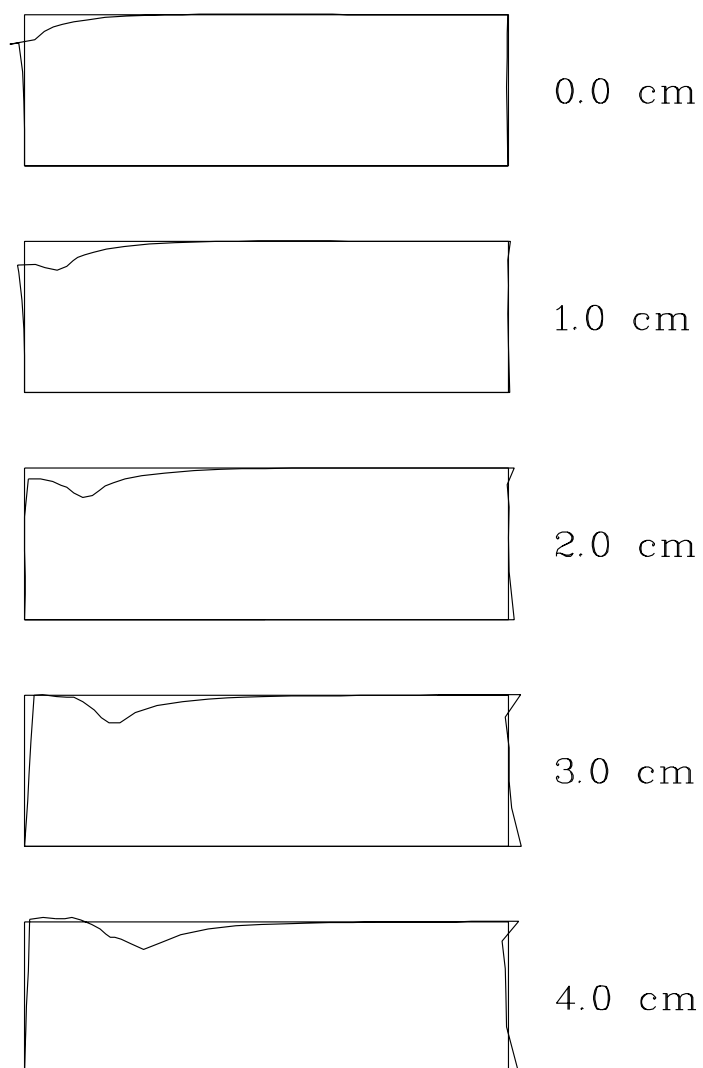
We wstępie do rozdziału 5 pokazaliśmy, że proste sposoby zmiany siatki w zadaniu dynamiki konstrukcji nie dają pozytywnych rezultatów. Podkreśliliśmy tam też, że jakakolwiek zmiana siatki podziału w trakcie prowadzenia procesu czasowego jest przejściem do rozwiązania innego już zadania. Zmiana liczby węzłów lub ich rozmieszczenia wprowadza w istocie zmianę ogólnej sztywności układu, a to w konsekwencji zmianę całej odpowiedzi układu. Wobec tego zmiana układu dyskretnego winna się wiązać z dopasowaniem wszystkich pozostałych poza geometrią parametrów: stałych materiałowych i wektorów przemieszczeń i prędkości, jako warunków początkowych nowego zadania. W dalszych rozważaniach dopuścimy zmianę warunków początkowych ruchu zadania po adaptacji.

Idea adaptacji polega na wyznaczeniu warunków początkowych nowego zadania (po adaptacji) tak, aby wyniki prowadzonych (kontynuowanych) obliczeń różniły się w możliwie najmniejszym stopniu od wyników obliczeń prowadzonych przy siatce pierwotnej. Sprawą otwartą pozostaje, co rozumie się pod pojęciem wyników obliczeń. Mogą to być przemieszczenia węzłów, ich prędkości, odkształcenia itd. W dalszej części za miarodajne przyjmujemy: (a) przemieszczenia węzłów, (b) odkształcenia. Okazuje się, że dopiero kombinacja liniowa obydwu tych przypadków daje pożądaną rezultaty.

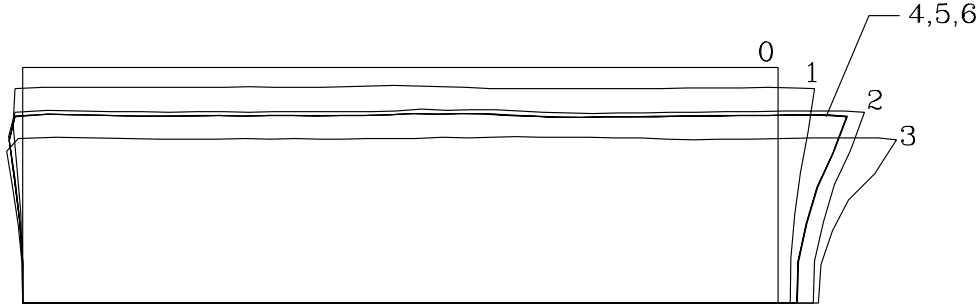
Zmiana siatki węzłów następuje przez dodanie lub usunięcie pewnej liczby węzłów, przy czym co najwyżej co drugi węzeł może zostać usunięty i co najwyżej jeden węzeł może być wprowadzony między dwa kolejne. Takie postępowanie zapewnia pozostawienie przynajmniej połowy węzłów wspólnych, oznaczonych przez  $C$ , w siatce pierwotnej  $A$  i zmodyfikowanej  $B$  (rys. 5.21).



Rys. 5.17: Dostosowanie siatki podziału do koncentracji napreżeń (oznaczono położenie środka walca).



Rys. 5.18: Odształcenie krawędzi walcowanej (mnożnik 50) (zmienna siatka podziału)



Rys. 5.19: Zdeformowany kontur w kolejnych etapach (mnożnik przemieszczeń równy 10) (stała siatka podziału).

### 5.3.1 Nieciągła w czasie adaptacja typu $h$

#### Przejście przemieszczeniowe

Wektor przemieszczeń węzłów siatki pierwotnej  $A$  w chwili  $i$  oznacza się przez  $\mathbf{q}_i$  a siatki zmodyfikowanej  $B$  przez  $\hat{\mathbf{q}}_i$ . Aby wybrać z tych wektorów elementy opisujące przemieszczenia węzłów wspólnych  $C$  wektory te mnoży się przez zero–jedynekowe macierze przyporządkowania  $\Pi$  i  $\hat{\Pi}$ . Błąd przejścia do nowej siatki określa się jako różnicę przemieszczeń

$$\mathbf{R}_i = \Pi \mathbf{q}_i - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{q}}_i . \quad (5.49)$$

Miarę błędu w sensie najmniejszych kwadratów na przestrzeni  $n$  warstw czasowych określa wyrażenie

$$I_1 = \sum_{i=0}^n \mathbf{R}_{i+1}^T \mathbf{R}_{i+1} = \sum_{i=0}^n \left( \Pi \mathbf{q}_{i+1} - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{q}}_{i+1} \right)^T \left( \Pi \mathbf{q}_{i+1} - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{q}}_{i+1} \right) . \quad (5.50)$$

Proces rekurencyjny rozwiązania w kolejnych chwilach czasowych, prowadzony w bazie węzłów  $A$ , opisuje związek

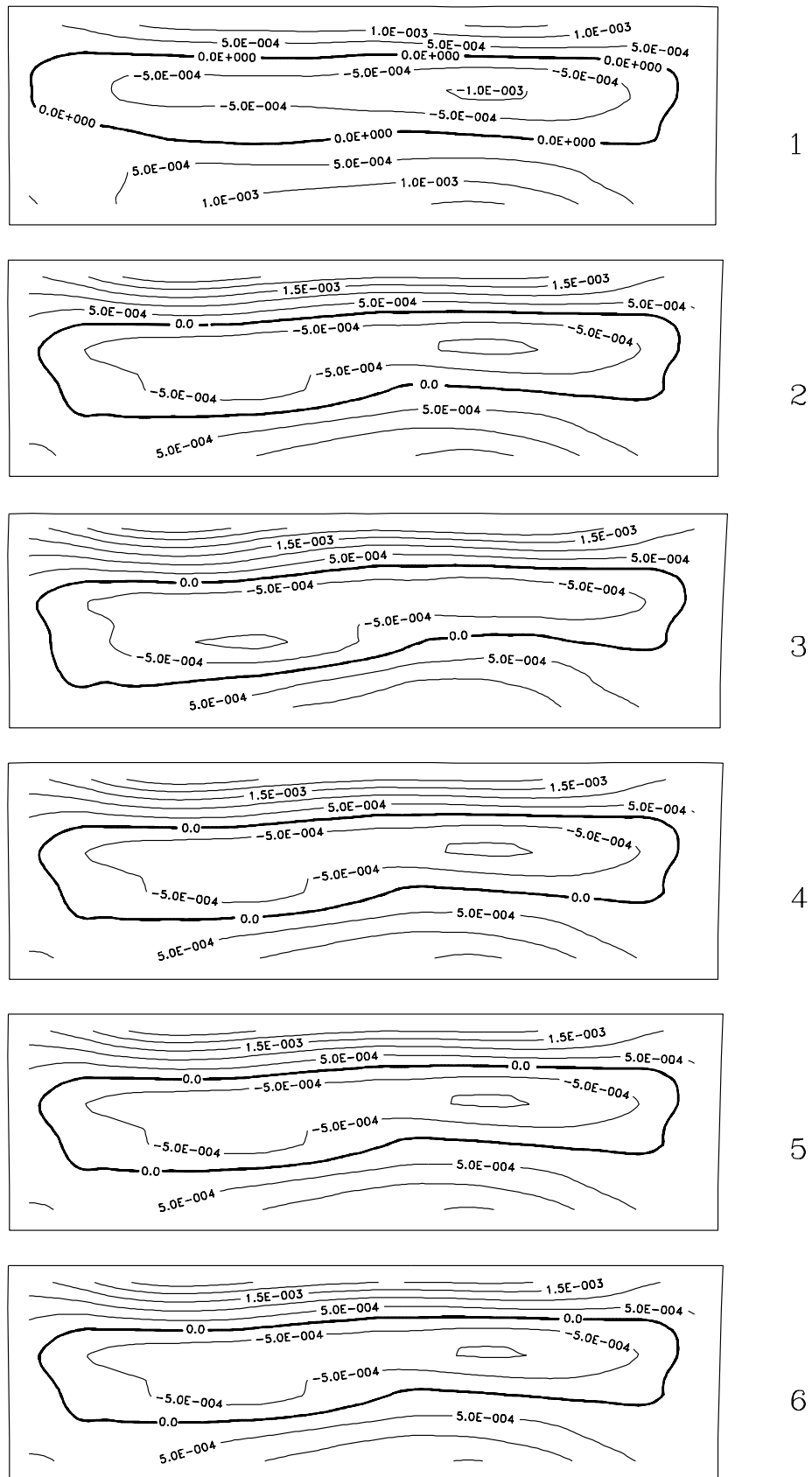
$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{A} \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{B} \mathbf{q}_i , \quad (5.51)$$

a w bazie węzłów  $B$  związek

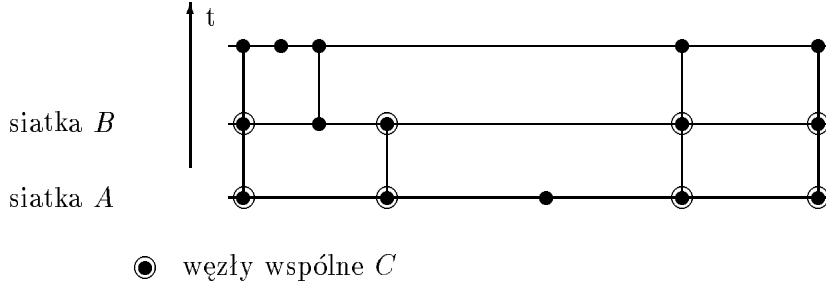
$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{q}}_{i-1} + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{q}}_i . \quad (5.52)$$

Rekurencyjne związki (5.51) i (5.52) można zredukować do formuł, w których przemieszczenia w chwili  $i + 1$  zależą od przemieszczeń w chwilach 1 i 2:

$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1} = \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 + \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 , \quad (5.53)$$



Rys. 5.20: Naprężenia  $\sigma_x$  w kolejnych etapach.



Rys. 5.21: Modyfikacja siatki: h-adaptacja.

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 . \quad (5.54)$$

Macierze  $\hat{\mathbf{P}}_i$  i  $\hat{\mathbf{Q}}_i$  otrzymuje się według schematu:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{A}, \quad \hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{I}, \\ \hat{\mathbf{Q}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{P}}_i + \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Analogicznie tworzy się  $\mathbf{P}_i$  i  $\mathbf{Q}_i$ .

Podstawienie  $n$  razy (5.53) i (5.54) do (5.50) daje w efekcie wyrażenie

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=0}^n \left( \Pi \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \Pi \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right)^T \\ &\quad \cdot \left( \Pi \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \Pi \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right) . \end{aligned} \quad (5.56)$$

Minimalną wartość  $I_1$  uzyskuje się przy spełnieniu warunków:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \hat{\mathbf{q}}_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial I_1}{\partial \hat{\mathbf{q}}_2} = 0 . \quad (5.57)$$

Prowadzi to do układu równań:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 &= \\ \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\Pi}^T \Pi (\mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2) & \\ \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 &= \\ \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\Pi}^T \Pi (\mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2) & \end{aligned} \right. \quad (5.58)$$

### Przejście odkształceniowe

Błąd wynikający ze zmiany siatki można opisać odkształceniami w poszczególnych podobszarach  $j$  siatki  $C$

$$e_j = \varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j . \quad (5.59)$$



Odształcenia  $\varepsilon_j$  i  $\hat{\varepsilon}_j$  wyznacza się poprzez działanie operatora różniczkowego  $\hat{\mathbf{B}}_j$  na odpowiednie przemieszczenia

$$\varepsilon_j = \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{q}_i, \quad \hat{\varepsilon}_j = \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{q}}_i. \quad (5.60)$$

Trzeba tu zwrócić uwagę, że w obszarze jednego elementu siatki  $A$  mogą znajdować się 2 elementy siatki  $B$  lub odwrotnie. Miarą błędu jest wówczas funkcjonal

$$I_2 = \sum_{i=0}^n \sum_j \int_{V_j} (\varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j)^T D (\varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j) dV_j. \quad (5.61)$$

Podstawienie (5.60) do (5.61) oraz uwzględnienie schematów przejścia (5.53) i (5.54) daje w wyniku

$$I_2 = \sum_{i=0}^n \sum_j \int_{V_j} \left( \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right)^T \left( \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right) dV_j \quad (5.62)$$

Warunki minimum  $I_2$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \hat{\mathbf{q}}_1} = 0 \quad i \quad \frac{\partial I_2}{\partial \hat{\mathbf{q}}_2} = 0 \quad (5.63)$$

prowadzą do układu równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\mathbf{F}}_{i+1} \\ \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\mathbf{F}}_{i+1} \end{cases}, \quad (5.64)$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{K}} = \sum_j \hat{\Pi}_j^T \int_{V_j} \hat{\mathbf{B}}_j^T D \hat{\mathbf{B}}_j dV_j \hat{\Pi}_j, \quad (5.65)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+1} = \sum_j \hat{\Pi}_j^T \int_{V_j} \hat{\mathbf{B}}_j^T D \varepsilon_j^{i+1} dV_j. \quad (5.66)$$

$\hat{\mathbf{K}}$  jest macierzą sztywności układu  $B$ .

### Przykłady

Jako zadanie modelowe przyjęto osiowo drgający pręt podzielony na 20 elementów przestrzennych. Warunki początkowe stanowią:  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{q}_2 = \{1, 0, \dots, 0\}^T$ . Miarę błędu stanowi kombinacja  $I_1$  (5.50) i  $I_2$  (5.61)

$$I = (1 - a)I_1 + aI_2, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (5.67)$$

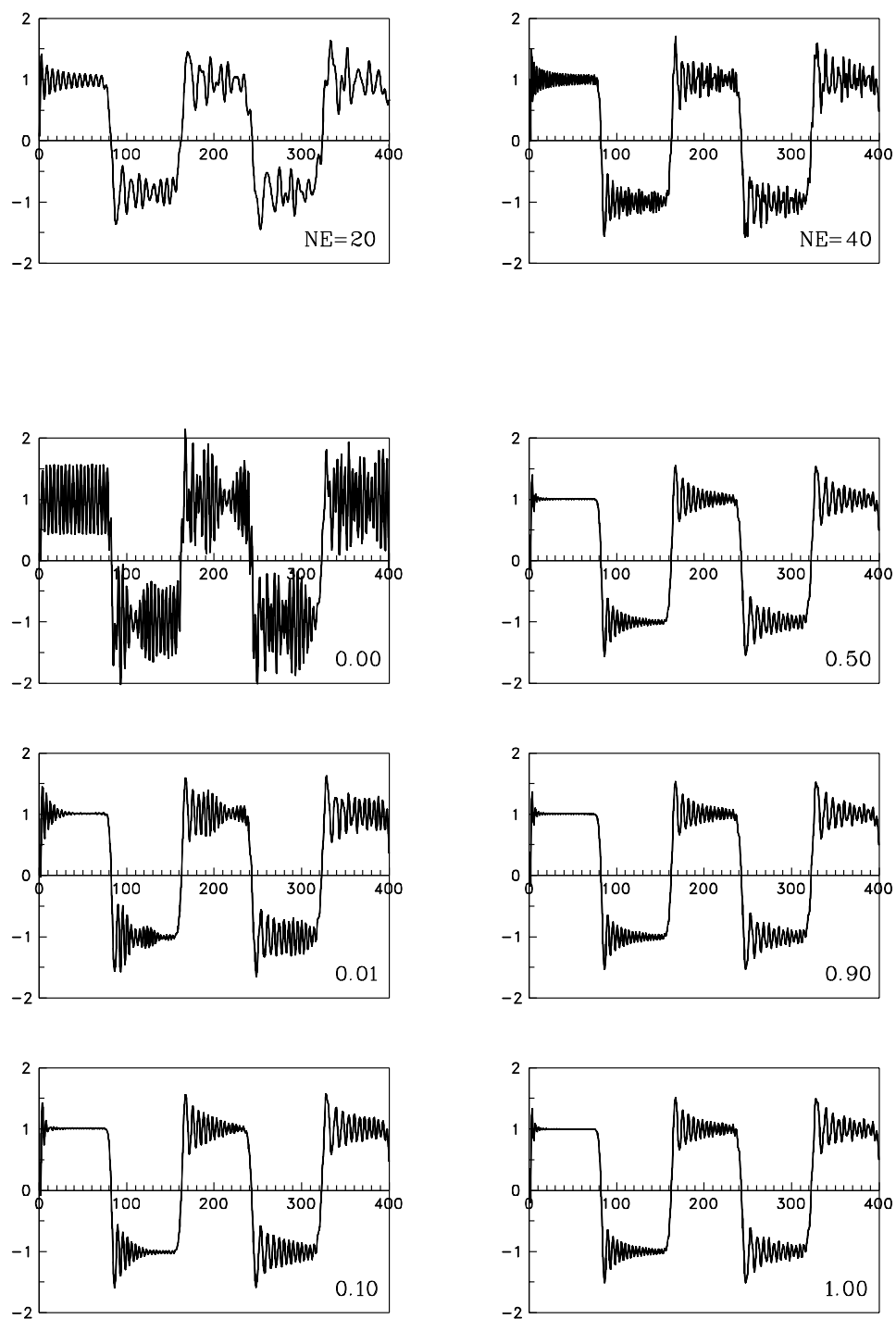
Rys. 5.22 pokazuje przemieszczenie w czasie swobodnego końca pręta. Pierwszy z wykresów dotyczy zadania pierwotnego, do którego należy dopasować zachowanie zmodyfikowanego układu. Następne wykresy otrzymano po dwukrotnym zagęszczeniu podziału, przy różnych wartościach parametru  $a$ . Przypadek  $a = 0,0$  wytwarza pasożytnicze drgania o dużej częstotliwości. Przyczynę tego można odgadnąć z rys. 5.23, na którym pokazano wyliczone wektory przemieszczeń początkowych  $\mathbf{q}_2$  przy wybranych wartości  $a$ . Przy  $a = 0,0$  wynikowy wektor mocno odbiega od kształtu zadanego przemieszczenia w układzie pierwotnym. Z pozostałych wykresów widać, że nawet niewielki udział członu  $I_2$  (a więc uwzględnienie odkształceń) skutecznie stabilizuje rozwiązanie.

W celu porównawczym można wskazać rys. 5.4, gdzie pokazano charakter drgań przy podziale pierwotnym pręta na 40 elementów.

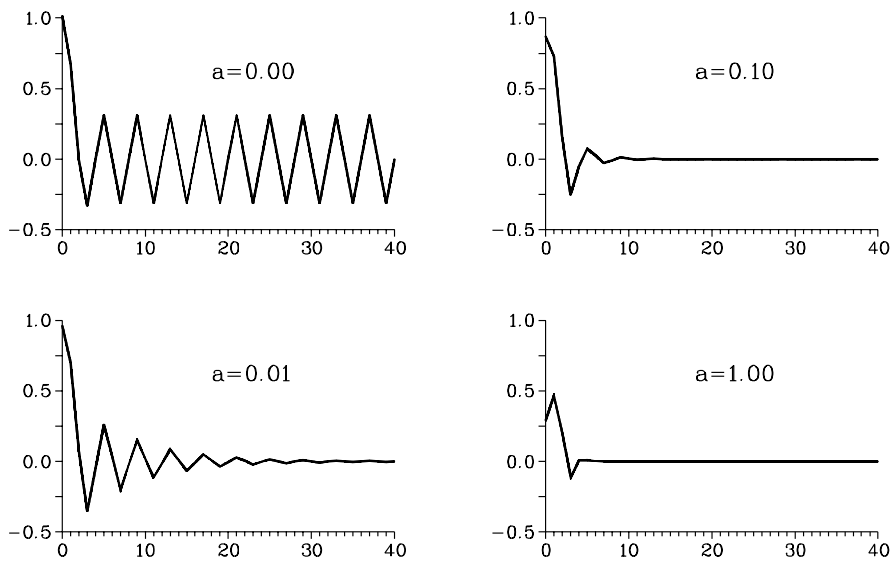
### 5.3.2 Ciągła w czasie adaptacja typu $h$

Adaptacja typu  $h$  jest bardzo wygodnym sposobem dostosowania zagęszczenia siatki przestrzennej do aktualnych potrzeb. W praktyce bardzo szybko, w ciągu kilku kroków można wystarczająco siatkę zagęścić lub rozrzedzić. Siatka elementów czasoprzestrzennych zbudowana jest głównie z czworokątów. Elementy trójkątne wykorzystuje się w celu przejścia do stref o rzadszym lub gęstszym podziale (rys. 5.24). Jak już wspominaliśmy kilkakrotnie w tej pracy, proste rozrzedzenie siatki poprzez usunięcie węzłów czy też wprowadzenie nowych węzłów w wyniku zwykłej interpolacji przemieszczeń i prędkości nie daje żadnych skutków. Brak ciągłości w czasie pól przemieszczeń i prędkości burzy zasadę zachowania energii. Spróbujemy zatem zbudować ciągłe przejście do nowej siatki węzłów, wykorzystując w tym celu prędkościowy schemat obliczeniowy z trójkątnymi elementami (rozdz. 2.4). Sprawdzenie przydatności takich elementów rozpoczniemy od zbadania, na ile skutecznie można dodawać nowy węzeł do siatki. Stanowi to zawsze problem, ponieważ wartości w nowym węźle nie można wyinterpolować. Należy raczej rozwiązać zadanie dynamiczne ograniczone obszarem do dzielonego elementu. Na takie właśnie postępowanie pozwala siatka elementów czasoprzestrzennych, z trójkątnymi elementami w strefie zagęszczania podziału przestrzennego.

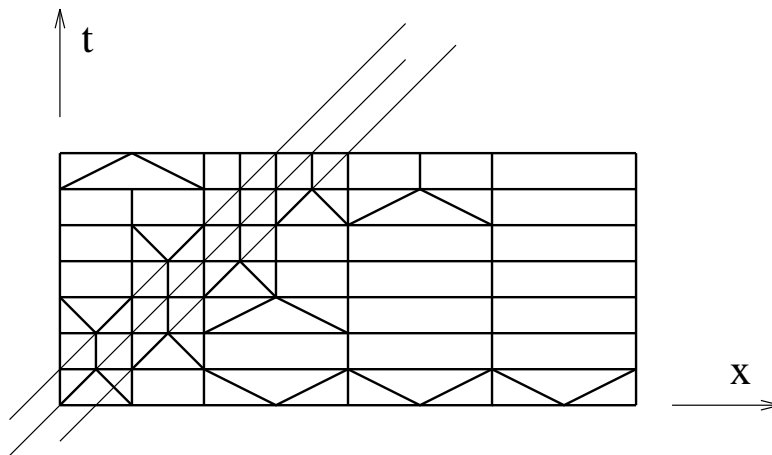
Prześledźmy układ elementów dyskretyzujący jeden element przestrzenny pręta drgającego osiowo, zamocowanego na jednym końcu. W każdym kroku czasowym dostawiać będziemy w środku trzeci węzeł i wyliczać w nim prędkość i przemieszczenie, po czym będziemy go odrzucać (rys. 5.25a). Powtarzając wielokrotnie tą czynność będziemy mogli akumulować ewentualny błąd. W sformułowaniu wykorzystano elementy opisane w (2.119) lub (2.127). Skrajnemu węzłowi nadano prędkość początkową  $v_0=1$ . Okazuje się, że drga-



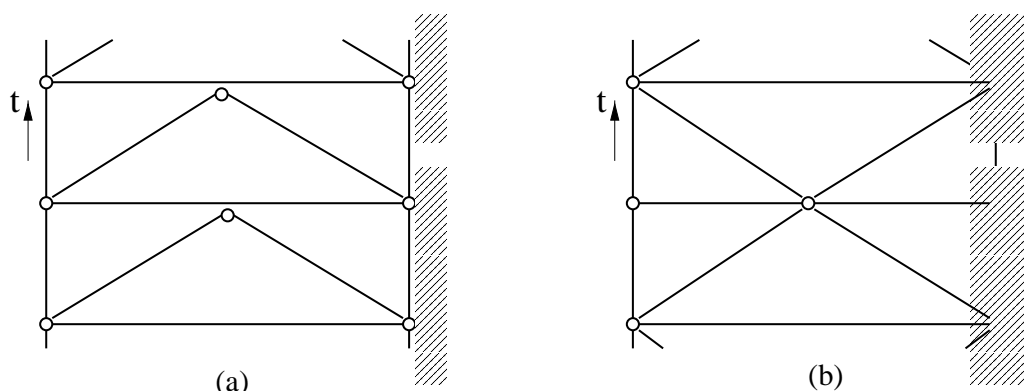
Rys. 5.22: Przemieszczenia w czasie końca pręta przy podziale na 20 elementów oraz po dwukrotnym zagęszczeniu podziału przy różnych współczynnikach  $\alpha$  ( $n = 5$ ).



Rys. 5.23: Przemieszczenia początkowe  $q_2$  (podział wtórny na 40 elementów) przy różnych wartościach  $a$ .



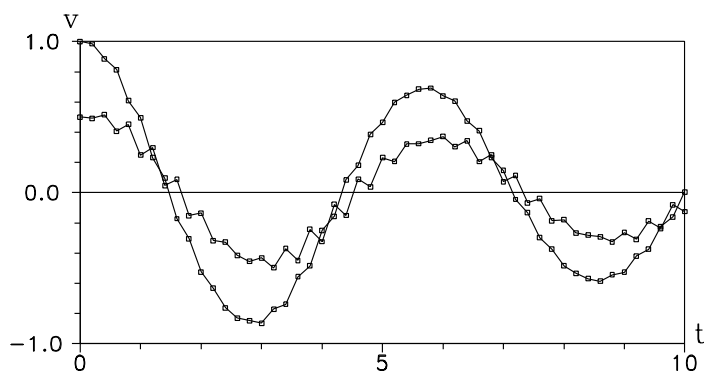
Rys. 5.24: Przykład adaptacji siatki z zastosowaniem elementów czworokątnych i trójkątnych.



Rys. 5.25: Zagęszczanie siatki w czasie (a) i ciągła zmiana liczby węzłów (b) — zadania próbne.

nia mają stałą amplitudę a okres drgań  $T=2\sqrt{3}/3 \approx 3,628$  dokładnie odpowiada okresowi drgań oscylatora z masą  $m=1/3$ . Jest to wielkość wynikająca z konsekwentnego budowania macierzy mas. Masa zgranulowana  $m=1/2$  dałaby okres drgań  $T=\sqrt{2} \approx 4,443$ .

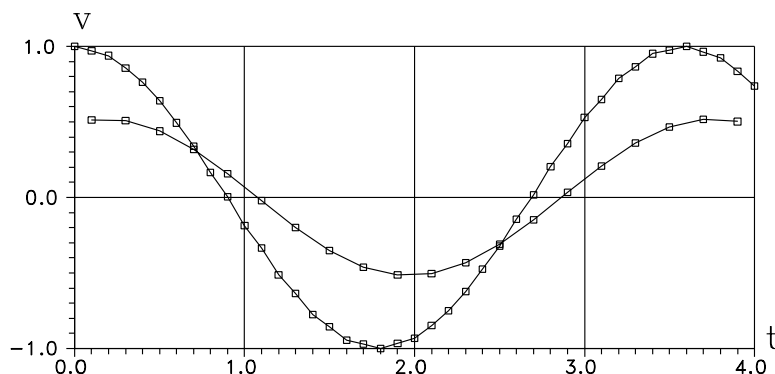
Można przytoczyć wykres prędkości końca pręta w przypadku zastosowania prostej interpolacji wartości przy wprowadzaniu nowych węzłów (rys. 5.26). Okazuje się, że drgania mogą być zbieżne lub rozbieżne. Może zdarzyć się, że oba te efekty mogą się wzajemnie niwelować (jak np. widać na rys. 5.1), jeśli odpowiednio dobierze się zadanie. Na rys. 5.26 widać zygzakowaty wykres prędkości, który wynika ze sztucznie wyznaczanych w co 2 warstwie wartości. Takie więc podejście jest nie do przyjęcia.



Rys. 5.26: Prędkość końca pręta w czasie — zadanie testowe.

Definitywnym sprawdzeniem skuteczności ciągłej metody zmiany liczby węzłów w siatce jest rozwiązanie zadania pokazanego na rys. 5.25b. Jest to również przypadek jednego ele-

mentu skończonego pręta. Tutaj jednak konsekwentnie przechodzi się na zmianę z siatki rzadkiej do gęstej i ponownie do rzadkiej. Operację powtarza się cyklicznie. Widzimy na rys. 5.27, że wykres prędkości w czasie jest gładki, mimo dodawania węzłów. Zaznaczono na krzywych punkty odpowiadające prędkościom węzła skrajnego i środkowego. Krzywa węzła środkowego wytyczona jest w co drugiej chwili gdyż w co drugiej warstwie istnieje ten węzeł. Już w najprostszych przypadkach klatki czasoprzestrzenne, w których



Rys. 5.27: Prędkość końca pręta w czasie, przy zmianie liczby węzłów.

dodaje się lub usuwa węzły, mogą być użyte do skutecznej adaptacji siatki w przestrzeni. Podziału elementu z dodaniem węzła można dokonać na podelementy o różnej długości. Zwiększa się w ten sposób swobodę modelowania. Należy pamiętać, że zatracą się wyższe postaci drgań, jeśli redukuje się liczbę węzłów w siatce.

□

W rozdziale 5 skupiono się na wykorzystaniu zdolności czasoprzestrzennej siatki do dostosowywania się, według określonych kryteriów, do wymogów zadania. Wykazano, że spotykane w literaturze sposoby adaptacji siatki przestrzennej w zadaniach dynamiki, polegające na wprowadzaniu i usuwaniu węzłów z wykorzystaniem prostej interpolacji, nie dają poprawnych rozwiązań. Można łatwo wykazać, że rozwiązania takie nie są konserwatywne. W niniejszej pracy zaproponowano kilka sposobów wykorzystania metody elementów czasoprzestrzennych w zadaniach adaptacyjnych. Kryteria wykorzystywane do określania strategii adaptacji mogą być różne. Najczęściej zabiega się o minimalizację błędu aproksymacji. Kryterium jest wówczas oszacowanie błędu aproksymacji funkcji ciągłych, stanowiących rozwiązanie, funkcjami prostszymi, np. kawałkami liniowymi. In-

nym celem może być dostosowanie podziału przestrzennego do określonych charakterystyk zadania. Adaptacja typu  $r$  umożliwia redystrybucję siatki, jednak z ograniczeniami prędkości przemieszczania węzłów. Zbadane przypadki drgań struny czy pręta pokazują, że bezpiecznym ograniczeniem prędkości przemieszczania węzłów, z uwagi na stabilność rozwiązania, jest prędkość rozchodzenia się fali. Dużą trudność sprawia też odwzorowanie pól wektorowych, opisanych dyskretnie w jednej bazie węzłów, na pole określone drugą bazą węzłów siatki. Z matematycznego punktu widzenia proces ten jest aproksymacją, jednak dotąd nie udało się określić ogólnych warunków aproksymacji, aby rozwiązanie nie tylko zachowywało energię układu, ale i nie doznawało pasożytniczych impulsów sił. Podobne rozwiązania stosowano do zagadnień np. przepływu ciepła [170] lub podobnych problemów [156, 1], lecz w takich przypadkach stabilność rozwiązania nie jest tak istotnym kryterium, jak w zadaniach drgań mechanicznych. Dużo łatwiej jest też zapewnić stabilność rozwiązań w przypadku zadań opisanych równaniami różniczkowymi parabolicznymi, z pierwszą pochodną względem czasu.

Większe walory prezentuje adaptacja typu  $h$ . Zaletą jest możliwość szybkiego (w ciągu kilku kroków) zagęszczenia lub rozrzedzenia siatki w praktycznie każdym stopniu. Pierwsze z zaprezentowanych podejść opisuje adaptację z nieciągłym polem przemieszczeń lub prędkości w czasie. Ideą jest takie dobranie dyskretnie opisanych pól wielkości będących rozwiązaniem, aby kontynuacja obliczeń ze zmienną siatką węzłów dawała rozwiązanie najbliższe temu, które uzyskaloby się kontynuując obliczenia przy nie zmienionej siatce. Wyniki są obiecujące, choć znaczny jest koszt obliczeń. Należy mianowicie wykonać czasochłonne operacje macierzowe w kilku lub kilkunastu warstwach poprzedzających zmianę siatki. W praktyce taka czynność może być wykonywana raz na kilkaset kroków czasowych. W innym przypadku koszt przewyższa osiągnięte korzyści.

Najpoważniejszym osiągnięciem badań nad adaptacją siatki przy zastosowaniu metody elementów czasoprzestrzennych jest ciągła w czasie adaptacja typu  $h$ , wykorzystująca trójkątne (symplektyczne) elementy opisane prędkościami przemieszczeń. Nie natrafiono w literaturze na skuteczne zastosowanie dyskretnych metod analizy dynamicznej konstrukcji z wykorzystaniem  $h$ -adaptacji. Trójkątne elementy czasoprzestrzenne zastosowano do przejścia od siatki rzadkiej do gęstej i na odwrót. Operacje takie nie niosą tłumienia lub wzbudzenie pasożytniczego, nie wpływają też na zmianę okresu drgań. Nie wprowadzają więc ubocznych efektów, odpowiadających w praktyce działaniu impulsów siły lub zmianie własności mechanicznych układu (co prowadziłoby do błędów fazowego i amplitudowego). Jest to niewątpliwie duży krok w dziedzinie adaptacji siatek w modelowaniu równań różniczkowych typu hiperbolicznego.





## Rozdział 6

# Wnioski

W pracy zaprezentowano czasoprzestrzenne modelowanie dynamicznych zagadnień kontaktowych. Idea metody polega na podobnym traktowaniu zmiennej czasowej i zmiennych przestrzennych. Interpolacja wielkości opisujących zadanie, oparta na wartościach węzłowych tych wielkości, nie daje się w ogólnym przypadku przedstawić jako iloczyn interpolacji w przestrzeni i w czasie. W szczególnych przypadkach sformułowania czasoprzestrzenne odpowiadają klasycznym podejściom wykorzystującym metodę elementów skończonych w przestrzeni zmiennych rzeczywistych i numeryczną metodę całkowania równania różniczkowego w czasie. Uzyskano jakościowo nowe rezultaty, pozwalające dalej wykorzystywać rozwinięte w pracy sformułowania do analizy numerycznej szerokiej klasy zagadnień, które dotąd nie dawały się łatwo modelować klasycznymi metodami dyskretnej analizy konstrukcji.

W pracy przedstawiono dwa sformułowania dyskretyzacji czasoprzestrzennej: pierwsze, posługujące się przemieszczeniami i prowadzące do schematu trójwarstwowego oraz drugie, opierające się na prędkościach i dające schemat dwuwarstwowy. Sformułowanie przemieszczeniowe jest atrakcyjne, kiedy zastosuje się elementy czasoprzestrzenne o kształtach sympleksów. Wtedy równania wynikowego układu można rozseparować i znacząco obniżyć koszt obliczeniowy zadania. Z tej atrakcyjnej własności można skorzystać, jeśli jest się zmuszonym do konstruowania konsystentnych macierzy bezwładności i tłumienia. Częściej niż w samej mechanice konieczność taka zachodzi w problemach szeroko rozumianej fizyki matematycznej.

Drugą cechą odróżniającą czasoprzestrzenne sformułowanie przemieszczeniowe od klasycznych metod całkowania równań różniczkowych ruchu jest możliwość modyfikacji siatki w czasie. Dotyczy to zarówno położenia węzłów w przestrzeni, które może się zmieniać

w sposób ciągły z pewnymi ograniczeniami, jak i skrócenia kroku czasowego w wybranych obszarach. Zdecydowanie ułatwia to modelowanie zjawisk zmiennych w czasie a w szczególności uwzględnienie zmieniającej się strefy kontaktu w przestrzeni i w czasie. Wprowadzenie dodatkowych węzłów w czasie pozwala precyzyjnie ująć przedział czasowego kontaktu. Sformułowanie przemieszczeniowe pozwala na łatwiejsze od prędkościowego uwzględnienie ograniczeń wynikających z warunków kontaktu. Te ostatnie zazwyczaj są opisywane właśnie przemieszczeniami.

Grupa przemieszczeniowych schematów obliczeniowych wykorzystująca sympleksy zwykle jest warunkowo stabilna ze względu na krok czasowy. Ograniczenie to w przypadku zadań nieliniowych nie jest dokuczliwe gdyż i tak najczęściej przyjmuje się krótki krok czasowy aby dokładnie uwzględnić efekty nieliniowe (kontakt, tarcie itp.).

Drugim omówionym w pracy podejściem jest sformułowanie prędkościowe. W szczególnym przypadku jest ono identyczne ze sformułowaniem przemieszczeniowym, jak i całą grupą klasycznych metod całkowania równań różniczkowych (metody Rungego–Kutty, Newmarka, różnic centralnych). Pozwala ono bezpośrednio uwzględnić równania konstytutywne opisane prędkościami odkształceń i w związku z tym może być skutecznie wykorzystywana przy modelowaniu dużych deformacji czy plastycznego płynięcia. Także w tym przypadku zastosowanie sympleksów daje trójkątne macierze współczynników układu równań. Sformułowanie prędkościowe pozwala uzyskać schematy bezwarunkowo stabilne, chociaż nie wszystkie warianty elementów symplektycznych tym się charakteryzują.

Ruch punktu materialnego w strefie kontaktu (wejście w kontakt, odrywanie) opisany jest nieciągłą funkcją prędkości. W pracy pokazano sposób modyfikacji ruchu punktu przed wejściem w kontakt z przeszkodą, tak aby jego prędkość była funkcją ciągłą a zarazem aby spełnione były przemieszczeniowe warunki kontaktu. Podejście to jest uniwersalne i może być stosowane we wszystkich metodach bazujących na prędkościach jako podstawowych wielkościach opisujących zadanie.

Zaprezentowane w pracy podejścia sprawdzono na prostych zadaniach testowych. Pozwoliło to uwypuklić charakterystyczne zjawiska i ułatwiło obserwację i ocenę skuteczności metod w konkretnych przypadkach. Wykorzystywano modele ustrojów jednowymiarowych (struna pręt drgający osiowo i poprzecznie), dwuwymiarowych (płaski stan naprężenia, stan osiowosymetrycznego odkształcenia, płyta) oraz trójwymiarowych (przestrzenny stan odkształcenia). Powodzenie w przypadku prostszych zadań pozwoliło przejść do modelowania bardziej złożonych układów: dynamicznego zgniatania cylindra z zewnętrznym i wewnętrznym kontaktem, badanie stabilności drgań układu pantografowego poruszającego się po nieskończonej długiej strunie, generowania korugacji w kole kolejowym, sprę-

żystego odbicia obręczy wzmocnionej jednostronnie pracującymi szprychami (ciągnami).

Zagadnienie opisane w niniejszej pracy nie jest zamknięte. Pozostaje cały szereg kwestii, które nasuwają się w kolejnych rozdziałach. Jest to choćby zastosowanie równoległego obliczania zadań. Możliwość rozseparowania układu globalnego, fizycznego i matematycznego, na podukłady pozwala rozdzielić wysiłek obliczeniowy na wiele procesorów komputera. Ta sama cecha pozwala wyseparować podukład ograniczony do kilku bądź jednego elementu, w którym prowadzi się wolno zbieżny iteracyjny proces obliczeniowy, i analizować go odrębnie. Wyseparowane czasoprzestrzenne rozety elementów symplektycznych są niczym innym jak macierzowymi operatorami przejścia do następnego kroku czasowego na poziomie danego węzła. Operatory te mają stałe rozmiary, niewielkie w porównaniu z całym układem, i mogą być wyznaczone analitycznie. Dalszym krokiem będzie już połączenie rachunku symbolicznego z przybliżonym wyznaczaniem wynikowych wartości działania tych operatorów.

Sprawą otwartą pozostają też doświadczenia związane ze zmianą liczby węzłów w siatce przestrzennej w przypadku dużych układów rzeczywistych jak i związane z tym badania analityczne.

Zagadnienia rozwinięte w pracy można z łatwością zastosować w zadaniach transportu masy, ciepła, czy też w problemach termosprężystości. Z uwagi na niższy rząd pochodnych względem czasu i sam charakter fizyczny takich zadań można oczekiwać wyższej jakości rozwiązań podejściem czasoprzestrzennym w porównaniu z dotychczas stosowanymi metodami.



# Summary

Dynamic contact problems are solved by computer means for the reason of complexity of phenomena that occur in high speed processes. A rail–wheel contact, high speed metal forming or crash are the practical examples of such a group of problems. Existing numerical methods have, however, some limitations. They disable for example the arbitrary meshing both in space and in time, which would increase the accuracy of computation and the precision of contact zone modeling.

In the thesis the advanced way of numerical modeling of dynamic contact problems in the time space was presented. First the formulation of the space–time finite element method was presented. Both the displacement and velocity formulation was developed. The space–time approach presented in the thesis can be considered as the extension of the finite element method, which is usually applied to space. In FEM time variable requires the separate treatment. The discretization is uncoupled. In the space–time finite element method the discretization is applied at the same time to the space and to time, ie. to the time space. The spatial and time discretization are coupled. It was shown that in the particular case the presented approach is identical with the finite element method applied to spatial derivatives, and the difference method applied to time derivatives. In the general case the structure can be split into finite subdomains in the non stationary way. Properties of the method were examined in details. The amplitude error, phase error and numerical damping were tested and compared with other methods. Special shapes of space–time finite elements (simplex–shaped) decouple the resulting system of algebraic equations. It eliminates the triangulation stage in the solution process. Physical properties of the simplex shaped mesh are interesting since the information flow in the direction of slope edges in the space–time mesh is limited. It enables to treat infinite uni–dimensional structures subjected to a fastly moving load by reducing the infinite system of finite elements to a set of few elements only.

The soft way method was used for contact conditions. The contact conditions with singular velocity in the contact were modified to obtain continuous displacement and

velocity functions. The displacement is computed in a consistent way from the velocity. Both the consistency and continuity were achieved by the reduction of the velocity one time step before the penetration. Another way proposed for contact modelling is directly derived from the space–time finite element modeling. The time step is divided in the selected part of the domain, in our case in the contact region. Triangular space–time elements were used to this purpose. Presented technique was applied in the simulation of the corrugation generation in the train wheel. The solution of the problem, intensively investigated by researchers, showed the wave nature of the wheel polygonization.

The adaptivity of the mesh is the fundamental advantage of the space–time approach. The *r*–adaptive technique enables to relocate the mesh joints, with the limited speed, however. The *h*–adaptive method allows to add or remove nodes in space and in this way to refine or coarsen the spatial mesh. Mesh adaptivity applied to structural dynamics should fulfil strong restrictions. Since each perturbation in the mesh or in nodal values considerably changes the response of the modified system, the simple interpolation for incorporated joints fails. In the thesis the space–time triangular elements described by velocities enables successful *h*–adaptation for vibrating structures, not only in low frequency range but also in wave problems.

# Bibliografia

- [1] S. Adjerid i J.E. Flaherty. A moving-mesh finite element method with local refinement for parabolic partial differential equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 55(1-2):3-26, 1986.
- [2] M. Ainsworth, J.Z. Zhu, A.W. Craig i O.C. Zienkiewicz. Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-posteriori error estimator in the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 28:2161-2174, 1989.
- [3] P. Alart. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92(3):353-375, 1991.
- [4] J.H. Argyris i A.S.L. Chan. Application of the finite elements in space and time. *Ing. Archiv*, 41:235-257, 1972.
- [5] J.H. Argyris i D.W. Scharpf. Finite elements in space and time. *Nucl. Engng Design*, 10:456-469, 1969.
- [6] J.H. Argyris i D.W. Scharpf. Finite elements in time and space. *Aeron. J. Roy. Aeron. Soc.*, 73:1041-1044, 1969.
- [7] P. Azerad. *Analyse des equations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'equation de transport*. Rozpr. dokt., Universite de Neuchatel, Suisse, 1996.
- [8] I. Babuska i W.C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 12:1597-1615, 1978.
- [9] I. Babuska i W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:736-754, 1978.
- [10] I. Babuska i W.C. Rheinboldt. A posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18:565-589, 1981.

- [11] C.D. Bailey. A new look at Hamilton's principle. *Foundations of Physics*, 5:433–451, 1975.
- [12] M.J. Baines i A.J. Wathen. Moving finite element methods for evolutionary problems. I. Theory. *J. Comput. Phys.*, 79(2):245–269, 1988.
- [13] C. Bajer. Modelowanie układów dynamicznych przy pomocy nieprostokątnych czasoprzestrzennych elementów skończonych. W: *Zeszyty Naukowe Pol. Świętokrzyskiej*, t. Budownictwo 18, str. 5–10, Kielce, 1984.
- [14] C. Bajer. Movable grid approach by the space–time element method. W: *11th IKM Conf.*, str. 5–8, Weimar, 1987.
- [15] C. Bajer. Mesh r–adaptation in structural dynamics. W: *12th IKM Conf.*, t. 4, str. 5–8, Weimar, 1990.
- [16] C. Bajer. Space–time finite element formulation for the dynamical evolutionary process. *Appl. Math. and Comp. Sci.*, 3(2):251–268, 1993.
- [17] C. Bajer i R. Bogacz. Dynamic contact problem by means of the space-time element method. W: R. Gruber, J. Periaux i R.P. Shaw, ed., *Proc. 5th Int. Symp. Numer. Meth. in Engng*, t. 1, str. 313–318, Lausanne, September 1989. Springer-Verlag.
- [18] C. Bajer i R. Bogacz. Dynamic contact problem with friction by the use of the space–time element method. *ZAMM*, 70(6):T674–T676, 1990.
- [19] C. Bajer, R. Bogacz i C. Bonthoux. Adaptive space–time elements in the dynamic elastic–viscoplastic problem. *Comput. and Struct.*, 39:415–423, 1991.
- [20] C. Bajer i C. Bohatier. Solution of thermomechanical problems by the space–time finite elements. W: J.-L. Chenot, R.D. Wood i O.C. Zienkiewicz, ed., *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, str. 215–219, Valbonne, 1992. A.A. Balkema.
- [21] C. Bajer i C. Bohatier. Modélisation des systèmes mécaniques sous sollicitations dynamiques et résolution numérique des problèmes non linéaires associés. W: *Méth. Inform. de la Conception Industr., Méc. des Struc.*, str. 79–90, Marseille, 1993.
- [22] C. Bajer i C. Bohatier. Solution of thermomechanical problems by the space–time finite elements. W: *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, str. 215–219. Balkema, 1993.



- [23] C. Bajer i C. Bohatier. Velocity formulation for metal forming by the space–time finite element method. W: *Int. Workshop on Mechanisms Des. and Anal., COMES'93*, str. 83–86, Clermont–Ferrand, 1993.
- [24] C. Bajer i C. Bohatier. The soft way method and the velocity formulation. *Comput. and Struct.*, 55(6):1015–1025, 1995.
- [25] C. Bajer, C. Bohatier i M. Sofonea. Space–time analysis for dynamic contact problems. *Int. J. Eng. Sci. (w druku)*.
- [26] C. Bajer, G. Burkhardt i F. Taltello. Accuracy of the space–time finite element method. W: *11th IKM Conf.*, str. 9–12, Weimar, 1987.
- [27] C. Bajer, G. Burkhardt i F. Taltello. Anwendung der Methode der Raum–Zeit Elemente bei der dynamischen Untersuchung von Stahlbetonbauteilen. *Bauplanung–Bautechnik*, 43(7):320–323, 1989.
- [28] C. Bajer i W. Kosiński. Thermal waves in heat conductor and their numerical modelling. *Comp. Ass. Mech. Eng. Sci.*, 2:307–319, 1995.
- [29] C. Bajer i A. Podhorecki. Space–time element method in structural dynamics. *Arch. of Mech.*, 41:863–889, 1989.
- [30] C.I. Bajer. Triangular and tetrahedral space–time finite elements in vibration analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 23:2031–2048, 1986.
- [31] C.I. Bajer. Notes on the stability of non–rectangular space–time finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24:1721–1739, 1987.
- [32] C.I. Bajer. Dynamics of contact problem by the adaptive simplex–shaped space–time approximation. *J. Theor. Appl. Mech.*, 7:235–248, 1988. Special issue, supplement No. 1.
- [33] C.I. Bajer. Adaptive mesh in dynamic problem by the space–time approach. *Comput. and Struct.*, 33(2):319–325, 1989.
- [34] C.I. Bajer i C.G. Bonthoux. State–of–the–art in true space–time finite element method. *Shock Vibr. Dig.*, 20:3–11, 1988.
- [35] Cz. Bajer i R. Bogacz. O symulacji generowania nierówności w dynamicznym zagadnieniu kontaktu tocznego metodą elementów czasoprzestrzennych. W: *IX Konf. Metody Komputerowe w Mechanice*, str. 23–30, Politechnika Krakowska, 1989.

- [36] R.E. Bank i R.F. Santos. Analysis of some moving space–time finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(1):1–18, 1993.
- [37] T. Belytschko i M.O. Neal. Contact–impact by the pinball algorithm projection, and Lagrangian methods. W: *Computational techniques for Contact, impact, penetration and perforation of solids*, t. AMD-103, str. 97–140. The Appl. Mech. Div., ASME.
- [38] D.J. Benson. An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 72:305–350, 1989.
- [39] R. Bogacz. On self–excitation of moving oscillator interacting at two points with a continuous system. *Nonlinear Vibr. Probl.*, 16:239–250, 1979.
- [40] R. Bogacz. Stability of several degree of freedom moving subsystem interacting with waves of continuous media. W: G. Bianchi i W. Schiehlen, ed., *IUTAM/IFTOMM Symposium*, str. 17–29, Udine 1985, 1986. Springer, Berlin Heidelberg.
- [41] R. Bogacz, M. Brzozowski, O. Mahrenholtz i J. Rońda. Dynamic effects in a rolling contact problem. *ZAMM*, 67(4):T176–T179, 1987.
- [42] R. Bogacz, T. Krzyżyński i K. Popp. Influence of shear deformation and rotatory inertia on the solutions of the generalized Mathews’ problems. *Z. angew. Math. Mech.*, 73(1):5–13, 1993.
- [43] R. Bogacz, P. Meinke i S. Dżuła. Vehicle/track–dynamic interaction for high speed frequency range. W: *3rd Polish–German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, str. 165–179, IPPT PAN, Warszawa, 1993.
- [44] R. Bogacz i K. Popp. Dynamics and stability of train–track systems. W: H.F. Wolfe M. Petyt, ed., *Proc. Sec. Int. Conf. Recent Advances in Structural Dynamics*, str. 711–725, Southampton, 1984.
- [45] R. Bogacz, J. Rońda i M. Brzozowski. Corrugations in rolling contact problems. *ZAMM*, 67(11):567–568, 1987.
- [46] R. Bogacz i T. Szolc. On methods of solution for the discrete–continuous system under moving load. *Z. angew. Math. Mech.*, 72(4):T16–T19, 1992.
- [47] R. Bogacz i T. Szolc. Analysis of dynamic interaction between the continuous string and moving oscillator. *Eng. Trans.*, 41(3-4):361–380, 1993.

- [48] C. Bohatier. A large deformation formulation and solution with space–time finite elements. *Arch. Mech.*, 44:31–41, 1992.
- [49] C. Bohatier i C. Bajer. Kinematic approach for dynamic contact problems — the geometrical soft way method. *Engng. Trans.*, 43(1-2):101–111, 1995.
- [50] C. Bohatier i J.-L. Chenot. Finite element formulation for non–steady–state large deformations with sliding or evolving contact boundary conditions. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 28:753–768, 1989.
- [51] R. Bonnerot i P. Jamet. A second order finite element method for the one–dimensional Stefan problem. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 8:811–820, 1974.
- [52] R. Bonnerot i P. Jamet. Numerical computation of the free boundary for the two–dimensional Stefan problem by space–time finite elements. *J. Comput. Phys.*, 25:163–181, 1977.
- [53] R.M. Brach. Tangential restitution in collision. W: *Computational techniques for Contact, impact, penetration and perforation of solids*, t. AMD-103, str. 1–7. The Appl. Mech. Div., ASME.
- [54] J. Brzeziński i M. Pietrzakowski. The investigation of nonstationary vibrations of simple hybrid system by the space–time finite element method (in Polish). *Archiwum Budowy Maszyn*, 26(4):511–526, 1979.
- [55] S.K. Chan i I.S. Tuba. A finite element method for contact problems of solid bodies: I. Theory and validation. *Int. J. Mech. Sci.*, 13:627–639, 1971.
- [56] J. Chung i G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method. *J. Appl. Mech.*, 60:371–375, 1993.
- [57] M. Cocu, E. Pratt i M. Raous. Formulation and approximation of quasistatic frictional contact. *Int. J. Eng. Sci.*, 34:783–798, 1996.
- [58] R. Cook, D.S. Malkus i M.E. Plesha. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Willey & Sons, third edition, 1989.
- [59] A. Cournier i J.H. Heegaard. An augmented lagrangian method for large slip contact problem. W: *Euromech 273, Unilateral contact and dry friction*, str. 69–72, La Grande Motte, France, 1990.

- [60] A. Curnier, Q.-C. He i J.J. Telega. Formulation of unilateral contact between two elastic bodies undergoing finite deformations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie II*, 314:1–6, 1992.
- [61] W. Cyganecki. Kryterium doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):389–397, 1979.
- [62] W. Cyganecki. O sposobach doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(4):717–726, 1980.
- [63] L. Demkowicz. *Adaptacyjne metody elementów skończonych*. Monografie. Politechnika Krakowska, Kraków, 1985.
- [64] L. Demkowicz, Ph. Devloo i J.T. Oden. On an  $h$ -type mesh refinement strategy based on a minimization error. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 3:67–89, 1085.
- [65] R.E. Dick i W.H. Harris. Fully automatic rezoning of evolving geometry problems. W: J.-L. Chenot, R.D. Wood i O.C. Zienkiewicz, ed., *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, str. 243–248, Valbonne, 1992. A.A. Balkema.
- [66] E.A. Dorfi i L.O. Druhy. Simple adaptive grids for 1–D initial value problems. *J. Comp. Phys.*, 69:175–195, 1987.
- [67] P. Faurre. Notes d'optimisation. Prace: , Ecole Polytechnique, Dép. de Math. Appl., 1986.
- [68] C.A. Felippa. Error analysis of penalty function technique for constraint definition in linear algebraic systems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 11:709–728, 1977.
- [69] C.A. Felippa. Iterative procedure for improving penalty function solutions of algebraic systems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 12:821–836, 1978.
- [70] U. Finberg. Noise generation of railways wheels. W: *2rd Polish–German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, str. 93–104, IPPT PAN, Warszawa, 1991.
- [71] I. Fried. Condition of finite element matrices generated from nonuniform meshes. *AIAA J.*, 10(2):219–221, 1972.
- [72] I. Fried. Finite element analysis of time–dependent phenomena. *AIAA J.*, 7:1170–1173, 1989.

- [73] C.G. Garino, J. Oliver i E. Oñate. Use of hyperelastic  $J_2$  model in hydrocodes. W: D.R.J. Owen i E. Oñate, ed., *Computational plasticity. Fundamentals and applications. Proc. Fourth Int. Conf.*, str. 1889–1900, Barcelona, 1995.
- [74] A.E. Giannakopoulos. An adaptive meshing scheme for the steady state convective-diffusion problems using FEM. *Comput. and Struct.*, 31:545–551, 1989.
- [75] M.E. Gurtin. Variational principles for linear elastodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16:34–50, 1964.
- [76] M.E. Gurtin. Variational principles for linear initial-value problems. *Quart. Appl. Math.*, 22:252–256, 1964.
- [77] R.P.S. Han, J. Lu, H. Chen i R Houlston. SUPRA — a novel space-time finite element. W: J. Robinson, ed., *FEM today and the future*, 1993.
- [78] Q.C. He, J.J. Telega i A. Cournier. Unilateral contact of two solids subjected to large deformations: formulation and existence results. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 452:2691–2717, 1996.
- [79] K. Heiduschke. Why, for finite deformations, the updated lagrangian formulation is obsolete. W: *Fourth Int. Conf. on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS 4)*, str. 2165–2176, Barcelona, Spain, 1995.
- [80] K. Hempelmann, F. Hiss, K. Knothe i B. Ripke. The formation of wear patterns on rail tread. *Wear*, str. 179–195, 1991.
- [81] I. Herrera i J. Bielak. A simplified version of Gurtin’s variational principles. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 53:131–149, 1974.
- [82] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes i R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engng and Struct. Dyn.*, 5:283–292, 1977.
- [83] E. Hinton, T. Rock i O.C. Zienkiewicz. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 4(3):245–249, 1976.
- [84] T. Hirakawa, F. Fujita, M. Kamata i Y. Yamada. Analysis of strip rolling by the finite element method. W: *Advanced Technology of Plasticity*, str. 1132–1137. 1984. vol. II.

- [85] C. Hoff, T.J.R. Hughes, G. Hulbert i P.J. Pahl. Comparison of the Hilbert-hughes-taylor  $\alpha$ -method and the  $\theta_1$ -method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 76:87–93, 1989.
- [86] N.J. Hoff. Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformation. *Q. Appl. Math.*, 12(1):49, 1954.
- [87] T.J.R. Hughes i G.M. Hulbert. Space–time element methods for elastodynamics: formulations and error estimates. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 66:339–363, 1988.
- [88] T.J.R. Hughes, I. Levit i J. Winget. An element by element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 36:241–254, 1983.
- [89] T.R.J. Hughes, R.L. Taylor, J.L. Sackman, A. Cournier i W. Kanoknukulchai. A finite element method for a class of contact–impact problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 8:249–276, 1976.
- [90] G.M. Hulbert. *Space–time finite element method for second–order hyperbolic equation*. Rozpr. dokt., Stanford University, CA, August 1989.
- [91] M. Jean. Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformations problems. *J. Theor. Appl. Mech.*, 7, 1988. Special issue, supplement No. 1.
- [92] M. Jean. Dynamics of rigid bodies with dry friction and partially elastic collisions. *In. Series of Numer. Math.*, 101:57–70, 1991.
- [93] I.W. Johnson, A.J. Wathen i M.J. Baines. Moving finite element methods for evolutionary problems. II. Applications. *J. Compu. Phys.*, 79(2):270–297, 1988.
- [94] K.-J. Joo i E.L. Wilson. An adaptive finite element technique for structural dynamic analysis. *Comput. and Struct.*, 30(6):1319–1339, 1988.
- [95] Z. Kacprzyk. Analiza drgań komina przemysłowego obciążonego sejsmicznie. *Archiwum Inż. Ląd.*, 27(3):507–516, 1981.
- [96] Z. Kacprzyk. Space–time superelement (in Polish). *Archiwum Inż. Ląd.*, 28(1–2):47–55, 1982.

- [97] Z. Kacprzyk. Superelement czasoprzestrzenny. *Archiwum Inż. Ląd.*, 28(1–2):47–55, 1982.
- [98] Z. Kacprzyk. O zastosowaniu funkcji ważonych w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Prace Naukowe, budownictwo, Politechnika Warszawska*, (85):83–94, 1984.
- [99] Z. Kacprzyk i T. Lewiński. Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom. *Eng. Trans.*, 31(2):213–240, 1983.
- [100] Z. Kączkowski. The method of finite space–time elements in dynamics of structures. *J. Tech. Phys.*, 16(1):69–84, 1975.
- [101] Z. Kączkowski. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 22(3):365–378, 1976.
- [102] Z. Kączkowski. General formulation of the stiffness matrix for the space–time finite elements. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):351–357, 1979.
- [103] Z. Kączkowski. O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych. *Mechan. Teor. i Stos.*, 21(4):531–542, 1983.
- [104] Z. Kączkowski. niesprężone układy równań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Arch. Inż. Ląd.*, 32(1):39–50, 1986.
- [105] Z. Kączkowski. O rozwiązywaniu pewnego dynamicznego problemu kontaktowego metodą elementów czasoprzestrzennych. *Zeszyty Nauk. PP, budownictwo*, 31:63–72, 1988.
- [106] Z. Kączkowski. A heat flow and mass transport problem. The space–time element method (STEM). W: *Proc. 10th Polish Conf. Comp. Meth. in Mech.*, str. 317–324, Świnoujście, 1991.
- [107] Z. Kączkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych — jej zalety i wady. W: *VIII Symp. Dynamiki i Konstrukcji*, str. 259–266, Jawor, 1993.
- [108] Z. Kączkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych. W: *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, pod red. M. Kleibera, str. 154–206. PWN Warszawa, 1995.
- [109] Z. Kączkowski i J. Langer. Synthesis of the space–time finite element method. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(1):11–17, 1980.

- [110] Z. Kączkowski i M. Witkowska. Macierz przeniesienia w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 24(1):59–66, 1978.
- [111] Z. Kączkowski i M. Witkowski. Uwzględnienie tłumienia zewnętrznego w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 23(3):243–254, 1977.
- [112] Z. Kączkowski i M. Żysko. Drgania giętne pręta metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 24(1):67–78, 1978.
- [113] A. Kamoulakos. A simple "benchmark" for impact. *Benchmark*, str. 31–35, 1990.
- [114] N. Kikuchi i J.T. Oden. *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element method*. SIAM, 1988.
- [115] M. Kleiber. *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, str. 117–120. PWN, 1985.
- [116] M. Kleiber i M. Korzeniowski. Ocena efektywności metody "element po elemencie" w liniowej i nieliniowej analizie konstrukcji. *Mechanika i Komputer*, 10:5–17, 1991.
- [117] K. Knothe. *Rail Corrugations*. ILR Bericht 56, Berlin, 1983.
- [118] K. Knothe i K. Hempelmann. The formation of corrugation pattern on the rail tread. A linear theory. W: *2nd Polish–German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, str. 77–91, IPPT PAN, Warszawa, 1991.
- [119] A. Krupowicz. *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*. PWN, 1986.
- [120] T. Krzyżyński. Dynamika układów ciągłych o okresowych własnościach struktury i wzbudzenia. *Prace IPPT*, 38, Warszawa, 1995.
- [121] Z.B. Kuang i S.N. Atluri. Temperature field due to a moving heat source. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 52:274–280, 1985.
- [122] J. Langer. Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równania różniczkowego ruchu. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):359–369, 1979.
- [123] F. Lebon i M. Raous. Multibody contact problem including friction in structure assembly. *Comput. and Struct.*, 43:925–934, 1992.



- [124] T. Lewiński. Stability analysis of a difference scheme for the vibration equation with a finite number of degrees of freedom. *Zastosowania Matematyki*, 18(3):473–486, 1984.
- [125] R. Löhner. Adaptive finite element for transient problems with moving bodies. *Comput. and Struct.*, 30(1–2):303–317, 1988.
- [126] O. Mahrenholtz, J. Rońda, R. Bogacz i M. Brzozowski. Finite deformation in the rolling contact problem. W: *Proc. Int. Conf. on Nonlinear Mechanics*, str. 290–295, Shanghai, October 1985.
- [127] R.I. Maier. Natural frequency of rail track and its relationship to rail corrugation. W: *Rail Research Papers of B.H.P. Steel International Group*, str. 89–103. Melbourne, 1976.
- [128] K. Miller. Moving finite elements. II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(6):1033–1057, 1981.
- [129] K. Miller i R.N. Miller. Moving finite elements. I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(6):1019–1032, 1981.
- [130] J.J. Moreau. Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 296:1473–1476, 1983.
- [131] J.J. Moreau. *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, str. 11–82. Number 302 in CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 1988.
- [132] R. Mullen i T. Belytschko. An analysis of an unconditionally stable explicit method. *Comput. and Struct.*, 16:691–696, 1983.
- [133] W. Nowacki. *Dynamika budowli*. Arkady, Warszawa, 1972.
- [134] J.T. Oden. A generalized theory of finite elements, II. Applications. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1:247–259, 1969.
- [135] J.T. Oden i T.L. Lin. On the general rolling contact problem for finite deformations of viscoelastic cylinder. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 57:297–367, 1986.
- [136] W. Olszak i P. Perzyna. Stationary and non-stationary visco-plasticity form. W: M.F. Kanninen, W.F. Adler i A.R. Rosenfeld, ed., *Inelastic behaviour of solids*, str. 53–75. McGraw-Hill, 1970.

- [137] S.K. Pascoe i J.E. Mottershead. Two new finite element contact algorithms. *Comput. and Struct.*, 32:137–144, 1989.
- [138] P. Perrochet i P. Azerad. Space–time integrated least–squares: solving a pure advection equation with a pure diffusion operator. *J. Comput. Phys.*, 117:183–193, 1995.
- [139] P. Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances Appl. Mech.*, 9:243–377, 1966.
- [140] L.R. Petzhold. Observations on an adaptive moving grid method for one–dimensional systems of partial differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 3:347–360, 1987.
- [141] M. Pietrzakowski. Simulation investigation of damping in nonlinear torsional discrete–continuous system. *Machine Dyn. Probl.*, 3:65–77, 1992.
- [142] M. Pietrzakowski. Analiza stanów nieustalonych w układach napędowych przy użyciu metody elementów czasoprzestrzennych. *Prac IPBM, Politechnika Warszawska*, 16:97–112, 1995.
- [143] M. Pietrzakowski. Sprężysto–tarciový model nierozłącznego połączenia listwy z podłożem w metodzie elementów czasoprzestrzennych. W: *Księga jubileuszowa profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, str. 321–332. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.
- [144] A. Podhorecka. Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. *Mech. Teoret. i Stos.*, 26(4):683–699, 1988.
- [145] A. Podhorecka i A. Podhorecki. Metoda elementów czasoprzestrzennych w zastosowaniu do rozwiązywania cęgien wiotkich. W: *Księga jubileuszowa profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, str. 333–343. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.
- [146] A. Podhorecki. The viscoelastic space–time element. *Comput. and Struct.*, 23:535–544, 1986.
- [147] A. Podhorecki. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. *Prace Nauk. ATR w Bydgoszczy, budownictwo*, 24:21–29, 1987.

- [148] A. Podhorecki. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Rozpr. Inż.*, 37(1):41–51, 1989.
- [149] A. Podhorecki. Metoda elementów czasoprzestrzennych w geometrycznie nieliniowej teorii lepkosprężystości. *Prace: 45, Zeszyty Nauk. ATR w Bydgoszczy, Rozprawy*, 1991.
- [150] A. Podhorecki i A. Podhorecka. Lepkosprężysty element czasoprzestrzenny. *Engng. Trans.*, 33(1–2):3–22, 1985.
- [151] J.-Ph. Ponthot. The use of the Eulerian–Lagrangian formulation including contact: Applications to forming simulation via FEM. W: *Numerical methods in industrial forming processes*, str. 293–300. Balkema, 1992.
- [152] M. Raous, P. Chabrand i F. Lebon. Numerical methods for frictional contact problems and applications. *J. Theor. Appl. Mech.*, 7:111–128, 1988. Special issue, supplement No. 1.
- [153] M.M. Rashid. Deformation extrapolation and initial predictors in large–deformation finite element analysis. *Comp. Mech.*, 16:281–289, 1995.
- [154] A.B. Richelsen. Friction modelling in a finite strain viscoplastic analysis of a rolling process. W: *Euromech 273, Unilateral contact and dry friction*, str. 121–124, La Grande Motte, France, 1990.
- [155] R.D. Richtmyer i K.W. Morton. *Difference methods for initial–value problems*. John Wiley & Sons, 1967.
- [156] S. rid i J.E. Flaherty. Second-order finite element approximation and a posteriori error estimation for two–dimensional parabolic systems. *Prace: 87-1, Rensselaer Polytechnic Institute, Department of Computer Science, Troy, New York 12180-3590*, January 1987.
- [157] B. Ripke i K. Knothe. High frequency vehicle–track interactions in consideration of nonlinear contact mechanics. W: *3rd Polish–German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, str. 207–218, IPPT PAN, Warszawa, 1993.
- [158] J. Robinson. An introduction to hierarchical displacement elements and the adaptive technique. *Finite Elem. Anal. and Des.*, 2:377–388, 1986.

- [159] F. Taltello i G. Burkhardt. Zur Anwendung der Methode der Raum–Zeit–Elemente auf die dynamische Untersuchung von Stahlbetonbauteilen. Prace: 68, Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar, 1988.
- [160] J.J. Telega. Nierówności wariacyjne w zagadnieniach kontaktowych mechaniki. W: *Mechanika kontaktu powierzchni*, str. 51–165. Ossolineum, 1988.
- [161] J.J. Telega i A. Galka. Nonsmooth mechanics and dynamic contact problems. *J. Theor. Appl. Mech.*, 34:43–56, 1996.
- [162] D.M. Trujillo. An unconditionally stable explicit algorithm for structural dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 11:1579–1592, 1977.
- [163] N.-E. Wiberg, L. Zeng i X. Li. Error estimation and adaptivity in elastodynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 101:369–395, 1992.
- [164] M. Witkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych jako ciąg zadań typu statycznego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(4):727–734, 1980.
- [165] M. Witkowski. *O czasoprzestrzeni w dynamice budowli*. Prace Naukowe, budownictwo 80. Politechnika Warszawska, 1983.
- [166] M. Witkowski. Trójkątne elementy czasoprzestrzenne w analizie zagadnień falowych. *Engng. Trans.*, 33(4):549–564, 1985.
- [167] M. Witkowski. Scena i kulisy metody elementów czasoprzestrzennych. W: *Księga jubileuszowa profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, str. 45–55. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.
- [168] W.L. Wood, M. Bossak i O.C. Zienkiewicz. An alpha modification of Newmark's method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 15:1562–1566, 1981.
- [169] P. Wriggers i B. Nour-Omid. Solution methods for contact problems. Prace: UCB/SESM 84–09, Univ. of California, Berkeley, USA, 1984.
- [170] P.A. Zegeling. Moving–grid methods for time–dependent partial differential equations. Prace: 94, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1993.
- [171] L.F. Zeng i N.-E. Wiberg. Spatial mesh adaptation in semidiscrete finite element analysis of linear elastodynamic problems. *Comp. Mech.*, 9(5):315–332, 1992.

- [172] L.F. Zeng, N.-E. Wiberg i L. Bernspång. An adaptive finite element procedure for 2D dynamic transient analysis using direct integration. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 34:997–1014, 1992.
- [173] J. Zhu i O.C. Zienkiewicz. Adaptive techniques in the finite element method. *Commun. Appl. Numer. Meth.*, 4:197–204, 1988.
- [174] O.C. Zienkiewicz. The generalized finite element method – state of the art and future directions. *Trans. ASME*, 50:1210–1217, 1983.
- [175] O.C. Zienkiewicz i O. Cormeau. Visco-plasticity by the finite element process. *Arch. Mech.*, 24:873–888, 1972.
- [176] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, J. Gago i I. Babuska. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. W: J. Whiteman, ed., *Mathematics of finite elements and applications (IV)*, str. 313–346, New York, 1983. Academic Press.
- [177] O.C. Zienkiewicz i J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24:337–357, 1987.
- [178] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu i N.G. Gong. Effective and practical  $h$ - $p$ -version adaptive analysis procedures for the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 28:879–891, 1989.