

Czesław Bajer

ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ PRZY RZADKIEJ MODYFIKACJI MACIERZY GŁÓWNEJ

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm odwracania rzadko modyfikowanej macierzy układu równań liniowych oraz zastosowania go do rozwiązywania układu równań ze zmodyfikowaną macierzą. Przedstawione rozwiązanie jest skuteczne, gdy liczba modyfikowanych elementów jest dużo mniejsza od rozmiaru macierzy. Metoda jest atrakcyjna, gdy modyfikowane elementy zajmują dowolną pozycję w macierzy.

SOLUTION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS IN THE CASE OF SPARSE MODIFICATION OF THE MAIN MATRIX

Summary

A simple solution algorithm for the inversion of sparsely modified matrix of a linear system of equations is presented and then applied to solve a system of equations with modified matrix. Presented solution is efficient when the number of modified elements is far less than the matrix dimension. The method is attractive when modified elements have any positions.

1. Wprowadzenie

W wielu zagadnieniach mechaniki budowli zasadniczym problemem jest otrzymanie rozwiązania macierzowego układu równań. Jednokrotne przeprowadzenie takiej operacji nie przedstawia zwykłej trudności. Kiedy jednak układ równań ma być rozwiązany wielokrotnie w trakcie obliczeń, przyjęte algorytmy najczęściej okazują się nieefektywne. Przykładem mogą być tu zagadnienia dynamiczne, kiedy to dokonuje się całkowania różniczkowego równania ruchu, zagadnienia reologiczne, plastyczności. W metodach krokowego rozwiązywania zadań nieliniowych najczęściej przyjmuje się jako znane pewne wartości niezbędne do wykonywania kroku a następnie po uzyskaniu wyników sprawdza poprawność ich przyjęcia. Jeśli różnice są zbyt duże, ponawia się obliczenia poprawiając wstępnie przyjęte wartości. W większości przypadków kolejne przybliżenia w danym kroku obliczeniowym otrzymywane są jako rozwiązania układu równań liniowych z modyfikowaną kolejno macierzą główną. Osobnym problemem, nie rozważanym w niniejszej pracy,

są przypadki zadań nieliniowych, w których można rozseparować wpływ liniowy i nieliniowy a ten ostatni przenieść do wektora prawych stron. Wspomniana modyfikacja macierzy może mieć miejsce w przypadku zmiany własności materiałowych w pewnych elementach dyskretyzowanej konstrukcji, zmiany warunków brzegowych, więzów niesymetrycznych, w zadaniach kontaktowych itp.

W dalszej części przedstawiony zostanie sposób znajdowania macierzy odwrotnej do danej macierzy zmodyfikowanej, jeśli znana jest macierz odwrotna do macierzy niezmodyfikowanej. Uogólniono tu podany przez Kowalczyka [1] sposób odwracania macierzy przy modyfikacji jednego elementu macierzy. Wykorzystując otrzymane zależności opracowano sposób rozwiązywania układu równań liniowych po modyfikacji, jeśli znane jest rozwiązanie przed modyfikacją. W obydwu przypadkach załączono przykładowe programy obliczeniowe, które mogą być łatwo wykorzystane.

2. Odwracanie macierzy zmodyfikowanej

Niech dana będzie macierz A , której macierz odwrotna A^{-1} jest znana i macierz B o wyrazach β_{ij} i o wymiarach identycznych co A o niewielkiej liczbie niezerowych elementów. Można zapisać, że jest

$$B = \sum_{l=1}^n b_l e_{i_l} e_{j_l} \quad (1)$$

gdzie: n — liczba niezerowych elementów w B ,

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

i — ciąg numerów wierszy kolejnych elementów b ,

j — ciąg numerów kolumn kolejnych elementów b .

Macierz, do której szukana jest macierz odwrotna, oznaczono A .

$$\check{A} = A + B = A + \sum_{l=1}^n b_l e_{i_l} e_{j_l} \quad (2)$$

Rozpatrzmy tożsamość

$$\begin{aligned} & \left(A + \sum_{l=1}^n b_l e_{i_l} e_{j_l}' \right) \left(A^{-1} + A^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n p_{km} e_{i_k} e_{j_m}' A^{-1} \right) = \\ & = I + \sum_{k=1}^n \sum_{n=1}^n p_{km} e_{i_k} e_{j_m}' A^{-1} + \sum_{l=1}^n b_l e_{i_l} e_{j_l}' A^{-1} + \\ & + \sum_{l=1}^n b_l e_{i_l} e_{j_l}' A^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n p_{km} e_{i_k} e_{j_m}' A^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Należy tak dobrać współczynnik p_{km} , aby prawa strona (3) równała się macierzy jednostkowej I .

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n p_{km} e_{i_k} e_{j_m}' A^{-1} + \sum_{l=1}^n b_l e_{i_l} e_{j_l}' A^{-1} + \sum_{l=1}^n b_l e_{i_l} e_{j_l}' A^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n p_{km} e_{i_k} e_{j_m}' A^{-1} = 0 \quad (4)$$

Ponieważ

$$e_i' A^{-1} e_j = \alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij} \text{ — element macierzy } A^{-1} \quad (5)$$

to po rozpisaniu wartości p można znaleźć rozwiązując układ równań (dla przykładu przyjęto macierz B o trzech niezerowych elementach)

$$\begin{bmatrix} b_1 \alpha_{j_1 i_1} + 1 & b_1 \alpha_{j_1 i_2} & b_1 \alpha_{j_1 i_3} \\ b_2 \alpha_{j_2 i_1} & b_2 \alpha_{j_2 i_2} + 1 & b_2 \alpha_{j_2 i_3} \\ b_3 \alpha_{j_3 i_1} & b_3 \alpha_{j_3 i_2} & b_3 \alpha_{j_3 i_3} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

lub

$$H \cdot P = D \quad (7)$$

Wówczas

$$P = H^{-1} D \quad (8)$$

Jeżeli macierz A po modyfikacji staje się macierzą osobliwą, to wówczas macierz H też jest osobliwa.

Oznaczając przez h_{ij} elementy macierzy H^{-1} otrzymujemy

$$P = \begin{bmatrix} -\bar{h}_{11} b_1 & -\bar{h}_{12} b_2 & -\bar{h}_{13} b_3 \\ -\bar{h}_{21} b_1 & -\bar{h}_{22} b_2 & -\bar{h}_{23} b_3 \\ -\bar{h}_{31} b_1 & -\bar{h}_{32} b_2 & -\bar{h}_{33} b_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ponieważ elementy macierzy P spełniają warunek (4) więc z (3) jest

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + A^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n p_{km} e_{i_k} e_{j_m}' A^{-1} = A^{-1} + A^{-1} \pi_1 P \pi_2^T A^{-1} \quad (10)$$

gdzie π_1 i π_2 są macierzami zerojedynkowymi przyporządkowującymi elementy macierzy P pozycjom w macierzy o rozmiarze macierzy A .

Ostatecznie

$$\check{A}^{-1} = A^{-1}(I + \pi_1 P \pi_2^T A^{-1}) \quad (11)$$

U w a g a 1. Do wyznaczenia macierzy odwrotnej do $\check{A}$ należy znać co najmniej n wierszy macierzy A^{-1} .

U w a g a 2. Do wyznaczenia macierzy odwrotnej do $\check{A}$ należy znać dokładnie tyle wierszy macierzy A^{-1} , ile jest różnych drugich indeksów wyrazów β_{ij} .

U w a g a 3. W przypadku macierzy symetrycznej A zamiast wierszy macierzy wystarczy znać odpowiednie kolumny macierzy A^{-1} .

Przykład liczbowy

Niech macierz A ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

elementy macierzy B niech wynoszą

$$b_1 = \beta_{12} = 2$$

$$b_2 = \beta_{32} = 1$$

$$b_3 = \beta_{21} = 1$$

Macierz $\check{A}$ przyjmuje postać

$$\check{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Macierze A^{-1} , H i H^{-1} mają postacie

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8,5 & -3,5 & 7,5 & -1,5 \\ -3,5 & 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 7,5 & 1,5 & -5,5 & 1,5 \\ -1,5 & -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \\ -8,5 & 7,5 & -2,5 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} -2,06 & 1,77 & -0,12 \\ -3,06 & 2,77 & -0,12 \\ -2,18 & 2,29 & -0,35 \end{bmatrix}$$

Wykonanie operacji (9) i (11) daje w wyniku macierz $\check{A}^{-1}$

$$\check{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,18 & 1,35 & -2,29 & 0,41 \\ 1,53 & 0,06 & -0,88 & 0,24 \\ -1,88 & -0,76 & 1,47 & -0,06 \\ -0,41 & 0,18 & 0,35 & -0,29 \end{bmatrix}$$

```

C      ALGORITHM 1
0001    SUBROUTINE INVMOD(AINV,AR,B,I,J,H,N,NSIZE)
0002    DIMENSION AINV(NSIZE,NSIZE),AR(NSIZE,NSIZE),B(N),I(N),J(N)
      1,H(N,N)
C***
C***    AINV - INVERTED MATRIX A
C***    I - A SEQUENCE OF ROW NUMBERS OF ELEMENTS B
C***    J - A SEQUENCE OF COLUMN NUMBERS OF ELEMENTS B
C***    NSIZE - A SIZE OF MATRIX A
C***    N - NUMBER OF ELEMENTS B
C***    AR - RESULT MATRIX
C***
0003    DO 100 K=1,N
0004      DO 10 L=1,N
0005      H(K,L)=B(K)*AINV(J(K),I(L))
0006    100 H(K,K)=H(K,K)+1.
C      INVERSION OF MATRIX H
0007    CALL INV(H,N)
0008    DO 200 II=1,NSIZE
0009      DO 200 K=1,NSIZE
0010      AR(II,K)=AINV(II,K)
0011      DO 200 JJ=1,N
0012      DO 200 L=1,N
0013    200 AR(II,K)=AR(II,K)-AINV(II,I(JJ))*H(JJ,L)*B(L)*AINV(J(L),K)
0014    RETURN
0015    END

```

Wszystkie obliczenia mogą być wykonane przy wykorzystaniu zamieszczonego algorytmu 1.

3. Rozwiązywanie układu równań przy zmianie małej liczby elementów macierzy układu.

Niech będzie dana macierz symetryczna A oraz macierz rzadka B . Niech A będzie zmodyfikowaną macierzą A .

$$\check{A} = A + B \quad (12)$$

Jeżeli znana jest macierz A^{-1} to w prosty sposób można znaleźć rozwiązanie układu

$$\overset{v}{A}\delta = F; \overset{v}{A}^{-1}F = \delta \quad (13)$$

Stosując (11) można zapisać

$$A\delta = (I + \pi_1 P \pi_2^T A^{-1})F \quad (14)$$

Jeśli oznaczy się

$$\overset{v}{F} = (I + \pi_1 P \pi_2^T A^{-1})F \quad (15)$$

to można zapisać ostatecznie

$$A\delta = \overset{v}{F} \quad (16)$$

```

C      ALGORITHM 2
0001  SUBROUTINE MODIF(AINV,B,I,J,F,MSIZE)
0002  DIMENSION H(N,N),R(N)
0003  DIMENSION AINV(MSIZE,MSIZE),B(N),I(N),J(N),F(MSIZE)
C***  MODIFICATION OF RIGHT HAND VECTOR IN A SYSTEM
C***  OF EQUATIONS INSTEAD OF MATRIX MODIFICATION
C***
C***  AINV - INVERTED MATRIX A
C***  B - MODIFYING ELEMENTS
C***  I - NUMBERS OF ELEMENT ROWS IN MODIFYING MATRIX B
C***  J - NUMBERS OF ELEMENT COLUMNS IN MODIFYING MATRIX B
C***  MSIZE - DIMENSION OF MATRIX A
C***  N - NUMBER OF MODIFYING ELEMENTS
C***  F - RIGHT HAND VECTOR
C***
C      GENERATION OF MATRIX H
0004  DO 1 K=1,N
0005  DO 1 L=1,N
0006  H(K,L)=B(K)*AINV(J(K),I(L))
0007  IF(K.EQ.L)H(K,L)=H(K,L)+1.
0009  1  CONTINUE
C      INVERSION OF MATRIX H
0010  CALL INV(H,N)
C      GENERATION OF VECTOR F
0011  DO 2 K=1,N
0012  R(K)=0.
0013  DO 2 L=1,N
0014  DO 2 M=1,MSIZE
0015  ,2  R(K)=R(K)-H(K,L)*B(L)*AINV(J(L),M)*F(M)
0016  DO 3 K=1,N
0017  3  F(I(K))=R(K)+F(I(K))
0018  RETURN
0019  END

```

W obydwu przypadkach (13 i (16) otrzymuje się to samo rozwiązanie.

Związki (15) i (16) obowiązują dla dowolnej postaci macierzy A (nie musi być ona macierzą symetryczną). Jednak pełną skuteczność przedstawionego sposobu rozwiązywania układu równań uzyskuje się w przypadku, w którym macierz A jest symetryczna. Dla takiego przykładu został opracowany zamieszczony algorytm 2.

W zakończeniu podkreślić należy, że znajomość macierzy odwrotnej A^{-1} potrzebna jest jedynie w ogólnych rozważaniach teoretycznych. W praktyce wykorzystywane są jedynie pewne kolumny tej macierzy, które w razie potrzeby są obliczane.

LITERATURA

- [1] Kowalczyk B. Wyznaczanie macierzy odwrotnych do macierzy pasmowych metodą uzupełniania diagonalii, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Mechanika, nr 25, 1976.