



Czesław Bajer

Metoda elementów czasoprzestrzennych w obliczeniach dynamiki konstrukcji

Warszawa 2009

Spis treści

1. Wstęp	1
1.1. Metody przybliżone	4
2. Pułapki symulacji komputerowych	9
2.1. Spektralna liczba uwarunkowania	15
2.2. Skalowanie	18
3. Metody numeryczne całkowania równań różniczkowych ru- chu	21
3.1. Metoda pojedynczego kroku SSPj	29
3.2. Metoda Parka	31
3.3. Metoda różnic centralnych	32
3.3.1. Stabilność metody	35
3.3.2. Dokładność metody	36
3.4. Metody Adamsa	37
3.4.1. Formuły Adamsa jawne (otwarte)	38
3.4.2. Metody Adamsa niejawne (zamknięte)	40
3.5. Metoda Newmarka	43
3.6. Metoda Bossaka	45
3.7. Metoda Parka-Housnera	47
3.7.1. Stabilność metody Parka-Housnera	48
3.8. Metoda Trujillo	51
3.9. Własności schematów całkowania	52
3.9.1. Dokładność metod	54
4. Metoda elementów czasoprzestrzennych	57
4.1. Sformułowanie metody – wariant przemieszczeniowy	65
4.1.1. Elementy czasoprzestrzenne w opisie przemieszczenio- wym	72
4.1.2. Modyfikowane funkcje kształtu	75

4.2.	Elementy czasoprzestrzenne wyższego rzędu	77
4.2.1.	Sześcienne funkcje kształtu	81
4.3.	Stabilność w siatkach niestacjonarnych	83
4.3.1.	Przypadek elementów czworokątnych	85
4.3.2.	Stabilność elementów ukośnych	89
4.4.	Makroelementy czasoprzestrzenne	91
4.5.	Opis prędkościowy metody	93
4.5.1.	Układ o jednym stopniu swobody	93
4.5.2.	Dyskretyzacja równania różniczkowego drgań struny	95
4.5.3.	Ogólny przypadek sprężystości	101
4.5.4.	Inne funkcje prędkości wirtualnych	104
4.5.5.	Przykłady obliczeniowe	107
4.6.	Metoda elementów czasoprzestrzennych a inne metody obliczeniowe	117
4.6.1.	Zbieżność metody	117
4.6.2.	Błąd fazowy	119
4.6.3.	Zadania bezmasowe	121
4.7.	Metoda elementów czasoprzestrzennych a metoda Newmarka	122
5.	Elementy sympleksowe	125
5.1.	Własności podziału czasoprzestrzeni	127
5.2.	Efektywność numeryczna	132
5.3.	Elementy sympleksowe w opisie przemieszczeniowym	135
5.3.1.	Trójkątny element pręta drgającego osiowo	135
5.3.2.	Element czasoprzestrzenny belki o średniej grubości	136
5.3.3.	Czworościenny element czasoprzestrzenny tarczy	138
5.3.4.	Czworościenny element płyty średniej grubości	141
5.3.5.	Nadczworościenny element ciała trójwymiarowego	144
5.4.	Elementy trójkątne wyrażone w prędkościach	148
5.4.1.	Ruch układu mas po strunie	151
5.5.	Adaptacja siatki podziału	161
5.5.1.	Adaptacja typu r	164
5.5.2.	Nieciągła w czasie adaptacja siatki typu h	165
5.5.3.	Ciągła w czasie h -adaptacja w opisie prędkościowym	170
6.	Metody bezsiatkowe	175
6.1.	Sformułowanie metody	176
6.2.	Wyniki	179

7. Obciążenia ruchome	181
7.1. Poruszająca się siła	185
7.1.1. Poruszające się obciążenie inercyjne – rozwiązanie ana- lityczne	186
7.1.2. Wyniki obliczeń	195
7.1.3. Nieciągłość rozwiązania	196
7.1.4. Uwagi końcowe	201
7.2. Klasyczny opis numeryczny ruchomej masy	202
7.3. Element czasoprzestrzenny struny niosący masę	207
7.3.1. Wyniki obliczeń numerycznych	209
7.4. Belka pod obciążeniem ruchym - metoda półanalityczna	212
7.4.1. Klasyczny model numeryczny belki	213
7.5. Element belki niosący masę	218
7.5.1. Elementy czasoprzestrzenne belki Bernoulliego–Eulera niosące masę	218
7.6. O rozwiązaniu numerycznym równań ruchu belki Timoshenki	220
8. Zagadnienia kontaktowe	221
8.1. Dynamiczne warunki kontaktu	226
8.1.1. Prędkość w strefie kontaktu	230
8.2. Kontakt jednostronny i tarcie	235
8.3. Duże przemieszczenia	244
8.3.1. Duże obroty	244
8.3.2. Element ramownicy płaskiej	245
8.4. Procedura przyrostowa	250
8.4.1. Algorytm krokowy	252
9. Zastosowania inżynierskie metody elementów czasoprzestrzennych	259
9.1. Podłużnica karoserii samochodowej	260
9.1.1. Opis matematyczny	260
9.1.2. Duże przemieszczenia	261
9.1.3. Skończone przemieszczenia i obroty	265
9.2. Macierz funkcji kary	268
9.2.1. Wnioski	271
9.3. Dynamika układu pojazd–tor	273
9.4. Dynamika toru metra	281
9.5. Drgania płyt lotniskowych	285
10. Uwagi końcowe	289

A. Macierze w elemencie belki	293
Indeks	301
Bibliografia	303

Rozdział 1

Wstęp

We wczesnym okresie burzliwego rozwoju metod komputerowych, przypadającym na lata osiemdziesiąte ubiegłego stulecia, badacze analizowali i opisywali podstawowe własności dyskretnych metod obliczeń. Były to m.in.:

- wpływ zagęszczenia siatki elementów skończonych na wyniki, oszacowanie błędu aproksymacji,
- zmniejszanie rozmiaru zadania przez stosowanie technik kondensacji statycznej i dynamicznej, podziału na podukłady itp.,
- tworzenie i badanie własności nowych, dokładniejszych modeli elementów skończonych, głównie elementów zginanych, analiza zjawiska blokowania stopni swobody (ang. locking), przesztywnienia, uwzględnienie złożonych związków konstytutywnych,
- opracowanie metod całkowania równań różniczkowych ruchu, charakteryzujących się bezwarunkową stabilnością, niskim kosztem obliczeniowym i odpowiednio dobranymi charakterystykami tłumienia drgań pasożytniczych.

Łączono możliwości znanych technik (metody różnic skończonych i elementów skończonych), zaczęły powstawać nowe metody (metoda elementów brzegowych, elementy ruchome, metody bezsiatkowe). Ograniczone możliwości obliczeniowe komputerów nadal zmuszały do prac nad poprawą wydajności obliczeniowej algorytmów. Wraz ze wzrostem mocy procesorów i obniżeniem kosztu pamięci operacyjnej wysiłek twórców oprogramowanie przesunął się ku poprawie wykorzystania istniejących programów obliczeniowych: udoskonalono sposób wprowadzania danych oraz opracowano atrakcyjne formy

wizualizacji wyników. Programy komputerowe zaczęto powszechnie wykorzystywać w praktyce inżynierskiej.

Dzisiaj modelowanie komputerowe powszechnie obejmuje zjawiska zmienne w czasie. Zarówno wiedza, jak i narzędzia komputerowe pozwalają na uwzględnienie wielu czynników wpływających na procesy w konstrukcjach o skomplikowanym kształcie. Jednocześnie coraz mniej wagi przywiązuje się do oceny poprawności otrzymanych wyników, a uwagę skupia się na możliwie wiernym odwzorowaniu geometrii. Modelowanie geometryczne, odpowiedni dobór typu elementów skończonych, a następnie obrazowanie pól naprężeń – to czynności, do których zwykle ogranicza swoje działania inżynier, użytkownik pakietu obliczeniowego. Coraz rzadziej poświęca się czas na poznanie właściwości numerycznych i mechanicznych tworzonych modeli. Stąd też w wielu przypadkach otrzymuje się wyniki trudne do interpretacji. Uwidaczniają się efekty wynikające z własności modelu numerycznego. Niekiedy mogą być one mylnie uznane za cechy badanego zjawiska. Różnice w wynikach uzyskiwanych dwoma pakietami komercyjnymi przestają budzić niepokój. Wiedza i doświadczenie naukowe powoli zastępowane są wiedzą o słabych punktach pakietów obliczeniowych i sposobach pokonywania napotykanymi trudnościami technicznymi. Przykładem mogą być pakiety służące do symulacji zderzeń pojazdów. Wykorzystywana w obliczeniach jawna metoda całkowania równań różniczkowych okazuje się niestabilna w przypadku elementów dyskretnych o drobnych wymiarach, lekkich i stosunkowo sztywnych. W takim przypadku upowszechnił się sposób zapobiegania niestabilności przez sztuczne powiększenie masy w wybranych punktach. Uzyskuje się rozwiązanie stabilne, a następnie skaluje otrzymane wynikowe wykresy, by częściowo zniwelować wpływ takiej operacji i dopasować je do wyników eksperymentalnych. Działania stają się coraz bardziej przypadkowe, a wyniki coraz mniej wiarygodne. O uznaniu rozwiązań zadań zaczyna decydować wielka liczba stopni swobody w modelu numerycznym, idąca w miliony, oraz atrakcyjna wizualizacja wyników. Nie przywiązuje się należytej wagi do merytorycznej strony zadania, pozostawiając tę sprawę twórcom oprogramowania.

Wgląd w raporty prac związanych z modelowaniem komputerowym pokazuje, że zwykle dąży się do zobrazowania obliczeń oraz opisowego podsumowania spostrzeżeń ilościowych. Bardzo rzadko użytkownicy potrafią merytorycznie odnieść wyniki do zjawisk mechaniki konstrukcji i sprawdzić myślowo problem do prostych, znanych zjawisk, jak np. propagacja fali, odbicie, stabilność ruchu, odpowiednie sprzężenia itp. Jedynie rozumienie zjawisk i umiejętność ich wyodrębnienia może prowadzić do udoskonalenia badań, przez choćby metodyczne wprowadzanie zmian w zadaniu. W prze-

ciwnym wypadku jest się skazanym na drogę kolejnych prób i błędów. Poprawa zadania odbywa się w dużym stopniu przypadkowo. Nie można w takim przypadku liczyć na dobre efekty inżynierskie.

W kolejnych rozdziałach zajmiemy się wybraną grupą zadań związanych z dynamiką i drganiami wywołanymi ruchomym obciążeniem. W szczególności pokażemy możliwości zastosowania metody czasoprzestrzennych elementów skończonych w zadaniach dynamiki. Wskażemy atrakcyjne, z punktu widzenia badacza i inżyniera, cechy i własności metody. Skrócimy też wybrane klasyczne metody obliczeniowe. Pokażemy różnice i podobieństwa z metodą elementów czasoprzestrzennych. Podane informacje pomogą czytelnikowi zdobyć część doświadczeń przydatnych w obliczeniach komputerowych zadań dynamiki konstrukcji i w interpretacji uzyskiwanych wyników.

Obecny poziom rozwoju technik obliczeniowych i symulacyjnych zdecydowanie zmienił proporcje między własnym twórczym wkładem w proces obliczeniowy, prowadzony według przemyślanego planu, opracowanego algorytmu, napisanego według własnej wiedzy matematycznej programu komputerowego, a wykorzystaniem skatalogowanych w pakietach komputerowych, zalgorytmizowanych rozwiązań, o których zwykle niewiele wiemy. W pierwszym przypadku musimy dysponować odpowiednią wiedzą specjalistyczną, zwłaszcza matematyczną, umiejętnością stosowania metod komputerowych, programowania i interpretacji wyników. W drugim – musimy zdać się na dostępne, zwykle nie w pełni odpowiadające naszym potrzebom komercyjne pakiety obliczeniowe. W obu przypadkach potrzebujemy wiedzy o metodach obliczeniowych, o najlepszych w danym przypadku modelach matematycznych i numerycznych, ich własnościach i osobliwościach.

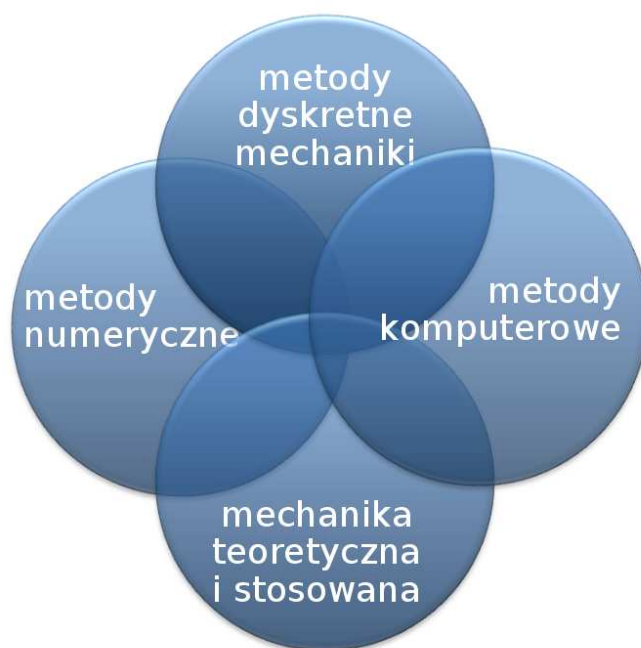
Najczęściej spotykanym problemem, jaki napotykamy przy budowie własnych programów obliczeniowych lub wykorzystaniu gotowych narzędzi komputerowych jest dobór danych materiałowych. Przykładowo łatwo jest przyjąć moduł sprężystości podłużnej stali lub betonu, ale prawdziwym wyzwaniem jest już wartość współczynników tłumienia tych materiałów w konkretnej konstrukcji. Bez badań eksperymentalnych nie sposób ustalić sztywności węzłów przytwierdzenia, sztywności gumowych przekładek sprężystych w przyjętym zakresie pracy, sztywności połączeń szyn. Co gorsze, uzyskane w konkretnym przypadku dane w ograniczonym zakresie nadają się do zastosowania w innych przypadkach.

Szeroki zakres tematyki został w niniejszej książce ograniczony do grupy tematów związanych ze zjawiskami dynamicznymi w transporcie szynowym. W tej dziedzinie w ostatnim okresie zaszło wiele zmian.

Obserwowany w transporcie szynowym wzrost prędkości pojazdów w przewozach pasażerskich i wzrost ładowności w ruchu towarowym pociąga za sobą zwiększenie dynamicznego obciążenia układu koło-szyna. Jednocześnie celem jest obniżenie poziomu hałasu i podniesienie bezpieczeństwa przejazdu. Poszukiwane są nowe rozwiązania zarówno konstrukcji toru jak i pojazdu szynowego. Można zaobserwować przy tym tendencję do wykorzystania optymalnych parametrów tego układu. Stany rezonansowe i dynamiczne stany krytyczne powodują przeciążenia. Jednym ze zjawisk tego typu jest samowzbudne narastanie drgań. Bezpośrednio wiąże się to z problemem stateczności oddziaływania i ruchu tocznego zestawów kołowych. Zjawiska te w ruchu pojazdów szynowych powinny być bezwzględnie eliminowane.

1.1. Metody przybliżone

Metody obliczeniowe stosowane w praktyce nie pozwalają na wierne odwzorowanie zjawisk zachodzących w opisywanych procesach. Mimo wysiłku i za-



Rysunek 1.1: Dyscypliny wiedzy wykorzystywane w modelowaniu zjawisk.

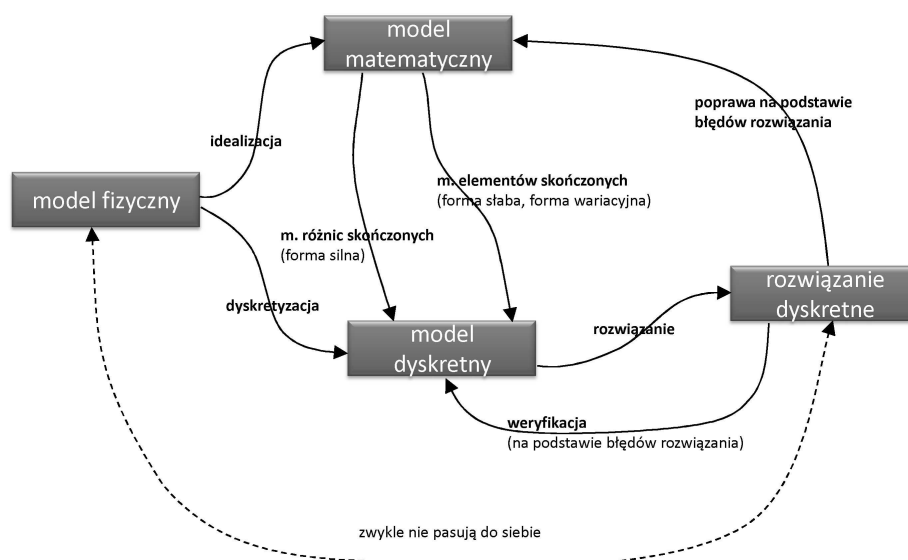
angażowania wiedzy z wielu dyscyplin (rys. 1.1) nie potrafimy opisać wszystkich występujących zjawisk. Z tego względu staramy się oddzielić je od siebie i skupiamy uwagę na pojedynczym zjawisku. Ale i w tym przypadku zmuszeni jesteśmy cofnąć się jeszcze bardziej i pogodzić się z rozwiązaniem prostszych problemów, znacznie odbiegających od naszych początkowych oczekiwań. Uproszczeń dokonujemy na każdym etapie procesu obliczeniowego. Można zwrócić uwagę na niektóre z nich.

Statyka czy dynamika? Wybór wymaga podjęcia decyzji, występujące zjawiska zmienne w czasie, zwłaszcza efekty dynamiczne wynikające z ruchu konstrukcji i działających sił bezwładności są na tyle duże, że decydujemy się na analizę dynamiczną. W prostej analizie przyjmujemy, że procesy zmienne w czasie się powolne i traktujemy zadanie jako quasi-statyczne. Tak jest w przypadku osiadania gruntu, płynięcia materiału plastyczności zależnej od prędkości odkształceń czy zjawisk zmęczenia materiału obciążanego cyklicznie.

Opis liniowy czy nieliniowy? W zjawiskach liniowych odpowiedź układu jest liniowo zależna od przyczyny ją wywołującej. Pojawia się pytanie, do jakiego stopnia zależność między przyczyną i skutkiem może być traktowana jako liniowa. Czy charakterystyki nieliniowe możemy zastąpić zależnościami odcinkami liniowymi? Jeśli tak, to jak oszacować błąd takiej operacji?

Jaka metoda obliczeniowa? Z reguły upraszczamy opis matematyczny zjawiska i dostosowujemy go do dostępnych narzędzi obliczeniowych. Godzimy się, by równania różniczkowe spełniane były nie w całym badanym obszarze, a w jego wybranych punktach. Zakładamy przy tym, że poza tymi punktami rozwiązanie jest wystarczająco gładkie. Stosujemy metody zastępujące rozwiązania o ciągłych funkcjach przedstawiających rozwiązanie i ich pochodnych funkcjami wraz z pochodnymi ciągłymi przedziałami. Dyskretyzujemy badany obszar. Inne drogi postępowania wymagają zastąpienia nieskończonych szeregów opisujących rozwiązanie sumą jedynie kilku pierwszych wyrazów. Dyskretyzujemy zakładaną postać rozwiązania. Na rys. 1.2 pokazano kolejne fazy przejścia od zadania do rozwiązania. Efekt końcowy różni się od doskonałego, tj. od wyniku w pełni zgodnego z pierwotnie postawionym zadaniem.

O ile wiele etapów uproszczeń przebywa się intuicyjnie, a stopień przybliżeń ocenia się w sposób dość dowolny, to przybliżenia metod matematycznych zwykle można dobrze oszacować. Stąd też duża różnorodność narzędzi obliczeniowych. Metody matematyczne prowadzące do schematów numerycznych można ująć w trzech grupach, pokazanych na rys. 1.3.



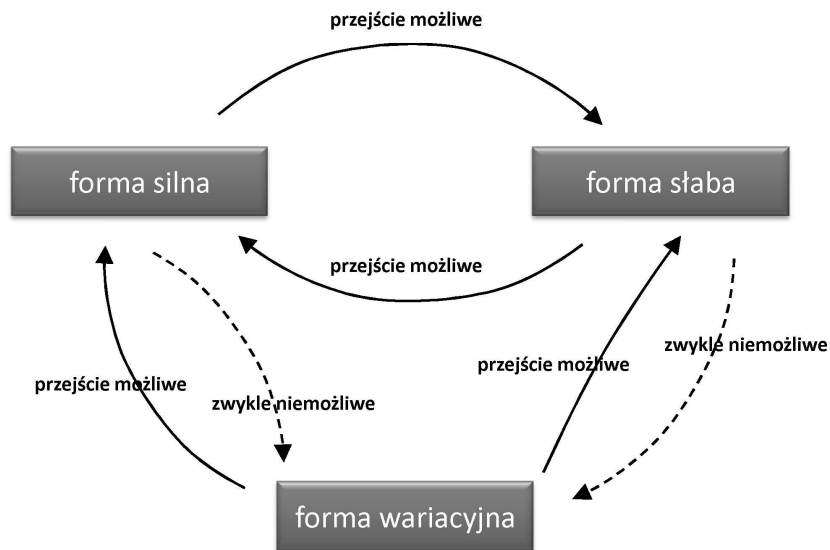
Rysunek 1.2: Zależności w procesie obliczeniowym.

Silna forma – opis równań ruchu przedstawiany jest przez układ równań różniczkowych w przestrzeni i w czasie, uzupełniony o warunki brzegowe i początkowe. Niektóre metody obliczeniowe sprowadzają formę silną do układu równań algebraicznych.

Słaba forma – przedstawia problem w postaci równania całkowego ważonego. Prowadzi do opisu uśrednionego w rozpatrywanym obszarze.

Forma wariacyjna – przedstawia problem w postaci funkcjonału, którego warunki stacjonarności prowadzą do formy słabej lub silnej. Przejście z jednej formy do drugiej odbywa się z wykorzystaniem reguł rachunku wariacyjnego.

Silne formy opisu zjawisk stosowane były od dawna. Przykładem może być drugie prawo dynamiki Newtona. Rozwiązania zadań opisanych silnymi formami polega na bezpośredniej dyskretyzacji równania różniczkowego, np. metodą różnic skończonych. Odpowiednie pochodne zastępujemy ilorazami różnicowymi. Podstawowe wady to trudność w stosowaniu do obszarów nieprostokątnych i niekołowych oraz kłopoty z uwzględnianiem warunków brzegowych.



Rysunek 1.3: Przejście między różnymi sformułowaniami matematycznymi.

Z tego względu większą popularność zdobyły sformułowania oparte na słabych formach i na formach wariacyjnych. Zalety takiej drogi postępowania są następujące:

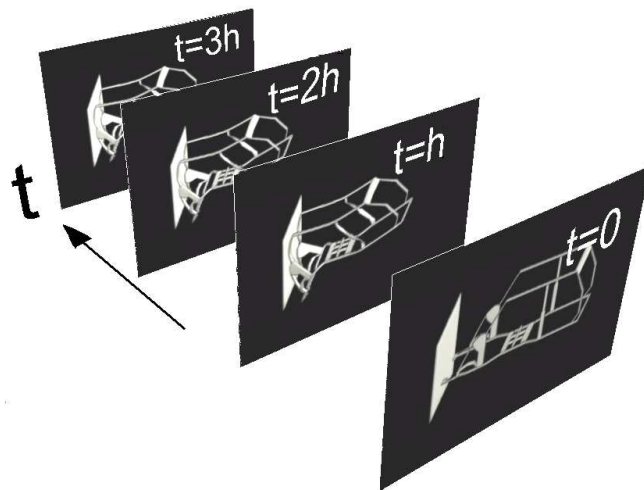
- ujednoczenie dróg postępowania w różnorodnych problemach teoretycznych i inżynierskich; funkcjonały są skalarami i jako takie nie zależą od układu odniesienia; to z kolei ułatwia odpowiednie transformacje,
- formy słabe i formy wariacyjne są podstawą skutecznych metod komputerowych,
- przez formy wariacyjne i formy słabe łatwo wyrazić podstawowe zasady mechaniki, np. zasada zachowania energii, zachowania masy, zachowania pędu i momentu pędu,
- ułatwione jest szacowanie błędów, określanie stabilności i zbieżności schematów numerycznych.

Wariacyjne drogi rozwiązywania zdominowały drogi oparte na formach silnych. Te ostatnie powoli zaczynają zajmować miejsce historyczne.

Rozdział 2

Pułapki symulacji komputerowych

Zadania dynamiki konstrukcji różnią się od zadań statyki tym, że stanowią ciąg powtarzających się w każdym kroku czasowym obliczeń. Pojedynczy etap takiego ciągu zadań polega w istocie na rozwiązaniu układu równań algebraicznych i stanowi rozwiązanie zadania statyki. Wektor prawych stron układu równań, będący wektorem obciążeń, jest uzupełniony o wpływ sił bezwładności i tłumienia. W dynamice mamy więc do czynienia z ciągiem zadań statyki. Zadanie dynamiki sprowadzamy w praktyce do ciągu za-



Rysunek 2.1: Ciąg zadań statyki składający się na zadanie dynamiki.

dań statyki w procesie całkowania równania różniczkowego ruchu. Liczba tych zadań, a więc i liczba kroków procedury całkowania równania różniczkowego ruchu, zależy od wymaganego czasu obserwacji oraz od przyjętego kroku czasowego Δt . Zwykle liczba ta wynosi od kilkuset do kilkuset tysięcy, a może być też znacznie większa. W numerycznym rozwiązaniu równań opisujących zadania dynamiki zjawiska ujawniające się w poprzednich krokach obliczeniowych (np. uplastycznienie, kontakt z ciałem sztywnym lub odkształcalnym, pęknięcie, czy choćby zmiana podstawowych parametrów materiałowych) wpływają na przebieg rozwiązania w krokach kolejnych. Zmiana jednej z wielkości, np. siły węzłowej w wybranym punkcie, wywołane w sposób sztuczny przemieszczenia jednego z węzłów siatki dyskretyzacji, czy choćby błędne obliczenie takiej wielkości wpływa w istotny sposób na wynik rozwiązania w następnych krokach, a więc i na wynik końcowy. W efekcie otrzymujemy błędny wykres przemieszczeń lub naprężeń znacznego obszaru konstrukcji w funkcji czasu. Jeśli takie zaburzenie jest jednorazowe i dotyczy jednego lub kilku stopni swobody, najczęściej nie jesteśmy w stanie zidentyfikować czy zlokalizować takie zdarzenie, mając do dyspozycji jedynie końcowe wyniki w formie wykresów czy rozkładów przestrzennych wybranych wielkości fizycznych. Lokalne zaburzenia w przestrzeni lub czasie są rozmywane w obszarze konstrukcji na skutek propagacji fal i ich odbić, dyspersji, tłumienia, nałożenia się wpływu wielu czynników fizycznych, których nie potrafimy w trakcie obliczeń obserwować oddzielnie. Taka sytuacja ma miejsce już w zadaniach o małych rozmiarach, o nieregularnych kształtach i dostatecznie złożonej topologii siatki dyskretnej. O ile w zadaniu statyki błędy zlokalizować można stosunkowo łatwo, to w zadaniach dynamiki jest to trudne. Przeciętny użytkownik gotowego programu do obliczeń dynamicznych nie jest w stanie wychwycić narastającej w trakcie obliczeń rozbieżności z rozwiązaniem poprawnym.

Przyjrzyjmy się, z jakimi rodzajami błędów mamy do czynienia w analizie numerycznej. Są to:

- błąd modelowania – różnica między modelem fizycznym a jego odpowiednikiem matematycznym,
- błąd dyskretyzacji – błąd wywołany przez reprezentację ciągłego modelu matematycznego o nieskończonej liczbie stopni swobody przez skończoną, zwykle niewielką liczbę stopni swobody,
- błąd zaokrągleń – wywołany przez ograniczoną liczbę cyfr w reprezentacji komputerowej liczb rzeczywistych,

- błąd algorytmu – błąd wywołany zastosowaniem konkretnego algorytmu obliczeniowego.

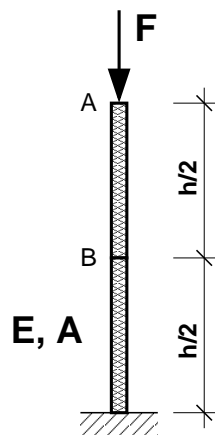
Wprawdzie każde z powyższych zjawisk jest odpowiedzialne za różnice między odpowiedzią konstrukcji rzeczywistej, a odpowiedzią uzyskaną przy pomocy symulacji komputerowych, to tylko błędy zaokrągleń i błędy algorytmu wpływają na wynik bezpośrednio. Pozostałe, jak np. błąd modelowania i dyskretyzacji wpływają pośrednio na rezultat końcowy.

Przykładem mającym również miejsce jest chwilowa utrata stabilności rozwiązania prowadzonego metodą warunkowo stabilną, np. metodą różnic centralnych, na skutek przekroczenia kryterium stabilności w jednym lub kilku elementach skończonych. Metoda różnic centralnych jest bardzo popularna w pakietach do modelowania dużych deformacji konstrukcji. Dzięki pewnym uproszczeniom podnosi się mocno jej wydajność i ułatwia obliczenia zadań wielkiej skali. Użytkownik z małym doświadczeniem stara się możliwie wiernie odwzorować kształt obiektu rzeczywistego i przełożyć go na siatkę podziału dyskretnego. Wychodzi intuicyjnie z założenia, że drobniejsza siatka, o mniejszych rozmiarach oczek lepiej odda skomplikowane krzywizny i nieregularności kształtów. Nadmiar gorliwości obraca się przeciw niemu. Proces obliczeniowy przebiega prawidłowo do czasu gdy chwilowa deformacja zmniejszy rozmiar jednego z elementów, bądź zwiększą się na skutek wzmocnienia charakterystyk materiałowych przyjęte wstępnie moduły sprężystości materiału. Od tej chwili zaczynają gwałtownie narastać przemieszczenia węzłów w otaczającej strefie. Wizualny sygnał o rozbieganiu się procesu obliczeniowego może pojawić się w miejscu pozbawionym jakichkolwiek charakterystycznych cech: brak obciążenia czy punktów podparcia. Jeśli to niekorzystne zjawisko trwa, proces obliczeniowy szczęśliwie zostanie przerwany przed czasem, dając szansę na jego poprawienie i powtórzenie. Jeśli natomiast po kilku krokach, na skutek rosnących przemieszczeń rozmiar elementu powiększy się, układ powróci do stabilności. Niestety, powstałe błędy, mimo że rozmyją się w następnych krokach, pozostawiają swój ślad w wynikach końcowych w postaci błędnych wartości śledzonych zmiennych lub nieoczekiwanych zjawisk, które niedoświadczony użytkownik stara się z trudem zinterpretować.

Innym przykładem, który zostanie omówiony w dalszej części jest złe uwarunkowanie wynikowego układu równań na skutek sztywnych inkluzji. Wtrącenie, zamierzone lub przypadkowe, fragmentów układu o dużej sztywności powoduje, że niektóre równania mogą być liniowo od siebie zależne. W związku z tym macierz współczynników układu równań staje się niemal osobliwa i rozwiązanie obarczone jest znacznym błędem.

Możemy podać niektóre przyczyny powstawania błędów w ostatecznym wyniku

- sztywne inkluzje, elementy o znacznej różnicy sztywności osiowej i giętej,
- ukośne podpory modelowane jako liniowo zależne stopnie swobody,
- przyłożenie obciążenia do węzłów, których równania eliminowane są na końcu etapu eliminacji Gaussa (zwykle o wysokich numerach węzłów),
- siatka podziału o różnej wielkości oczek lub w przypadku dwu i trójwymiarowych obiektów – elementy mocno wydłużone,
- elementy skończone podlegające znacznym dystorsjom w trakcie ewolucji procesu.



Rysunek 2.2: Schemat przykładowego zadania.

Przykład 1

Obliczmy przemieszczenia wybranych punktów stalowego słupa o przekroju poprzecznym $A=0,01\text{m}^2$ obciążonego siłą $F=100\text{ kN}$. Przyjmujemy dane: $E=2,10\cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$, $L=2\times 1\text{ m}$ (rys. 2.2). Rozwiązujemy zadanie zastępując słup dwoma elementami skończonymi, o trzech stopniach swobody. Z uwagi na zamocowanie dolnego węzła mamy w praktyce w obliczeniach dwa stopnie swobody: punkt A i B. Rozwiązanie sprowadza się do następującego układu równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} 2EA/h & -2EA/h \\ -2EA/h & 4EA/h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_A \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

Podstawienie wartości liczbowych daje następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} 4,2 \cdot 10^9 & -4,2 \cdot 10^9 \\ -4,2 \cdot 10^9 & 8,4 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_A \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^5 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.2)$$

Do rozwiązania układu równań otrzymanego metodą sztywności zastosujemy procedurę Gaussa, napisaną w najprostszej postaci w języku fortran,

zaczepniętą z książki [169].

```

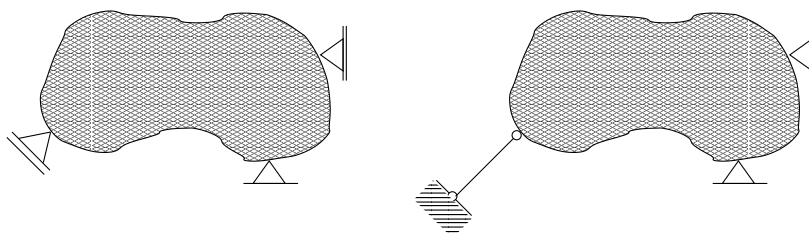
do 1 i=1,n
c=a(i,i)
a(i,i)=c-1.0
do 1 k=i+1,n+1
d=a(i,k)/c
do 1 j=1,n
1 a(j,k)=a(j,k)-d*a(j,i)

```

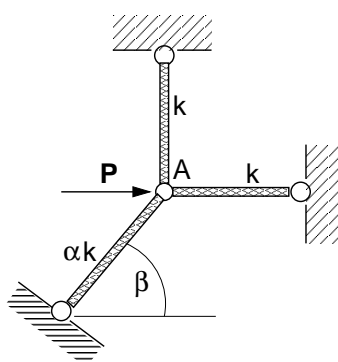
Otrzymujemy rozwiązania mocno odbiegające od oczekiwanych. Bezpośrednie (nieiteracyjne) rozwiązanie układu równań prowadzone w pojedynczej precyzji jest błędne, gdyż niewystarczająca jest dokładność operacji arytmetycznych. Zwróćmy uwagę na trzeci wiersz procedury Gaussa. Wykonywana jest operacja odejmowania $c - 1$. Jeśli rząd wielkości liczby c przekracza liczbę cyfr utrzymywaną w arytmometrze w sposób dokładny (w pojedynczej precyzji wynosi ona 7), to operacja arytmetyczna nie zostaje wykonana (np. przy czterocyfrowym wyświetlaczu kalkulatora nie można obliczyć $3456+0,3$, ponieważ wynik dokładny wymaga pięciu cyfr). W tabelicy 2.1 przedstawiono wyniki rozwiązania układu równań w pojedynczej precyzji, z zastosowaniem skalujących mnożników. Obliczenia w pojedynczej precyzji są całkowicie nieprzydatne. Zastosowanie podwójnej precyzji, mimo że daje wyniki znacznie dokładniejsze, wymaga ostrożności w układach o dużej liczbie stopni swobody.

Tablica 2.1: Wyniki rozwiązań zadania przykładowego z zastosowaniem mnożników skalujących.

mnożnik	węzeł 1	węzeł 2
pojedyncza precyzja		
1	0.0025262125	0.0025262124
0,1	-0.0047497451	0.0030627549
0,01	0.0022351742	0.0022351742
0,001	0.0985098854	0.0485098846
0,0001	1.	0.5
podwójna precyzja		
1	9.99999952E-05	4.99999952E-05
0,1	0.000999999998	0.000499999998
0,01	0.01	0.005



Rysunek 2.3: Ukośna podpora oraz układ zastępczy.



Rysunek 2.4: Prosty układ kratowy o ukośnym pręcie.

Przykład 2

Kolejnym przykładem jest zastosowanie ukośnych podpór, o możliwości przesuwu w kierunku ukośnym w przyjętym układzie odniesienia. Kiedy pakiet obliczeniowy nie pozwala na wprowadzenie podpór z możliwością ukośnego przesuwu lub możliwość ta jest ukryta, użytkownik zwykle posługuje się układem zastępczym. W punkcie podparcia wprowadza sztywny pręt przenoszący jedynie siły osiowe, o kierunku prostopadłym do kierunku przesuwu (jak na rys. 2.3). Jeśli długość takiego pręta przewyższa o kilka rzędów wielkość spodziewanego przemieszczenia, można przyjąć, że dokładność wyników będzie wystarczająca. Teoretycznie sztywność osiowa tej sztucznej podpory powinna być nieskończenie duża. Do tego też dążą użytkownicy i nadają prętowi sztywność przewyższającą o wiele rzędów wartości sztywność układu podstawowego. W celu unaocznienia wpływu sztywności na rozwiązanie posłużmy się przykładem zamieszczonym w książce [49]. Przemieszczenia węzła

A opisuje układ równań

$$\begin{bmatrix} k(1 + \alpha \cos^2 \beta) & k\alpha \cos \beta \sin \beta \\ k\alpha \cos \beta \sin \beta & k(1 + \alpha \sin^2 \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

Łatwo można zauważyć, że przy $\alpha \gg 1$ macierz współczynników układu równań (2.3) staje się osobliwa.

2.1. Spektralna liczba uwarunkowania

Wielu informacji o jakości modelu numerycznego i dokładności końcowego rozwiązania może nam dostarczyć prosta ocena liczby uwarunkowania macierzy współczynników układu równań algebraicznych. Spektralna liczba uwarunkowania macierzy \mathbf{K} określana jest ilorazem skrajnych wartości własnych

$$C(\mathbf{K}) \stackrel{df}{=} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}. \quad (2.4)$$

Oszacowano, że wzrost liczby uwarunkowania o jeden rząd pociąga za sobą utratę jednej cyfry dokładności obliczenia przemieszczeń odpowiadających modowi λ_{min} . Podczas rozwiązywania zadań metodą Gaussa błędy rozwiązania pojawiają się na końcu etapu eliminacji równań, kiedy dochodzi do obliczania różnicy niemal równych liczb. Powstały błąd propaguje się w fazie powrotnych podstawień i jest szacowany następująco:

$$\text{liczba utraconych cyfr dokładnych} = \log_{10}(\lambda_{max}/\lambda_{min}) = \log_{10}C(\mathbf{K}). \quad (2.5)$$

Powyższe oszacowanie nie jest doskonałe. Mówi jedynie, że należy unikać zadań o podobszarach różniących się sztywnościami.

Miarę błędu rozwiązania układu równań $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$ można opisać ilorazem

$$e = \frac{\mathbf{q}^T \Delta \mathbf{F}}{\mathbf{q}^T \mathbf{F}}, \quad \Delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{q}. \quad (2.6)$$

Określa on błąd rozwiązania statycznego, odniesiony do wielkości obciążenia, mierzony wielkością energii. W zadaniach dynamicznych definiowanych jako problem własny, błąd rozwiązania szacujemy zależnością

$$e = \frac{\bar{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} - \omega^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{q}})}{\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}\bar{\mathbf{q}}}. \quad (2.7)$$

Wielkość $\bar{\mathbf{q}}$ jest wektorem własnym przemieszczeń. W przypadku gdy jest on pozbawiony błędów, a ω jest dokładną częstością własną, człon w nawiasie

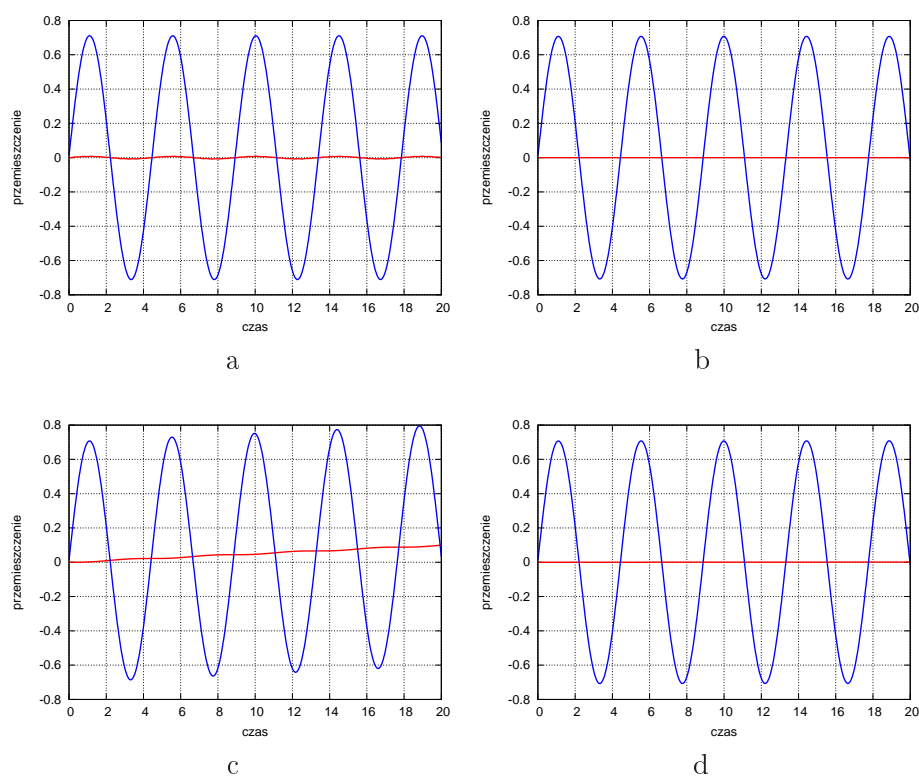
równa się zero. Podobnie i w tym przypadku wielkość błędu skalowana jest energią potencjalną układu, odpowiadającą realizowanej postaci własnej przemieszczeń.

Błędy popełniamy na każdym etapie modelowania, począwszy od sposobu dyskretyzacji konstrukcji. Metoda narzucania warunków brzegowych także istotnie wpływa na wynik końcowy. Można uwzględnić zamocowanie na wiele sposobów. Każdy z nich ma odpowiednią interpretację fizyczną. Drogi te nie są jednak równoznaczne.

Popularność metody różnic centralnych przekłada się na zastosowanie w wielu pakietach symulacyjnych. Uwzględnienie warunków brzegowych w klasyczny sposób polega na narzuceniu ograniczeń na przemieszczenia wybranych stopni swobody. Drogę postępowania jest kilka. Jednym ze sposobów jest odpowiednia modyfikacja wektora prawych stron. Uwzględniamy w ten sposób wpływ zamocowania. Po bezpośrednim rozwiązaniu układu równań uzyskujemy wynik dokładny. Drugim sposobem jest wprowadzenie w odpowiednim miejscu sztucznej sztywności. Dokonujemy tego w prosty sposób mnożąc odpowiednią wartość diagonalną macierzy sztywności przez liczbę o dużej wartości.

$$\begin{bmatrix} k_{11} \times 10^6 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \times 10^6 \times \alpha \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

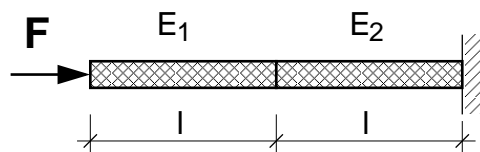
Odpowiedni element wektora prawych stron podlega podobnej modyfikacji i jest dodatkowo mnożony przez wartość wymaganą warunkiem brzegowym, np. $u_1 = \alpha$. Po rozwiązaniu (2.8) otrzymujemy u_1 bliskie zadanej wartości α . Opisanie postępowanie można zinterpretować jako wprowadzenie dominacji warunku brzegowego nad rozwiązaniem swobodnym. Sztuczne powiększenie sztywności jest niekorzystne ze względów obliczeniowych. Pogarsza uwarunkowanie macierzy współczynników układu równań (patrz rozdz. 2.1) oraz powoduje utratę stabilności rozwiązania w czasie. Zdecydowanie bardziej korzystnym krokiem jest powiększenie bezwładności wybranego stopnia swobody. Ruch w zadanym kierunku jest uniemożliwiony przez sztucznie dodaną masę. W takim przypadku zyskujemy poprawę uwarunkowania układu równań oraz poprawę warunku stabilności całkowania macierzowego równania różniczkowego ruchu. Rys. 2.5 pokazuje przemieszczenia w czasie układu o dwóch stopniach swobody. Pierwszy z nich jest zamocowany. Widzimy różnicę wyników uzyskanych przy wprowadzeniu warunku brzegowego przez powiększenie sztywności oraz bezwładności zamocowanego stopnia swobody. Pierwszy wariant polegający na sztucznym powiększeniu sztywności ukazuje



Rysunek 2.5: Przesieszczenia uzyskane przy różnym sposobie zadawania warunków brzegowych: (a) powiększenie sztywności (mnożnik 10^2), (b) powiększenie sztywności (mnożnik 10^4), (c) powiększenie bezwładności (mnożnik 10^2), (d) powiększenie bezwładności (mnożnik 10^4).

niewielkie oscylacje zamocowanego węzła. Znikają one wraz ze zwiększeniem wartości mnożnika. Niestety, dalszemu powiększaniu sztucznej sztywności musi towarzyszyć, z uwagi na kryterium stabilności, zmniejszenie kroku całkowania w czasie Δt . Tym samym wzrasta liczba kroków obliczeniowych i koszt obliczeń.

W drugim wariantcie dostrzegamy poruszanie się całego obiektu w kierunku działania siły nadającej ruch początkowy przy wzbudzeniu drgań. Zwiększenie sztucznego mnożnika do wartości 10^4 w tym prostym zadaniu wystarczająco poprawia dokładność.



Rysunek 2.6: Schemat zadania przykładowego.

Przykład 3

Spójrzmy na dwuelementowy układ prętowy. Rozpatrzmy trzy przypadki: jednakowej sztywności obu elementów ($E_1 = E_2$), większej sztywności elementu z węzłem obciążonym ($E_1 > E_2$) oraz większej sztywności elementu przyporowotowego ($E_1 < E_2$) (rys. 2.6). W przypadku jednakowej sztywności obu elementów liczba uwarunkowania wynosi $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 6,85$. W przypadku $E_1/E_2 = 0,1$ otrzymujemy $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 12,32$. Kiedy zamienimy sztywności i przyjmiemy $E_1/E_2 = 10$, wówczas element sztywniejszy będzie elementem niepodpartym. W takim przypadku $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 42,08$. Widzimy, że ta sama konstrukcja, lecz podparta w innym punkcie, cechuje się wyższą liczbą uwarunkowania. Przy $E_1/E_2 = 0,01$ liczba uwarunkowania wynosi 102,03, a przy $E_1/E_2 = 100$ mamy 402,01.

Oszacowanie jakości rozwiązania układu równań jedynie na podstawie ilorazu skrajnych wartości własnych jest niedoskonałe i nadmiernie pesymistyczne. Przykładem może być macierz diagonalna dodatnio określona układu równań. Równania są rozseparowane, a rozwiązania dokładne, mimo znacznie różniących się wyrazów. Liczba uwarunkowania z kolei może przyjmować dużą wartość.

W następnym rozdziale pokażemy, jak łatwo oszacować dokładność rozwiązania, unikając przy tym przeszacowania.

2.2. Skalowanie

Oszacowanie (2.4) zwykle przeszacowuje błąd. $C(\mathbf{K})$ jest zbyt duże. Można spowodować, by $C(\mathbf{K})$ przyjmowało dużą wartość jedynie w przypadkach faktycznie złego uwarunkowania \mathbf{K} . Przed wyznaczeniem $C(\mathbf{K})$ przeskalujmy macierz \mathbf{K} w następujący sposób. Utwórzmy diagonalną macierz skalującą \mathbf{S} , zbudowaną z diagonalnych współczynników macierzy \mathbf{K}

$$s_{ii} = \frac{1}{\sqrt{k_{ii}}} . \quad (2.9)$$

Następnie przekształcimy \mathbf{K} do postaci przeskalowanej \mathbf{K}_s

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{S}\mathbf{K}\mathbf{S} . \quad (2.10)$$

Diagonalne współczynniki macierzy \mathbf{K}_s są więc równe 1. Do oszacowania $C(\mathbf{K})$ bierzemy teraz wartości własne λ_{max} i λ_{min} macierzy \mathbf{K}_s . Problem wartości własnych macierzy skalowanej \mathbf{K}_s wygląda następująco:

$$(\mathbf{K}_s - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{0} . \quad (2.11)$$

Dostrzec można podobieństwo z problemem własnym układu dyskretnego. Macierz jednostkowa odpowiada macierzy bezwładności. Otrzymujemy częstości $\omega_I^2 = \lambda_i$ zadania zastępczego.

Podobne uproszczenie oszacowania wartości własnych uzyskujemy inną drogą. Podstawiamy $\mathbf{q} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}_1$ oraz mnożymy (2.9) lewostronnie przez \mathbf{S}^{-1} . Wówczas otrzymamy

$$(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}_s\mathbf{S}^{-1} - \lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{q}_1 = \mathbf{0} . \quad (2.12)$$

Ponieważ $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \text{diag}[k_{11}k_{22}\dots k_{nn}]$, więc ostatecznie mamy

$$(\mathbf{K} - \lambda \text{diag}[k_{11}, k_{22}, \dots, k_{nn}])\mathbf{q}_1 = \mathbf{0} . \quad (2.13)$$

W tym przypadku łatwiej jest znaleźć analogię między oszacowaniem wartości własnych macierzy współczynników układu równań a problemem własnym. Skrajne wartości własne macierzy skalowanej \mathbf{K}_s mogą być wyznaczone na podstawie pierwotnej macierzy sztywności \mathbf{K} oraz macierzy odpowiadającej macierzy bezwładności w postaci diagonalnej macierzy \mathbf{K} . Powyższe równanie pokazuje, że odizolowany obszar sztywny, w postaci sztywnej, nie umocowanej podporami inkluzji, obniża najniższą częstość własną. Nie wpływa natomiast mocno na najwyższą częstość własną. W efekcie wzrasta $C(\mathbf{K})$. Skalowanie pozwala uniknąć zbyt pesymistycznych oszacowań wynikających bezpośrednio z (2.5).

Zaznaczyć należy, że przeskalowanie macierzy układu równań nie poprawia dokładności rozwiązania układu równań metodą bezpośrednią, np. metodą Gaussa. Pozwala natomiast dokonać poprawnych oszacowań.

Rozdział 3

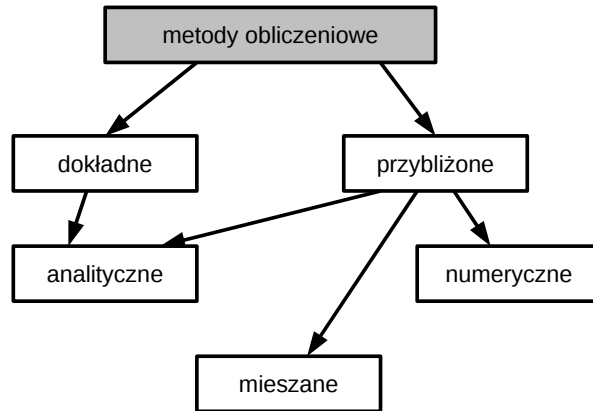
Metody numeryczne całkowania równań różniczkowych ruchu

Rozwój elektroniki i upowszechnianie się technik komputerowych pociągnął za sobą rozwój metod obliczeniowych mechaniki. Najpierw wykorzystano wcześniej opracowane i opublikowane metody. Następnie zaczęto poszukiwać nowe, jeszcze bardziej efektywne rozwiązania. Nowe metody powstawały bez porównania szybciej. Wraz ze zwiększaniem się mocy obliczeniowej komputerów zaczęto stosować obliczenia i symulacje numeryczne w coraz szerszym zakresie zagadnień: w problemach geometrycznie i materiałowo nieliniowych, dynamice konstrukcji, zadaniach o złożonej geometrii.

Spróbujmy w zarysie przyjrzeć się grupie metod stosowanych w dynamice konstrukcji. Nieuniknione jest przy tej okazji spojrzenie na metody obliczeniowe zadań statyki konstrukcji, gdyż w większości metod obliczeniowych dynamiki zadania mogą być sprowadzone do ciągu zadań statyki. Dobra znajomość tych ostatnich pozwala zdecydowanie lepiej zrozumieć wyniki symulacji komputerowych w dynamice konstrukcji.

Tradycyjne metody obliczeniowe dynamiki opisano w wielu podręcznikach akademickich. Podstawowe, takie jak metoda różnic centralnych lub metoda Newmarka, są stosowane powszechnie. Inne, mimo niezaprzeczalnej przewagi nad tradycyjnie stosowanymi metodami, nie zdobyły należytej popularności. W niniejszym rozdziale, obok krótkich opisów metody różnic centralnych i metody Newmarka przedstawimy zalety metody Newmarka-Bossaka, metody Parka-Hausnera oraz metod Adamsa. W następnym rozdziale skupimy się już tylko na metodzie elementów czasoprzestrzennych.

W celu usystematyzowania pojęć związanych m.in. z właściwościami me-



Rysunek 3.1: Schematyczny podział metod obliczeniowych mechaniki.

to, pogrupujemy je według odpowiednich kryteriów. Systematykę metod obliczeniowych przedstawia schemat na rys. 3.1. Obszarem naszego zainteresowania będą metody przybliżone, numeryczne. Są one wygodne w praktyce inżynierskiej. Kosztem dokładności pozwalają rozwiązać skomplikowane zadania. Mimo tego nie każdy problem opisany analitycznie może być rozwiązany numerycznie. Starania badaczy oraz użytkowników idą w kierunku poznania własności metod komputerowych, by móc je zastosować do nowych kategorii zadań.

Metody obliczeniowe dynamiki dzielą się na dwie podstawowe grupy: metody jawne i niejawne. Cechy metod jawnych i niejawnych pokazuje rys. 3.4. Dostrzegamy, że w metodach jawnych rozwiązanie w danym kroku obliczeniowym zależy jedynie od wielkości fizycznych opisanych w chwilach poprzednich. Rozwiązania uzyskuje się stosunkowo niewielkim kosztem, gdyż wystarcza do tego zwykle rozwiązanie układu równań algebraicznych. W przypadku metod niejawnych rozwiązanie w danej chwili zależy od pewnych wielkości fizycznych odniesionych do tejże chwili, np. prędkości lub przyspieszeń. W związku z tym wykonuje się pewne dodatkowe operacje pomocnicze w celu ich wyznaczenia. Charakteryzują się one wyższą dokładnością w stosunku do ścisłego rozwiązania równania $\ddot{q} + q = 0$, oraz są pozbawione ograniczeń wynikających z kryteriów stabilności.

Wspomnieć należy tu o metodach całkowania równań różniczkowych pierwszego rzędu. Równie różniczkowe rzędu drugiego, przez odpowiednie pod-

stawienie zmiennych za pochodne pierwszego rzędu można sprowadzić do równania rzędu pierwszego, o podwójnej liczbie zmiennych. Ten sposób postępowania jest stosowany przy obniżaniu stopnia równania różniczkowego wyższych rzędów. Metody opracowane do rozwiązywania zadań parabolicznych, z pochodnymi niewiadomych rzędu pierwszego, bywają stosowane do rozwiązywania zadań typu hiperbolicznego. Powodem jest bądź złożona postać równania wynikowego, bądź po prostu dostępność procedur numerycznych i ich obszerny opis. Należy tu przede wszystkim wymienić metodę Rungego-Kutty drugiego rzędu. Występuje ona też pod nazwą metody punktu środkowego lub zmodyfikowanej metody trapezów. Analiza stabilności pokazuje, że schematy te, zastosowane do równania ruchu, są rozbieżne przy $\Delta t > 0$. Wprawdzie przy małym kroku całkowania rozbieżność jest niewielka, to do zagadnień analizy drgań metody tej grupy nie nadają się. Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu jest tu zdecydowanie lepsza, choć analiza zbieżności w zadaniu drgań jest trudna do przeprowadzenia.

Aby nie być gołosłownym i jednocześnie definitywnie odrzucić metodę Rungego-Kutty drugiego rzędu jako nieprzydatną w naszych zadaniach, w skrócie przedstawimy analizę jej stabilności. Metoda zwykle zapisywana jest w postaci następującego algorytmu:

$$y_{i+1} = y_i + hf(\bar{y}_{i+1/2}, t_{i+1/2}), \quad \bar{y}_{i+1/2} = y_i + h/2 f(y_i, t_i), \quad t_{i+1/2} = t_i + h/2 \quad (3.1)$$

Schemat (3.1) uzyskujemy przez rozwinięcie pochodnej $\dot{\mathbf{y}}$ w otoczeniu punktu t_i w szereg Taylora i obcięciu go po pierwszym wyrazie. Funkcję \mathbf{y} rozwijamy w szereg Taylora do wyrazu drugiego włącznie. Z obu rozwinięć pozbywamy się członu $\dot{\mathbf{y}}$ i korzystając z definicji zadania otrzymujemy

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+1}, t_{i+1})] . \quad (3.2)$$

W przypadku układu równań różniczkowych zwyczajnych możemy prawą stronę równania $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ zapisać jako

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) , \quad (3.3)$$

gdzie \mathbf{A} jest niezależne od czasu. Wówczas metodę Rungego-Kutty zapisujemy w postaci

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}\left(\mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i), t_{i+1/2}\right) = \mathbf{y}_i + h\mathbf{A}\left(\mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{A}\mathbf{y}_i\right) . \quad (3.4)$$

Ostatecznie mamy

$$\mathbf{y}_{i+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{2}\mathbf{A}^2\right)\mathbf{y}_i . \quad (3.5)$$

W ogólnym przypadku zamiast $\dot{\mathbf{y}}(t_i) = (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i)/h$ stosujemy przybliżenie

$$\dot{\mathbf{y}}(t_i + \alpha h) = \frac{\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i}{h}. \quad (3.6)$$

Wówczas równanie wyjściowe sprowadza się do postaci

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+\alpha}, t_{i+\alpha}). \quad (3.7)$$

Wartość funkcji \mathbf{f} w punkcie pośrednim interpolujemy

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+\alpha}, t_{i+\alpha}) = (1-\alpha)\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i) + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+1}, t_{i+1}) = \mathbf{y}_i + h(1-\alpha)\mathbf{A}\mathbf{y}_i + h\alpha\mathbf{y}_{i+1}. \quad (3.8)$$

Przy $\alpha = 1/2$ otrzymujemy schemat (3.1). Po uporządkowaniu (3.8) otrzymujemy

$$(\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{A})\mathbf{y}_{i+1} = (\mathbf{I} + h(1-\alpha)\mathbf{A})\mathbf{y}_i \quad (3.9)$$

Macierz współczynników powyższego układu równań przy $\alpha > 0$ musi być nieosobliwa. Wówczas otrzymujemy rozwiązanie z odpowiednią macierzą przejścia

$$\mathbf{y}_{i+1} = (\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} + h(1-\alpha)\mathbf{A})\mathbf{y}_i. \quad (3.10)$$

Analiza modalna pozwala rozseparować zmienne. Równania różniczkowe stają się rozprężone. Wprawdzie zmienne uogólnione w wektorze $\mathbf{y}(t)$ zastępowane są przez odpowiednie w zmienionej bazie, to zagadnienie stabilności układu równań różniczkowych sprowadza się do problemu stabilności n pojedynczych równań różniczkowych.

Macierz dodatnio określoną \mathbf{A} diagonalizujemy stosując podstawienie $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\mathbf{z}$. Macierz $\mathbf{\Phi}$ zbudowana jest z wektorów własnych macierzy \mathbf{A} . Wówczas mamy

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{z}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Phi}. \quad (3.11)$$

Podstawiamy (3.11) do (3.9) i otrzymujemy

$$(\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{\Lambda})\mathbf{z}_{i+1} = (\mathbf{I} + h(1-\alpha)\mathbf{\Lambda})\mathbf{z}_i. \quad (3.12)$$

Układ równań (3.12) jest rozseparowany. Można go zapisać jako n pojedynczych równań

$$(1 - h\alpha\lambda_k)z_{i+1} = (1 + h(h(1-\alpha)\lambda_k)z_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

Pozbywając się indeksu k pojedyncze równanie zapisujemy ze współczynnikiem przejścia

$$z_{i+1} = \frac{1 + h(1-\alpha)\lambda}{1 - h\alpha\lambda}z_i. \quad (3.14)$$

Moduł współczynnika przejścia powinien być nie większy od jedności

$$\left| \frac{1 + h(1 - \alpha)\lambda}{1 - h\alpha\lambda} \right| \leq 1. \quad (3.15)$$

Przy $h \rightarrow \infty$ warunek (3.15) jest spełniony przy $\alpha \geq 1/2$. Przypadek $\alpha = 0$ jest więc rozbieżny.

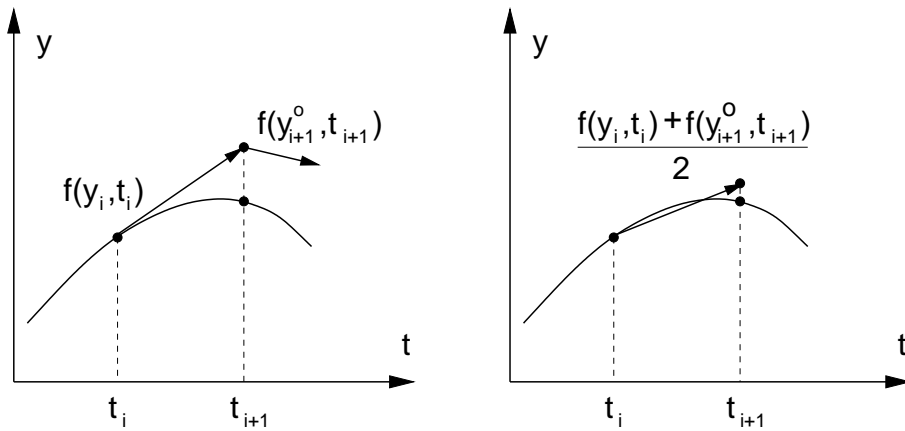
Metody jednokrokowe, dobrze opisane w literaturze w przypadku równań pierwszego rzędu, są również stosowane do równań drugiego rzędu. Równanie drugiego rzędu przekształca się do układu dwóch równań drugiego rzędu. W przypadku równań macierzowych o wielu stopniach swobody gwałtownie rośnie rozmiar zadania. Metody jednokrokowe pozwalają stosować zmienny krok całkowania. Nie wymagają też procedur startujących do wygenerowania odpowiedniego zestawu rozwiązań w chwilach początkowych. Obliczenia polegają na wykonaniu kilku operacji pośrednich, a następnie obliczeniu końcowego wyniku pojedynczego kroku czasowego. Rząd dokładności metody można zmieniać, zmieniając liczbę etapów pośrednich. W wielu przypadkach stosuje się w obliczeniach metodę Rungego-Kutty 4 rzędu. Wykorzystując ją można w zadaniach nieliniowych uniknąć procedury iteracyjnego rozwiązywania równania nieliniowego. Metody Rungego-Kutty stosuje się do rozwiązywania sztywnych równań. W statyce odpowiada to źle uwarunkowanym macierzom układu równań.

Metoda Eulera jest niedokładna, gdyż do następnej chwili t_{i+1} przechodzimy po stycznej wystawionej w punkcie (\mathbf{y}_i, t_i) . Powstał pomysł, by do rozwiązania wykorzystać nie styczną $\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i)$, a sieczną wyznaczoną przez punkty (\mathbf{y}_i, t_i) i $(\mathbf{y}_{i+1}, t_{i+1})$. Drugi z punktów jest wyznaczony w sposób przybliżony z wykorzystaniem metody Eulera i oznaczony przez \mathbf{y}_{i+1}^0 . Nazywany jest predyktorem. Właściwe obliczenia przeprowadza się z wykorzystaniem siecznej $1/2 [(\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+1}^0, t_{i+1}))]$. Ostatecznie więc korektor ma postać następującą (rys. 3.2)

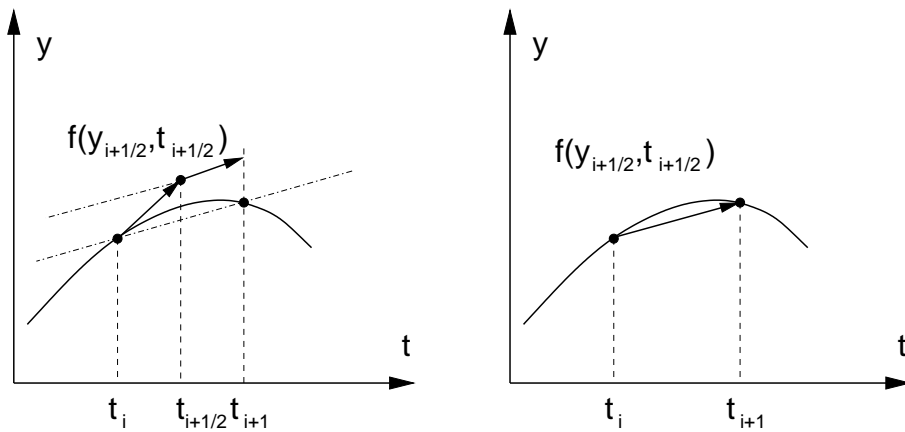
$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} [(\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+1}^0, t_{i+1}))]. \quad (3.16)$$

Zauważmy, że metoda Rungego-Kutty 2 rzędu jest metodą typu predyktor-korektor. Predykcji dokonuje się w połowie kroku h , a następnie tę wartość wykorzystuje się w etapie korekcji.

Przedstawimy teraz prosty algorytm rozwiązywania zadania metodą Rungego-Kutty 4 rzędu (algorytm 1). Krok całkowania jest tu ograniczony przez kryteria stabilności i dokładności. W przypadku sztywnych równań krok całkowania musi być szczególnie krótki. Koszt kroków pomocniczych oraz



Rysunek 3.2: Predyktor i korektor w metodzie dwuetapowej.



Rysunek 3.3: Etap predykcji i korekty w metodzie Rungego-Kutty 2 rzędu.

krótki krok całkowania czynią metodę mało atrakcyjną w porównaniu z metodami wielokrokowymi. Metody jednokrokowe stosuje się zwykle do etapów początkowych niesamostartujących procedur wielokrokowych.

W tabelicy 3.1 przedstawiono wyniki obliczeń równania przykładowego $\dot{y} + y^2 = 0$, z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Rozwiązanie uzyskano przy kroku $h = 0,1$. Rozwiązanie ściśle ma postać: $y = 1/(1 + t)$.

Poza wymienionymi wcześniej metodami w literaturze spotkać można mnóstwo sformułowań, spośród których przytaczamy nieliczne:

Algorytm 1 Metoda Rungego-Kutty 4 rzędu.

- wykonujemy obliczenia pomocnicze:

$$\bar{y}_0 = \ddot{y}(t_i, y_i),$$

$$\bar{y}_1 = \ddot{y}(t_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2} \dot{y}_i),$$

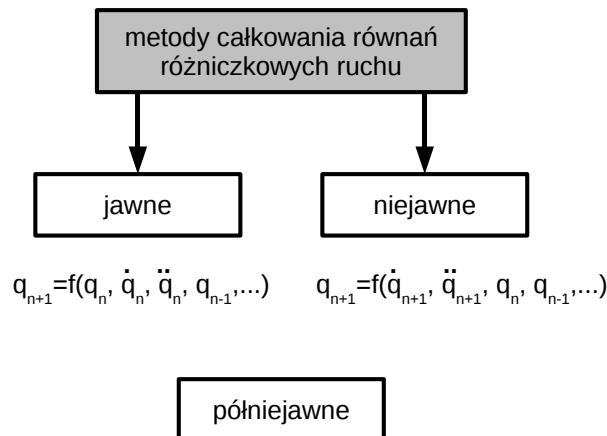
$$\bar{y}_2 = \ddot{y}(t_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2} \dot{y}_i + \frac{h^2}{4} \bar{y}_0),$$

$$\bar{y}_3 = \ddot{y}(t_{i+1}, y_i + h \dot{y}_i + \frac{h^2}{2} \bar{y}_1)$$

- wykonujemy obliczenia:

$$y_{i+1} = y_i + h \dot{y}_i + \frac{h^2}{3} (\bar{y}_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + \mathcal{O}(h^5)$$

- $\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \frac{h}{4} (\bar{y}_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3) + \mathcal{O}(h^5)$
-



Rysunek 3.4: Metody obliczeniowe dynamiki.

Metoda trapezów Znana też jest jako metoda średniego przyspieszenia.

W zadaniach parabolicznych znana jest jako metoda Crancka-Nicolsona.

Jest metodą bezwarunkowo stabilną. Wykorzystuje się związki: $\mathbf{u}_{n+1} =$

$$\mathbf{u}_n + h/2(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1}) \text{ i } \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h/2(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}).$$

Metoda θ -Wilsona Zakładamy tutaj liniową zmienność przyspieszenia w prze-

Tablica 3.1: Wyniki rozwiązań równania $\dot{y} + y^2 = 0$ wybranymi metodami.

krok	m. Eulera	m. RK 2 rzędu	m. RK 4 rzędu	dokładnie
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,900000	0,909750	0,909091	0,909091
2	0,819000	0,834344	0,833334	0,833333
3	0,751924	0,770418	0,769231	0,769231
4	0,695385	0,715548	0,714286	0,714286
5	0,647029	0,667945	0,666667	0,666667
6	0,605164	0,626261	0,625000	0,625000
7	0,568542	0,589458	0,588236	0,588235
8	0,536218	0,556730	0,555556	0,555556
9	0,507465	0,527437	0,526316	0,526316
10	0,481713	0,501066	0,500000	0,500000

dziale czasu $[t_n; t_{\theta\Delta t}]$: $\mathbf{a}_{n+\tau} = \mathbf{a}_n + \tau/(\theta h)(\mathbf{a}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{a}_t)$. Jest to metoda niejawną, bezwarunkowo stabilną przy $\theta \geq 1,37$. Zwykle stosuje się wartość $\theta = 1,40$.

Metoda Houbolta Przyspieszenie \mathbf{a}_{n+1} i prędkość \mathbf{v}_{n+1} zastępowane są wyrażeniami: $\mathbf{a}_{n+1} = (2\mathbf{u}_{n+1} - 5\mathbf{u}_n + 4\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2})/h^2$ i $\mathbf{v}_{n+1} = (11\mathbf{u}_{n+1} - 18\mathbf{u}_n + 9\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_{n-2})/6h^2$. Są to w istocie różnice wstecz, z błędem rzędu $(\Delta t)^2$. Idea metody zbliżona jest do metody różnic centralnych. Zastosowanie z kolei upodabnia ją do metod Adamsa. Równowaga sił w równaniu ruchu ustalana jest w chwili t_{i+1} (w metodzie różnic centralnych w chwili t_i) i stąd w końcowym schemacie obliczeniowym otrzymuje się układ równań algebraicznych ze współczynnikami wynikającymi z macierzy sztywności \mathbf{K} . Metoda Houbolta jest metodą niejawną. Nie ma też krytycznej wartości kroku całkowania Δt . Ciekawostką jest fakt, że przy zerowych macierzach bezwładności i tłumienia schemat obliczeniowy sprowadza się do rozwiązania zadania statyki. Podobna cecha zostanie pokazana w metodzie elementów czasoprzestrzennych w rozdziale 4.6.3.

Dodatkowo można sięgnąć do prac przeglądowych [56, 57, 138, 158].

3.1. Metoda pojedynczego kroku SSPj

Metoda została opisana w pracach [177, 187] oraz w [155]. W szczególnych przypadkach można przekształcić ją w znane klasyczne metody całkowania równania różniczkowego ruchu.

Przedstawmy przemieszczenia na końcu kroku w formie szeregu Taylora

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_i + \dots + \frac{1}{p!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} \Delta t^p . \quad (3.17)$$

Znanymi wielkościami są wartości \mathbf{y}_i oraz kolejne pochodne $\dot{\mathbf{y}}_i$, $\ddot{\mathbf{y}}_i$ itd. $\boldsymbol{\alpha}_i^{(p)}$ zawiera nieznanne współczynniki w wyrazach reszty rozwinięcia. Rozwinięcie (3.17) oraz pochodną zapisujemy w skrócie następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= \sum_{q=0}^{p-1} \frac{\Delta t^q}{q!} \mathbf{y}_i^{(q)} + \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} , \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \mathbf{y}_i^{(q)} + \frac{\Delta t^{(p-1)}}{(p-1)!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Metoda SSPj (*ang.* single step) charakteryzuje się dwoma parametrami: p – liczbą wyrazów w szeregu Taylora oraz j – rzędem równania różniczkowego. Nieznane parametry $\boldsymbol{\alpha}_i^{(p)}$ wyznaczymy na podstawie postulatu spełnienia równań ruchu globalnie w sposób ważony

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{W}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y}) dt = 0 . \quad (3.19)$$

Definiujemy iloraz

$$\frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} t^q dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} = \theta_q \Delta t^q \quad q = 1, 2, \dots, p, \quad 0 \leq \theta_q \leq 1 . \quad (3.20)$$

Korzystając z definicji (3.20) możemy określić następujące całki:

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} \mathbf{y} dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} &= \sum_{q=0}^{p-1} \frac{\Delta t^q}{q!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_q + \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} \theta_p, \\ \frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} \dot{\mathbf{y}} dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} &= \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_{q-1} + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} \theta_{p-1}, \quad (3.21) \\ \frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{y}} dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} &= \sum_{q=2}^{p-1} \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_{q-2} + \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} \theta_{p-2}, \\ \frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} \mathbf{F} dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} &= \bar{\mathbf{F}}.\end{aligned}$$

Dzielimy równanie (3.19) przez $\int_0^{\Delta t}$ i wykorzystujemy (3.21). Otrzymujemy

$$\mathbf{M} \left(\sum_{q=2}^{p-1} \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_{q-2} + \frac{\Delta t^{(p-2)}}{(p-2)!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} \theta_{p-2} \right) \quad (3.22)$$

$$+ \mathbf{C} \left(\sum_{q=1}^{p-1} \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_{q-1} + \frac{\Delta t^{(p-1)}}{(p-1)!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} \theta_{p-1} \right) \quad (3.23)$$

$$+ \mathbf{K} \left(\sum_{q=0}^{p-1} \frac{\Delta t^q}{q!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_q + \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\alpha}_i^{(p)} \theta_p \right) - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Stąd wyznaczmy współczynniki $\boldsymbol{\alpha}_n^{(p)}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_n^{(p)} &= \left(\frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \theta_{p-2} \mathbf{M} + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \theta_{p-1} \mathbf{C} + \frac{\Delta t^p}{p!} \theta_p \mathbf{K} \right) \\ &\quad \cdot \left(\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{M} \ddot{\tilde{\mathbf{y}}}_{i+1} - \mathbf{C} \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_{i+1} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{y}}_{i+1} \right).\end{aligned} \quad (3.25)$$

Wielkości $\tilde{\mathbf{y}}$, $\dot{\tilde{\mathbf{y}}}$ i $\ddot{\tilde{\mathbf{y}}}$ oznaczają średnie wartości predyktorów w przedziale czasu

i definiowane są następująco:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}_{i+1} &= \sum_{q=0}^{p-1} \frac{\Delta t^q}{q!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_q, \\ \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_{i+1} &= \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_{q-1}, \\ \ddot{\tilde{\mathbf{y}}}_{i+1} &= \sum_{q=2}^{p-1} \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \mathbf{y}_i^{(q)} \theta_{q-2}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Do rozpoczęcia obliczeń potrzebne są wartości \mathbf{y}_0 oraz pochodne $\mathbf{y}_0^{(q)}$ do rzędu $p-1$ włącznie. Uproszczony schemat obliczeń przedstawia algorytm 2. Istotną sprawą jest dobór współczynników θ_q oraz przyjęcie odpowiedniego kroku Δt . Można konstruować mniej lub bardziej rozbudowane schematy całkowania, dobierając odpowiednie rozwinięcia (3.17). W pracy [187] pokazano, w jakich przypadkach metoda SSPj staje się metodą Newmarka, Newmarka-Bossaka, Wilsona, Houbolta i in.

Algorytm 2 Schemat obliczeń metodą SSPj.

- Wyznaczyć $\tilde{\mathbf{y}}_{i+1}$, $\dot{\tilde{\mathbf{y}}}_{i+1}$ i $\ddot{\tilde{\mathbf{y}}}_{i+1}$ z (3.26).
 - Obliczyć $\boldsymbol{\alpha}_i^{(p)}$ z (3.25).
 - Obliczyć \mathbf{y}_{i+1} , $\dot{\mathbf{y}}_{i+1}$, ... z równania (3.18).
 - Powtórzyć obliczenia w następnym kroku.
-

3.2. Metoda Parka

Metoda opisana przez Parka w pracy [137] przeznaczona jest do zadań opisanych równaniami sztywnymi. Sztywne równania to równania różniczkowe, które, mimo zastosowania bardzo małego kroku całkowania w obliczeniowych metodach numerycznych, dają rozwiązania niestabilne. Zadaniem podstawowym metody obliczeniowej jest w tym przypadku odpowiednio dokładne całkowanie zmiennych odpowiadających za zachowanie sztywne, czyli charakteryzujących się wysokimi częstościami drgań, bez utraty wydajności procesu

obliczeniowego. Konstruowanie metod rozwiązywania tego typu zagadnień zapoczątkował Gear [73].

3.3. Metoda różnic centralnych

Jest to najczęściej stosowana w praktyce metoda całkowania równań różniczkowych ruchu. Co więcej, stosowana jest do niemal wszystkich zagadnień numerycznego rozwiązywania problemów początkowych. Jej podstawową cechą jest prostota sformułowania.

Rozpatrzmy równanie różniczkowe opisujące ruch prostego oscylatora:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = f(t) . \quad (3.27)$$

Pochodne zastępujemy ilorazami różnicowymi:

$$\dot{q}_i = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta t} , \quad (3.28)$$

$$\ddot{q}_i = \frac{\dot{q}_{i+1/2} - \dot{q}_{i-1/2}}{\Delta t} = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\Delta t^2} . \quad (3.29)$$

Określamy równanie (3.27) w chwili $t = t_i$, a następnie wykorzystujemy zdefiniowane wyżej ilorazy różnicowe (3.28) i (3.29). Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy następującą formułę krokową:

$$q_{i+1} = \left(m + \frac{h}{2} c \right)^{-1} \left[(2m - k\Delta t^2) q_i + \left(\frac{h}{2} c - m \right) q_{i-1} + \Delta t^2 f_i \right] . \quad (3.30)$$

Dysponując rozwiązaniami w dwóch kolejnych chwilach $i - 1$ i i możemy wyznaczyć rozwiązanie w chwili następnej $i + 1$. Trudność może wystąpić w pierwszym kroku obliczeń, na etapie uwzględniania warunków początkowych. Przyjmijmy, że równanie (3.27) rozwiązujemy przy następujących warunkach początkowych: $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. W takim przypadku pierwszy warunek wprowadzamy bezpośrednio do (3.30), a w drugim pochodną zastępujemy ilorazem różnicowym wstecz $\dot{q}_0 = (q_0 - q_{-1})/\Delta t$. Mamy więc brakującą wartość $q_{-1} = q_0 - \dot{q}_0 h$. Ta wielkość pomocnicza jest formalnie potrzebna do uruchomienia procedury obliczeniowej. Algorytm 3 przedstawia proces obliczeniowy w przypadku zadania początkowych wartości przemieszczenia q_0 i prędkości \dot{q}_0 .

Przejdźmy teraz do macierzowej postaci równania 3.30. W przypadku pełnej macierzy bezwładności otrzymujemy następujące równanie macierzowe:

Algorytm 3 Metoda różnic centralnych

1. Wykorzystując warunek początkowy $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ wyznaczamy brakującą wartość $q_{-1} = q_0 - \dot{q}_0 h$.
2. Znając wartości q_{-1} i q_0 wyznaczamy q_1 (tj. q_{i+1} przy $i = 0$):

$$q_{i+1} = \left(2 - \frac{k}{m} h^2\right) q_i - q_{i-1} + \frac{h^2}{m} f_i.$$
3. Przechodzimy do następnego kroku obliczeniowego i powtarzamy p. 2, przy $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\mathbf{M} \mathbf{q}_{i+1} = (2\mathbf{M} - h^2 \mathbf{K}) \mathbf{q}_i - \mathbf{M} \mathbf{q}_{i-1} + h^2 \mathbf{F}_i. \quad (3.31)$$

Jeżeli bezwładność konstrukcji potrafimy przedstawić jako diagonalną macierz bezwładności, wówczas odwrócenie \mathbf{M} jest natychmiastowe i schemat obliczeniowy upraszcza się do postaci następującej:

$$\mathbf{q}_{i+1} = (2\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} h^2) \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}. \quad (3.32)$$

Otrzymujemy układ równań algebraicznych o równaniach rozseparowanych. Rozwiązujemy go równanie po równaniu, przy minimalnym koszcie numerycznym. Widzimy, że w przypadku pełnej macierzy bezwładności \mathbf{M} musimy rozwiązać układ równań o pełnej lub pasmowej macierzy współczynników. Z tego względu metoda różnic centralnych stosowana jest zazwyczaj z wykorzystaniem diagonalnej macierzy bezwładności. Metoda konstruowania diagonalnej macierzy bezwładności jest stosunkowo prosta. W najprostszym sposobie uzyskujemy macierz diagonalną umieszczając cząstki materialne o odpowiednich masach m_i , tak aby ich suma równała się całkowitej masie obiektu m . Cząstki materialne nie mają bezwładności obrotowej. Obrotową bezwładność można uwzględnić w macierzach bezwładności belek lub płyt, dodając dość dowolnie odpowiednie wyrazy diagonalne, obrazujące bezwładność obrotową części rozpatrywanego zdyskretyzowanego fragmentu konstrukcji. W przypadku belki będzie to moment bezwładności obrotowej względem punktu węzłowego połowy elementu o masie $m/2$ i długości $l/2$, a więc $I = (m/2) \cdot (l/2)^2/3$.

Taki sposób granulowania masy jest wystarczający w większości zadań. W sytuacji, kiedy mamy do czynienia zarówno z posuwistymi jak i obrotowymi stopniami swobody, o przemieszczeniach i naprężeniach elementów konstrukcji decydują te pierwsze. Nieprecyzyjny opis bezwładności obrotowej wpływa minimalnie na wyniki. Częstości drgań własnych można wyzna-

czać z błędem nie przekraczającym kilku procent. Wyższe częstotliwości, z dużym udziałem zginania w odpowiadających im formach własnych, charakteryzują się już błędem kilkudziesięcioprocentowym. Z tego względu poszukiwano dokładniejszych sposobów zastępowania konsystentnej macierzy bezwładności macierzą diagonalną. Metoda zaproponowana w pracy [82] (metoda HRZ) jest równie prosta. Zasadą jest uwzględnianie jedynie diagonalne wyrazy macierzy pełnej. Są one odpowiednio skalowane. Postępowanie można ująć w następujących krokach:

1. Obliczamy jedynie diagonalne wyrazy konsystentnej macierzy bezwładności.
2. Obliczamy masę całkowitą m elementu dyskretnego.
3. Obliczamy liczbę s równą sumie diagonalnych wyrazów m_{ii} , odpowiadających jedynie stopniom swobody ruchu postępowego w danym kierunku ruchu. Pomijamy tu obrotowe stopnie swobody.
4. Skalujemy wszystkie współczynniki diagonalne mnożąc je przez liczbę m/s . Dzięki temu zachowujemy całkowitą masę elementu.

Przykład 4

Konsystentna macierz bezwładności elementu belki Bernoulliego-Eulera ma postać następującą:

$$\mathbf{M} = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

m jest masą całkowitą elementu $m = \rho Al$. Macierz diagonalizowana bezpośrednio ma postać

$$\mathbf{M} = \frac{m}{2} \text{diag}[1, l^2/12, 1, l^2/12],$$

a diagonalizowana metodą HRZ

$$\mathbf{M} = \frac{m}{2} \text{diag}[1, l^2/78, 1, l^2/78].$$

Metoda HRZ pozwala uzyskać dokładniejsze wyniki odpowiadające wyższym częstotliwościom własnym i związanymi z nimi zjawiskami. Zauważamy, że współczynniki odpowiadające obrotowym stopniom swobody w obu sposobach granulacji masy znacznie się różnią.

3.3.1. Stabilność metody

Problem stabilności był już omawiany w rozdz. 3 w odniesieniu do metody Rungego-Kutty 2 rzędu i ogólnie – metod trapezowych. Teraz rozpatrzmy problem stabilności metody różnic centralnych. Zapiszmy (3.30) jako schemat jednowarstwowy o podwójonej liczbie stopni swobody:

$$\begin{Bmatrix} q_{i+1} \\ q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 - \frac{k}{m} h^2) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_{i-1} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

lub inaczej

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{T} \mathbf{q}_i . \quad (3.34)$$

Wykorzystując powyższy zapis tworzymy rozwiązanie po n krokach obliczeniowych

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{T} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{T} \mathbf{q}_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \mathbf{q}_0 = \mathbf{T}^2 \mathbf{q}_0 \\ &\dots \\ \mathbf{q}_n &= \mathbf{T}^n \mathbf{q}_0 . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Stabilność układu (3.34) wymaga, by energia całkowita układu nie rosła z kroku na krok, a w związku z tym by amplituda drgań zadania przy $n \rightarrow \infty$ była ograniczona. To z kolei prowadzi do warunku koniecznego stabilności układu

$$|\lambda_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad (3.36)$$

gdzie, przy oznaczeniu $\omega^2 = k/m$ mamy

$$\lambda_{1/2} = \frac{\omega h}{2} \sqrt{\omega^2 h^2 - 4} \mp \frac{\omega^2 h^2}{2} \pm 1 \quad (3.37)$$

są wartościami własnymi macierzy \mathbf{T} . Warunek (3.36) pozwala określić maksymalny krok całkowania

$$h_{max} = \frac{2}{\omega} . \quad (3.38)$$

Powyższe kryterium dotyczy pojedynczego stopnia swobody. W układzie o wielu stopniach swobody decydującą częstością jest najwyższa częstość ω_{max} układu, gdyż ta częstość powoduje, że wartość własna macierzy przejścia \mathbf{T} wydłuża promień spektralny \mathbf{T} . Wartość własna pojawia się na zewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Widzimy, że ze wzrostem częstości własnej ω , związanej ze stopniem swobody, maleje dopuszczalny krok czasowy h . W praktyce ma to miejsce przy wzroście sztywności lub zmniejszaniu się bezwładności elementów skończonych. Ważnej

wskazówki dostarcza nam prosta analiza sztywności i bezwładności elementu skończonego pręta o długości l drgającego osiowo. Częstość drgań własnych ω jest proporcjonalna do wyrażenia $\sqrt{E/\rho}/l$. Widzimy, że przy zagęszczeniu siatki podziału dyskretnego długość elementu zmniejsza się, a częstość ω rośnie. W tym samym stopniu zmniejsza się krytyczna wartość kroku czasowego h_{max} .

Zastosujmy kryterium stabilności w przypadku elementu skończonego pręta drgającego osiowo. Niezerową wartością własną jest liczba $\omega^2 = 4E/\rho l^2$. $c^2 = E/\rho$ jest prędkością rozchodzenia się fali w pręcie. Wówczas $\omega = 2c/l$. Uwzględnijmy teraz warunek (3.38) w formie nierówności $h \leq 2/\omega$. Otrzymujemy kryterium stabilności, określające stosunek długości oczka przestrzennej siatki dyskretyzacji l do długości kroku czasowego h

$$l/h \geq c . \quad (3.39)$$

Kryterium to znane jest pod nazwą warunku Couranta [50].

3.3.2. Dokładność metody

Rozpatrzmy dwa elementarne zadania drgań oscylatora o wartościach parametrów $k = 1$ i $m = 1$, przy różnych warunkach początkowych: $q_0 = 0$ i $\dot{q}_0 = 1$ oraz $q_0 = 1$ i $\dot{q}_0 = 0$. Rozwiązaniem pierwszego z tych przypadków jest funkcja $\sin(t)$, drugiego zaś funkcja $\cos(t)$. Każdy inny przypadek zadania jest kombinacją tych dwóch rozwiązań.

Warunki $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 1$ sprowadzamy, przy kroku $\Delta t = h$, do warunków przemieszczeniowych: $q_{-1} = -h$, $q_0 = 0$. Rozwiązanie $y(h) = q_1 = h$. Rozwińmy rozwiązanie ściśle w szereg Taylora

$$\sin(h) = h - \frac{1}{3!}h^3 + \dots . \quad (3.40)$$

Błąd maksymalny w tym przypadku wynosi

$$\epsilon_1(h) = |\sin(x) - y(h)| = \frac{1}{3!}h^3 - \dots . \quad (3.41)$$

W drugim przypadku, $q_0 = 1$, $\dot{q}_0 = 0$, warunki początkowe sprowadzamy do następujących warunków przemieszczeniowych: $q_{-1} = q_1$, $q_0 = 1$. Uwzględnienie ich w równaniu (3.30) daje rozwiązanie $y(h) = 1 - h^2/2$. Wiedząc, że $\cos(h) = 1 - 1/2!h^2 + 1/4!h^4 - \dots$, możemy określić w tym przypadku błąd maksymalny

$$\epsilon_2(h) = |\cos(x) - y(h)| = \frac{1}{4!}h^4 - \dots . \quad (3.42)$$

Wniosek końcowy jest następujący: maksymalny błąd metody różnic centralnych, zależny od kroku całkowania h , wynosi

$$\epsilon(h) = \frac{1}{6}h^3 \quad . \quad (3.43)$$

Błąd jednego kroku wynosi $1/6\omega^3h^3$. Liczba kroków jest proporcjonalna do $1/h$ (np. $n = T/h$). Stąd błąd wyniku po czasie T wynosi $\epsilon = 1/6\omega^3h^3 \cdot T/h$. Jest zatem proporcjonalny do h^2 . Metoda jest rzędu drugiego.

3.4. Metody Adamsa

Grupa metod Adamsa, dobrze znana i wykorzystywana w minionych latach, jest coraz rzadziej stosowana. Mimo że charakteryzuje się atrakcyjnymi własnościami, powoli znika z podręczników akademickich. Przedstawimy w skrócie podstawowe algorytmy metod Adamsa oraz ich zalety. Zasadniczą zaletą jest możliwość stosowania metody wysokiego rzędu (k) bez wzrostu kosztów obliczeniowych. Obliczenia wymagają przechowywania w pamięci odpowiedniej liczby rozwiązań ustalonych w poprzednich krokach obliczeniowych, a dokładnie funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i)$. Aktualny krok obliczeniowy wymaga jedynie jednokrotnego wyznaczenia wartości takiej funkcji oraz zsumowania jej, z odpowiednimi współczynnikami, z wartościami funkcji wyznaczonymi w poprzednich krokach i przechowywanymi w pamięci operacyjnej w liczbie $k-1$. Dysponując odpowiednią liczbą zmagazynowanych wartości \mathbf{f} liczonych wstecz, możemy z pełną swobodą dokonywać wyboru rzędu metody. Co więcej, możemy stosować różny rząd dokładności do wybranych stopni swobody lub całego podobszaru konstrukcji. Te zalety wykorzystywano w badaniu problemów dynamiki maszyn.

Rozpatrzmy równanie różniczkowe

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Po rozwinięciu $y(t)$ w szereg Taylora otrzymujemy

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t y'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} y''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} y'''(t) + \dots \quad (3.45)$$

Z równania (3.44) uzyskujemy

$$y'(t) = f(y, t), \quad y''(t) = f'(y, t), \quad \dots \quad . \quad (3.46)$$

Rozwinięcie (3.45) w chwili t_i możemy zapisać w postaci następującej

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f_i + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f'_i + \frac{\Delta t^3}{3!} f''_i + \dots \quad (3.47)$$

W zależności od liczby wyrazów rozwinięcia Taylora otrzymujemy kolejne formuły odpowiednio wyższego rzędu.

3.4.1. Formuły Adamsa jawne (otwarte)

Formuły jawne metody Adamsa zwane są też formułami Adamsa-Bashorda. Niżej pokażemy Ideę otrzymywania formuł do trzeciego rzędu oraz podamy formułę ogólną wraz ze stabilizowanymi współczynnikami.

Formuła pierwszego rzędu Pozostawiając dwa wyrazy w szeregu (3.47) otrzymujemy formułę Adamsa pierwszego rzędu, identyczną z formułą Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f_i \quad (3.48)$$

Możemy w rozwinięciu (3.47) zastąpić pochodne lewostronnymi ilorazami różnicowymi

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta t} \quad (3.49)$$

Formuła drugiego rzędu Uwzględniamy trzy człony rozwinięcia (3.47)

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f_i + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f'_i + O(\Delta t)^3 \quad (3.50)$$

Zastępujemy pochodną f'_i ilorazem różnicowym określonym wstecz

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta t} \quad (3.51)$$

Ostateczni otrzymujemy formułę drugiego rzędu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{2} (3f_i - f_{i-1}) + O(\Delta t)^3, \quad (3.52)$$

z błędem pojedynczego kroku rzędu $(\Delta t)^3$.

Tablica 3.2: Współczynniki jawnych metod Adamsa.

n	k						rzęd metody
	0	1	2	3	4	5	
0	1						1
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$					2
2	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$				3
3	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$			4
4	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$		5
5	$\frac{4277}{1440}$	$-\frac{7923}{1440}$	$\frac{9982}{1440}$	$-\frac{7298}{1440}$	$\frac{2877}{1440}$	$-\frac{475}{1440}$	6

Formuła trzeciego rzędu Postępujemy podobnie jak w przypadku formuł niższego rzędu. Uwzględniamy cztery wyrazy rozwinięcia (3.47)

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f_i + \frac{\Delta t^2}{2!} f'_i + \frac{\Delta t^3}{3!} f''_i + O(\Delta t)^4. \quad (3.53)$$

Po zastąpieniu pochodnych odpowiednimi różnicami i po uporządkowaniu czynników otrzymujemy formułę jawną Adamsa trzeciego rzędu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{12} (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}) + O(\Delta t)^4. \quad (3.54)$$

Metoda Adamsa jawna dowolnego rzędu Jawną metodę Adamsa rzędu $n + 1$ opisuje schemat

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \sum_{k=0}^n f_{i-k} \alpha_{nk}. \quad (3.55)$$

Współczynniki formuł umieszczono w tab. 3.2.

Rozpoczęcie obliczeń z wykorzystaniem formuł Adamsa rzędu wyższego niż pierwszy wymaga w pierwszych krokach wykorzystania innych metod obliczeniowych. Z powodzeniem można wykorzystać metodę Adamsa pierwszego rzędu, lub kolejno pierwszego, drugiego itd, aż do uzyskania wszystkich wartości f_i, f_{i-1}, \dots wymaganych do kontynuowania obliczeń. W tablicy 3.3

Tablica 3.3: Przykładowe wyniki obliczeń metodami Adamsa.

krok	rzęd metody					
	1	2	3	4	5	6
1	0.900000					
2	0.819000	0.835124				
3	0.751924	0.771831	0.768758			
4	0.695385	0.717345	0.713642	0.714436		
5	0.647029	0.669943	0.665892	0.666860	0.666612	
6	0.605164	0.628349	0.624185	0.625246	0.624933	0.625022
7	0.568542	0.591567	0.587412	0.588480	0.588143	0.588261
8	0.536218	0.558815	0.554749	0.555804	0.555474	0.555595
9	0.507465	0.529472	0.525538	0.526552	0.526227	0.526344
10	0.481713	0.503034	0.499257	0.500227	0.499923	0.500038

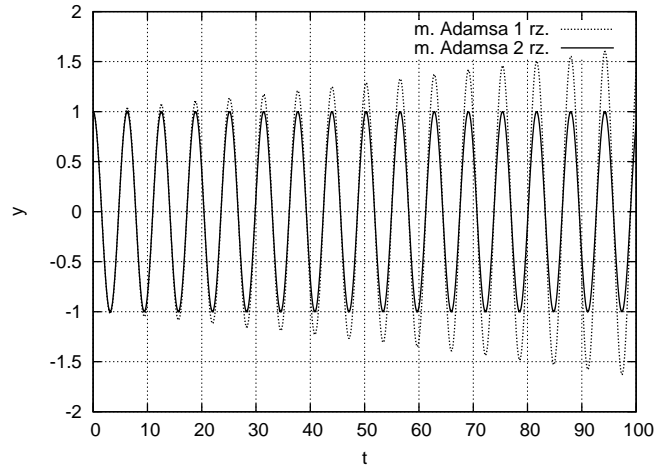
przedstawiono wyniki obliczeń metodami Adamsa elementarnego równania różniczkowego $\dot{y} + y^2 = 0$, przy warunku początkowym $y(0) = 1$. Pierwsze kroki obliczeń wykonano pomocniczo metodami Adamsa niższego rzędu. Stąd też końcowa dokładność nie w pełni zależy od dokładności formuł wyższego rzędu, a jest obciążona wyższym błędem początkowych kroków.

Jako przykład wyników na rys. 3.5 pokazano przemieszczenia w czasie oscylatora, uzyskane metodą Adamsa pierwszego i drugiego rzędu. Widzimy, że metoda rzędu pierwszego jest rozbieżna, choć stopień narastania błędu jest umiarkowany. Krótszy krok czasowy poprawia wynik. Przypomnijmy w tym miejscu, że popularna metoda Rungego-Kutty drugiego rzędu również nie jest stabilna. Metoda Adamsa drugiego rzędu przy odpowiednio dobranym kroku pozwala uzyskać rozwiązanie stabilne.

3.4.2. Metody Adamsa niejawnne (zamknięte)

Funkcję $y(t)$ możemy też rozwinąć w szereg Taylora w punkcie $t + \Delta t$ wstecz

$$\begin{aligned}
 y(t) = y(t + \Delta t - \Delta t) = & y(t + \Delta t) + (-\Delta t)y'(t + \Delta t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}y''(t + \Delta t) + \\
 & + \frac{-(\Delta t)^3}{3!}y'''(t + \Delta t) + \dots \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$



Rysunek 3.5: Przemieszczenia oscylatora uzyskane jawną metodą Adamsa pierwszego i drugiego rzędu.

Przyjmując zapis $y' = f$, $y'' = f'$ itd. w chwili t_i możemy napisać

$$y_i = y_{i+1} - \Delta t f_{i+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f'_{i+1} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} f''_{i+1} + \dots \quad (3.57)$$

Po uporządkowaniu wyrażen otrzymujemy końcową postać formuł niejawnych Adamsa

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f_{i+1} - \frac{(\Delta t)^2}{2!} f'_{i+1} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} f''_{i+1} + \dots \quad (3.58)$$

Formuła pierwszego rzędu Już w najprostszej postaci formuła niejawna Adamsa różni się od formuły jawnej (3.48)

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f_{i+1} \quad (3.59)$$

Formułę nazywamy zamkniętą, ponieważ do uzyskania nieznanej wartości y_{i+1} należy obliczyć $f_{i+1} = f(y_{i+1}, t_{i+1})$, zależne od y_{i+1} . Stosujemy do tego procedurę iteracyjną:

- określamy pierwszą wartość przybliżoną $y_{i+1}^{(0)}$ wartości y_{i+1} ,
- uwzględniamy ją w równaniu i wyznaczamy nową wartość $y_{i+1}^{(1)}$

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \Delta t f(y_{i+1}^{(0)}, t_{i+1}) ,$$

Tablica 3.4: Współczynniki niejawnych metod Adamsa.

n	k						rzęd metody
	0	1	2	3	4	5	
0	1						1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					2
2	$\frac{5}{12}$	$-\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$				3
3	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$			4
4	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$		5
5	$\frac{475}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{27}{1440}$	6

- powtarzamy iterację.

Metoda Adamsa niejawną dowolnego rzędu Niejawną metodę Adamsa rzędu $n + 1$, podobnie jak w przypadku metod jawnych, opisuje schemat

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \sum_{k=0}^n f_{i+1-k} \beta_{nk} + O(\Delta t)^{n+2}. \quad (3.60)$$

Współczynniki formuł umieszczono w tab. 3.4.

Metody Adamsa cechuje łatwość stosowania. W pamięci operacyjnej tworzy się miejsce na wektory \mathbf{f}_i utworzone z rozwiązań w k kolejnych chwilach. Następnie, w zależności od przyjętego rzędu metody k , oblicza się rozwiązanie w chwili i , w której wyznaczono wektor \mathbf{y}_i . Każdy krok czasowy to sumowanie wektorów \mathbf{f}_i z odpowiednimi współczynnikami, a następnie obliczenie wektora \mathbf{f}_{i+1} . Na każdym etapie obliczeń możemy zmieniać rząd stosowanej metody. Zastosowanie metody wyższego rzędu na dowolnym etapie nie wiąże się ze wzrostem kosztu obliczeniowego, o ile odpowiednia liczba kolejnych wektorów \mathbf{f}_i jest utrzymywana w pamięci. Jest to ważne zwłaszcza na etapie początkowym, kiedy obliczenia rozpoczynamy metodą pierwszego rzędu i kontynuujemy podnosząc z kroku na krok rząd metody, aż do uzy-

skania wymaganej dokładności.

3.5. Metoda Newmarka

Metoda została opublikowana w 1959 roku [132]. Opis jej można obecnie znaleźć w każdej książce poświęconej drganiom konstrukcji w ujęciu dyskretnym. Jest to też metoda najczęściej stosowana w komercyjnych pakietach obliczeniowych. Zaletą jej jest niewątpliwie bezwarunkowa stabilność przy odpowiednio dobranych parametrach. Metoda Newmarka doczekała się modyfikacji [81, 178], poprawiających niektóre własności pierwowzoru. Mimo tego pierwotna wersja metody jest najczęściej wybierana do całkowania równań różniczkowych ruchu. O wyborze decyduje, oprócz dobrych własności numerycznych, bez wątpienia zwykła popularność i dostępność procedur.

Wyprowadzenie równań metody jest nieskomplikowane. Rozwijamy w szeregu Taylora funkcję przemieszczeń $u(t)$ oraz prędkości $v(t)$. Reszta, jako ostatni składnik rozwinięcia przemieszczenia u określany jest w punkcie pośrednim $t_\beta = (1 - 2\beta)t_n + 2\beta t_{n+1}$, $0 \leq \beta \leq 1/2$. Z kolei reszta rozwinięcia prędkości v określana jest w chwili $t_\gamma = (1 - \gamma)t_n + \gamma t_{n+1}$. Algorytm 4 formułuje metodę Newmarka. Odpowiednie proste przekształcenia prowadzą do krokowego schematu obliczeniowego. Parametr γ wpływa na własności tłumienia numerycznego, a parametr β z kolei na stabilność metody. Oba parametry są sprzężone ze sobą i należy dobierać je ostrożnie, jeśli decydujemy się na wartości inne niż powszechnie stosowane i opisane w literaturze. $\gamma = 1/2$ zapewnia nam brak tłumienia numerycznego. W tym przypadku przy $\beta \geq 1/4$ otrzymujemy schemat bezwarunkowo stabilny. Maksymalne tłumienie wysokich częstości otrzymujemy przy $\beta = 1/4(\gamma + 1/2)^2$ i $\gamma > 1/2$. Wpływ obu parametrów na wartość promienia spektralnego (a więc na stabilność lub rozbieżność metody) przedstawia rys. 3.6.

W grupie metod Newmarka umieścić można szereg metod pochodnych, wyprowadzanych przy szczególnych wartościach parametrów β .

Metoda stałego przyspieszenia Zwana jest też metodą średniego przyspieszenia. Jest to przypadek $\beta = 1/4$. Metoda jest niejawną, bezwarunkowo stabilną, o dokładności drugiego rzędu. Jest to najpopularniejszy wariant metody Newmarka, chętnie stosowany w praktyce. Figuruje też pod nazwą metody trapezów.

Metoda liniowego przyspieszenia Jest to przypadek $\beta = 1/6$. Metoda jest niejawną, o dokładności drugiego rzędu oraz warunkowo stabilną.

Algorytm 4 Metoda Newmarka

Sformułowanie

- $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(1/2 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1}$
- $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1}$
- $\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}$

Rozwiązanie

- Zbudować układ równań

$$\left(\mathbf{K} + \frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{M}\left(\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{u}_i + \frac{1}{\beta h}\mathbf{v}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{a}_i\right) + \mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{u}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{v}_i + \frac{h}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right)\mathbf{a}_i\right)$$

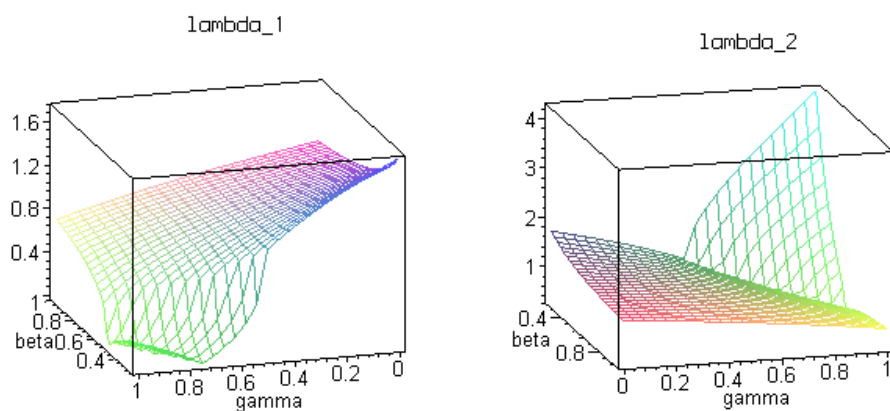
- Rozwiązać układ równań obliczając \mathbf{u}_{i+1}
- Obliczyć brakujące przyspieszenia i prędkości

$$\mathbf{a}_{i+1} = \frac{1}{\beta h^2}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) - \frac{1}{\beta h}\mathbf{v}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_i + \gamma h\mathbf{a}_{i+1}$$

Metoda Foxa-Goldwina Tutaj przy $\beta = 1/12$ uzyskuje się metodę niejawną, drugiego rzędu, warunkowo stabilną. W przypadku braku tłumienia, tj. przy $\mathbf{C} = 0$, otrzymujemy metodę rzędu czwartego.

Metoda różnic centralnych Jest to najprostszy przypadek $\beta = 0$. Metoda jest jawna.



Rysunek 3.6: Wartości własne zależne od parametrów β i γ .

3.6. Metoda Bossaka

Większość schematów całkowania równania różniczkowego ruchu bądź wywodzi się z rozwinięcia funkcji przemieszczeń i prędkości w szereg Taylora, bądź dają się w postaci takiego rozwinięcia przedstawić. Kilka metod powstało w wyniku modyfikacji samego równania ruchu. przykładem może być np. modyfikacja wprowadzona przez Bossaka [178]. Modyfikacji podlegają siły bezwładności. Metoda Newmarka-Bossaka jest rozszerzeniem metody Newmarka. W równaniu ruchu uwzględnia się przyspieszenie \mathbf{a} przed t_{i+1} . Siły bezwładności są interpolowane w przedziale $[t_i, t_{i+1}]$. Sformułowanie metody przedstawiono poniżej (algorytm 5). W przypadku $\alpha_B = 0$ otrzymujemy metodę Newmarka.

Warunki stabilności spełnione są przy

$$\alpha_B \leq 1/2, \quad \beta_B \geq \gamma_B/2 \geq 1/4, \quad \alpha_B + \gamma_B \geq 1/4$$

. Metoda Bossaka charakteryzuje się bardzo ważnymi własnościami tłumiącymi wyższe częstotliwości drgań. Teraz przyjrzymy się przykładowym zastosowaniom metody i wykresowi promienia spektralnego w zależności od wielkości kroku czasowego.

Inną modyfikację, opartą na podobnej prostej koncepcji, wprowadzili autorzy pracy [81]. W tym przypadku wprowadzono zmianę sił potencjalnych, przesuując chwilę, w której są one określane w równaniu ruchu. Równanie

Algorytm 5 Metoda Bossaka.

Sformułowanie

- $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(1/2 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1}$
- $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1}$
- $\mathbf{M}(1 - \alpha_B)\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{M}\alpha_B\mathbf{a}_n + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}$

Rozwiązanie

- Zbudować układ równań

$$\left(\mathbf{K} + \frac{1-\alpha_B}{\beta h^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} +$$

$$+\mathbf{M}\left(\frac{1-\alpha_B}{\beta h^2}\mathbf{u}_i + \frac{1-\alpha_B}{\beta h}\mathbf{v}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{\alpha_B}{2\beta} - 1\right)\mathbf{a}_i\right) +$$

$$+\mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{u}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{v}_i + \frac{h}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right)\mathbf{a}_i\right)$$
- Rozwiązać układ równań obliczając \mathbf{u}_{i+1}
- Obliczyć brakujące przyspieszenia i prędkości

$$\mathbf{a}_{i+1} = \frac{1}{\beta h^2}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) - \frac{1}{\beta h}\mathbf{v}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_i + \gamma h\mathbf{a}_{i+1}$$

ruchu ma postać ujętą w algorytmie 6. Algorytmy oparte na tej modyfikacji są bardzo wrażliwe na parametry metody. Mimo teoretycznych możliwości wpływania na własności metody poprzez dobór parametrów, stabilne rozwiązania uzyskuje się w bardzo wąskim zakresie podanych przez autorów wartości. Z tego względu stosowanie jej nie rozpowszechniło się.

Algorytm 6 Metoda Hilbera, Hughesa i Taylora, wg pracy [81].

Sformułowanie

- $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h \mathbf{v}_n + h^2(1/2 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1}$
 - $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1}$
 - $\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C} \mathbf{v}_{i+1} + (1 + \alpha_H)\mathbf{K} \mathbf{u}_{n+1} - \alpha_H \mathbf{K} \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_{n+1}$
-

Rozwiązanie

- Zbudować układ równań

$$\left((1 + \alpha_H)\mathbf{K} + \frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} +$$

$$+\mathbf{M} \left(\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{u}_i + \frac{1}{\beta h}\mathbf{v}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{a}_i \right) +$$

$$+\mathbf{C} \left(\frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{u}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \mathbf{v}_i + \frac{h}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) \mathbf{a}_i \right) + \alpha_H \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i$$
 - Rozwiązać układ równań obliczając \mathbf{u}_{i+1}
 - Obliczyć brakujące przyspieszenia i prędkości

$$\mathbf{a}_{i+1} = \frac{1}{\beta h^2}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) - \frac{1}{\beta h}\mathbf{v}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_i + \gamma h \mathbf{a}_{i+1}$$
-

3.7. Metoda Parka-Housnera

Metoda Parka-Housnera [139] jest przykładem metod półniejawnych. Łączy w sobie zalety zarówno metod jawnych (niski koszt numeryczny, małe zapotrzebowanie na pamięć), jak i niejawnych (bezwarunkowa stabilność). W metodzie przyjmuje się diagonalną postać macierzy \mathbf{M} . To założenie tutaj podkreślamy, gdyż pozwala znacznie uprościć procedurę i podnieść jej efektywność. Metoda w ogólnym przypadku może być stosowana również przy pełnej macierzy \mathbf{M} . W takim przypadku jednak wymagane jest jednak kosztowne jej odwrócenie. Macierz \mathbf{K} rozkładamy na sumę macierzy trójkątnych. W efekcie otrzymujemy do rozwiązania dwa układy równań algebraicznych. W wyniku otrzymujemy wektory przemieszczeń i prędkości (algorytm 7).

Algorytm 7 Metoda Parka-Housnera

- Budowa macierzy \mathbf{K} i diagonalnej macierzy \mathbf{M}
- Rozkład \mathbf{K} na \mathbf{K}_L i \mathbf{K}_U ($\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_U$, $\mathbf{K}_L = \mathbf{K}_U$)
- Budowa macierzy układów równań:

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}(\mathbf{I} + \alpha\beta h^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_L),$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{I} + \alpha\beta h^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_U),$$

$$\mathbf{g}_{n+1} = \alpha\beta h^2 [\beta \mathbf{f}_{n+1} + (1 - \beta) \mathbf{f}_n] + \mathbf{M}(\mathbf{u}_n + \beta h \mathbf{v}_n)$$
- Rozwiązanie układów równań (o macierzach trójkątnych):

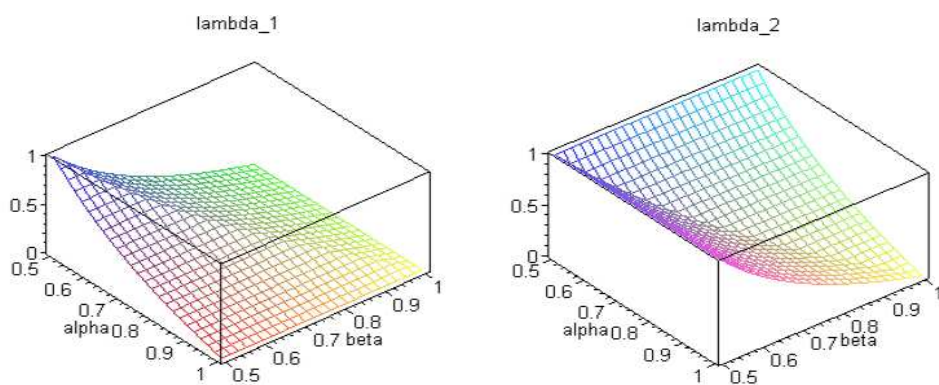
$$\mathbf{L} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{g}_{n+1}, \quad \mathbf{U} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1}$$
- Rozwiązanie końcowe:

$$\mathbf{u}_{n+1} = 1/\beta [\bar{\mathbf{u}}_{n+1} - (1 - \beta) \mathbf{u}_n],$$

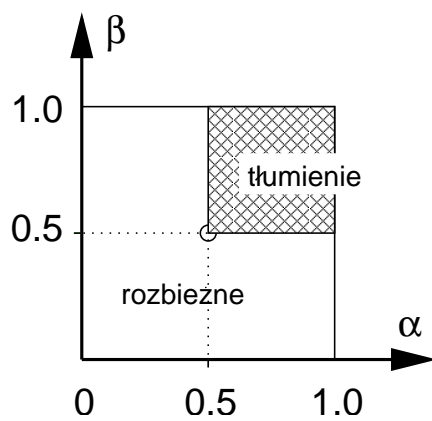
$$\mathbf{v}_{n+1} = 1/(\alpha h) (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - (1 - \alpha)/\alpha \mathbf{v}_n$$

3.7.1. Stabilność metody Parka-Housnera

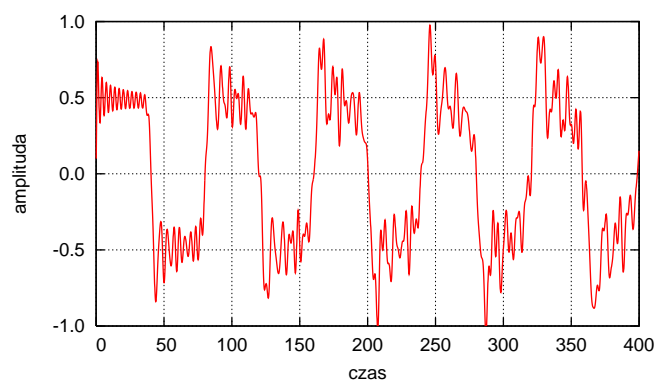
Analiza wartości własnych macierzy przejścia daje wynik graficzny przedstawiony na rys. 3.7. Wartości pokazane na obu wykresach mają wartość równą 1 jedynie w punkcie $\alpha = \beta = 1/2$. Co więcej, przy $\alpha, \beta > 1/2$ metoda wykazuje tłumienie. W pozostałej części obszaru parametrów jest rozbieżna (rys. 3.8). Rys. 3.9 przedstawia wykres w funkcji czasu przemieszczeń osiowych swobodnego końca pręta, obciążonego impulsem w chwili początkowej. Warunki początkowe zadano jako zerowe przemieszczenia oraz zerowe prędkości, za wyjątkiem węzła swobodnego, w którym zadano prędkość początkową v_0 . Wykres przemieszczeń obarczony jest dużym udziałem drgań parazyticznych. Ich amplitudy sięgają wartości 100% amplitudy wyniku teoretycznego. Chociaż uśredniony, wygładzony wykres dość dobrze pokrywa się z linią teoretyczną, to jednak przykład analizy numerycznej drgań nietłumionych pokazuje pułapkę w sytuacji kiedy może dochodzić do lokalnego zniszczenia materiału.



Rysunek 3.7: Wartości własne w metodzie Parka-Housnera, zależne od parametrów α i β .



Rysunek 3.8: Obszar stabilności w metodzie Parka-Housnera.



Rysunek 3.9: Przesunięcia swobodnego końca pręta, uzyskane metodą Parka-Housnera.

3.8. Metoda Trujillo

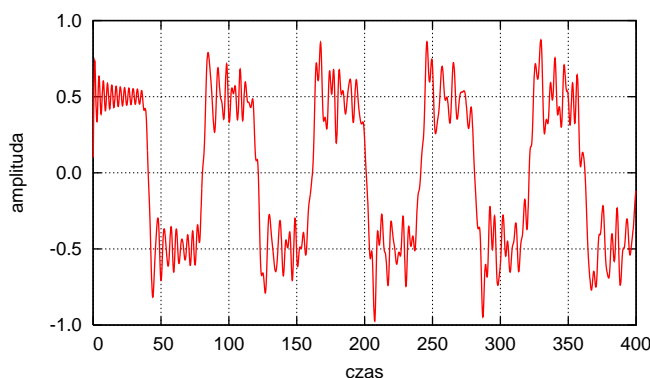
Metoda opracowana przez Trujillo [171] opiera się również na koncepcji rozkładu macierzy tłumienia \mathbf{C} i sztywności \mathbf{K} na sumę macierzy trójkątnych: górnej i dolnej. Macierz bezwładności \mathbf{M} może być macierzą pełną, choć w przypadku postaci diagonalnej wynikowe układy równań algebraicznych upraszczają się, a ich macierze współczynników przyjmują formy trójkątne. Wówczas naprzemiennie rozwiązuje się układ równań z macierzą trójkątną dolną (algorytm 8, p. 1) i z macierzą trójkątną górną (p. 3). Każde z rozwiązań daje w wyniku obliczeń prędkości, a następnie przemieszczenia w chwili odległej o Δt od poprzednio rozpatrywanej chwili. W efekcie po realizacji obu etapów obliczeń posuwamy się o krok $h = 2\Delta t$.

Metoda zwykle operuje trójkątnymi macierzami współczynników układów równań. Znacznie przyspiesza to obliczenia. Metoda Trujillo jest metodą jawną. Uzyskujemy bezwarunkową stabilność, jeśli podział macierzy jest symetryczny. W przypadku niesymetrycznego podziału algorytm jest warunkowo stabilny, choć wykazuje wyższą dokładność obliczeń. Dodatkową ważną zaletą jest możliwość posługiwania się jedynie macierzami elementów skończonych. Nie ma potrzeby formowania macierzy globalnych. Podnosi to znacznie efektywność metody Trujillo. Zaletą jej też brak parametrów kontrolnych, wymagających ustalenia wartości. Wadą jest dwuetapowy algorytm oraz konieczność stosowania, z uwagi na efektywność obliczeń, diagonalnej macierzy mas.

Algorytm 8 Metoda Trujillo.

1. $\left(\mathbf{M} + \mathbf{C}_L \frac{h}{2} + \mathbf{K}_L \frac{h^2}{8}\right) \mathbf{v}_{j+1/2} =$
 $= \left(\mathbf{M} - \mathbf{C}_U \frac{h}{2} - \mathbf{K}_L \frac{h^2}{8}\right) \mathbf{v}_j - \mathbf{K}_L \frac{h}{2} \mathbf{u}_j + (\mathbf{f}_j + \mathbf{f}_{j+1}) \frac{h}{4}$
2. $\mathbf{u}_{j+1/2} = \mathbf{u}_j + \frac{h}{4} (\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j+1})$
3. $\left(\mathbf{M} + \mathbf{C}_U \frac{h}{2} + \mathbf{K}_U \frac{h^2}{8}\right) \mathbf{v}_{j+1} =$
 $= \left(\mathbf{M} - \mathbf{C}_L \frac{h}{2} - \mathbf{K}_U \frac{h^2}{8}\right) \mathbf{v}_{j+1/2} - \mathbf{K}_U \frac{h}{2} \mathbf{u}_{j+1/2} + (\mathbf{f}_j + \mathbf{f}_{j+1/2}) \frac{h}{4}$
4. $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_{j+1/2} + \frac{h}{4} (\mathbf{v}_{j+1/2} + \mathbf{v}_{j+1})$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_U, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_L + \mathbf{C}_U, \quad t = jh = 2j\Delta t$$



Rysunek 3.10: Przeszaczenia swobodnego końca pręta, uzyskane metodą Trujillo.

Rys. 3.10 pokazuje wykres w czasie przemieszczeń osiowych swobodnego końca pręta, pod wpływem impulsu początkowego. Metoda Trujillo lepiej niż metoda Parka-Housnera odwzorowuje teoretyczny, prostokątny wykres drgań. Dane w zadaniu dobrano tak, że okres drgań wynosi 80. W odpowiednich chwilach wykres teoretyczny powinien przebiegać pionowo, gdyż rozwiązanie jest tam nieciągłe. W kolejnych cyklach drgania pasożytnicze mają nieco mniejsze amplitudy i pozostawiają prostokątny charakter wykresu. Niestety, obserwuje się pogarszanie się wyników wraz ze wzrostem kroku czasowego. Wywołane jest to ograniczoną prędkością przepływu informacji w jednym kroku obliczeniowym, w porównaniu z metodami całkowicie jawnymi (patrz rozdz. 3.9).

3.9. Własności schematów całkowania

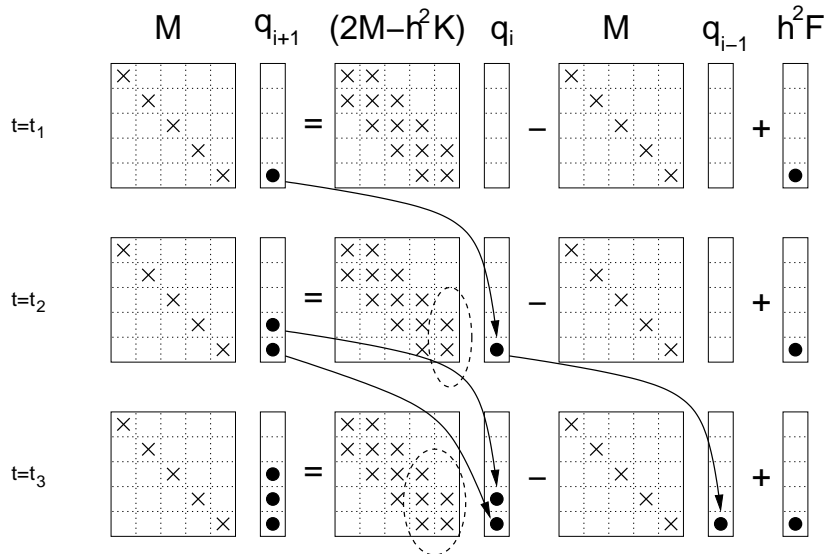
W klasycznym metodach analizy drgań konstrukcji najczęściej stosujemy jedną, tę samą metodę całkowania równania różniczkowego do całego obszaru konstrukcji i do wszystkich jego stopni swobody. Często pewne podobszary lub pewien rodzaj stopni swobody nie wymaga dużej dokładności obliczeń i drobnego kroku całkowania. Przykładem może być ruch osiowy ramownic budynków wysokich. Istotna z punktu inżynierskiego jest obserwacja ruchu giętnego prętów składowych. W tym kierunku sztywność elementów konstrukcji jest zdecydowanie mniejsza niż sztywność osiowa. Drgania osiowe prętów mają minimalne amplitudy i mniejsze znaczenie praktyczne.

W związku z tym możemy je obliczać z mniejszą dokładnością. Podobnie jest w przypadku konstrukcji posadowionych na gruncie, współdziałania konstrukcji z podłożem lub otaczającą cieczą. Bezwładność i sztywność obu podobszarów mocno się różni. Krótki krok czasowy procedur jawnych, wymuszony przez kryterium stabilności lub dokładności, znacznie wydłuża obliczenia. Rozsądne postępowanie polega na stosowaniu metody jawnej do modelowania gruntu oraz metody niejawnej do modelowania posadowionej konstrukcji. Stosowanie mieszanych operatorów do całkowania otwiera nowe możliwości poprawy dokładności i zwiększenia wydajności rozwiązań złożonych zadań. Opis zagadnień dotyczących zarówno statyki jak i dynamiki przedstawiono m.in. w [136]. Techniki oparte na podziale algebraicznym nazywane są metodami podziału operatora (ang. *operator splitting*), a oparte na podziale obszaru konstrukcji - metodami podziału obszaru (ang. *domain splitting*).

Metody podziału operatora oraz metody półniejawne można zakwalifikować do tej samej grupy metod. Cechą charakterystyczną jest tu chęć utrzymania bezwarunkowej stabilności lub znaczne zwiększenie krytycznego kroku całkowania. Zwiększenie kroku całkowania można osiągnąć przez np. techniki makroelementów (rozdz. 4.4), w których w opisie kolejno po sobie następujących warstw czasu eliminuje się algebraicznie pośrednie stopnie swobody. W ten sposób zwiększa się rozpiętość czasową uzyskanego kroku całkowania. Ta sama technika odnosi się do zmiennych przestrzennych.

Przepływ informacji

Poszczególne metody obliczeniowe różnią się jeszcze jedną istotną cechą. Jest nią schemat przepływu informacji w siatce węzłów w przestrzeni i czasie. Rozpatrzmy przykładowo układ równań algebraicznych, do którego sprowadza nas w każdym kroku obliczeniowym metoda różnic centralnych z diagonalną macierzą bezwładności. Impuls zewnętrzny działający jako obciążenie na ostatni stopień swobody wywołuje niezerowe przemieszczenie ostatniego stopnia swobody (rys. 3.11). W następnym kroku iloczyn macierzy $2\mathbf{M} - h^2\mathbf{K}$ i wektora przemieszczeń \mathbf{q}_i daje w wyniku wektor o niezerowych dwóch ostatnich wyrazach. To z kolei daje niezerowe dwa ostatnie elementy wektora rozwiązań \mathbf{q}_{i+1} . W ten sposób w każdym kolejnym kroku obliczeniowym działanie początkowego pojedynczego impulsu siły zewnętrznej \mathbf{F}_0 propaguje się na sąsiednie węzły w siatce elementów skończonych w tempie jednego węzła w jednym kroku. Prędkość propagowania się informacji wynosi więc średnio $\Delta x/\Delta t$, gdzie Δx jest przestrzenną odległością sąsiadujących węzłów.

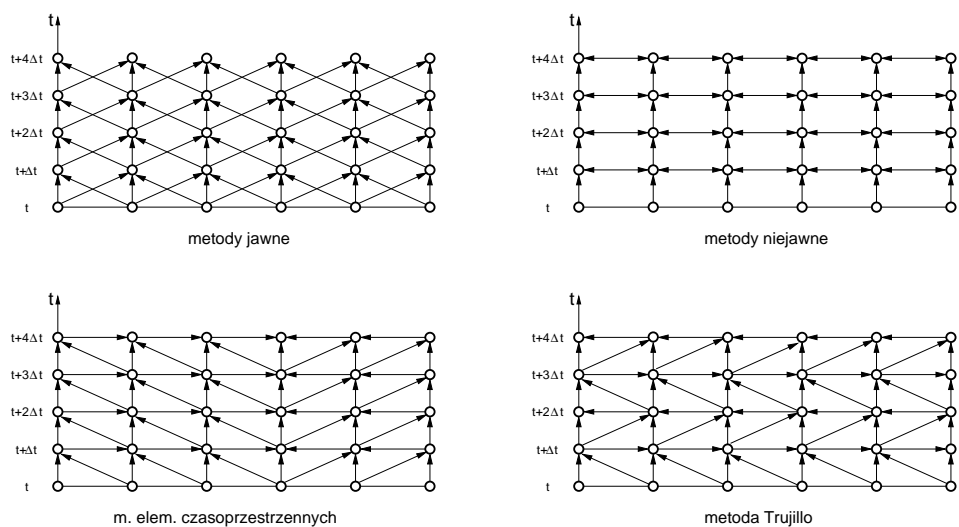


Rysunek 3.11: Mechanizm przepływu informacji między kolejnymi krokami obliczeniowymi w metodzie różnic centralnych.

W przypadku metod niejawnych mamy do czynienia z rozwiązaniem układu równań algebraicznych o pełnej macierzy współczynników. Pojedynczy impuls zewnętrzny przekłada się natychmiast na wszystkie niewiadome układu. Z kolei omówiona w następnych rozdziałach metoda elementów czasoprzestrzennych z elementami czasoprzestrzennymi o kształcie sympleksów charakteryzuje się prędkością przepływu informacji ograniczoną do ukośnych boków siatki czasoprzestrzennej. Metoda Trujillo wykazuje naprzemienną ograniczoną prędkość przepływu informacji w siatce węzłów. Schemat przepływu informacji w wybranych metodach obliczeniowych pokazano na rys. 3.12.

3.9.1. Dokładność metod

W tab. 3.5 oszacowano błąd globalny wybranych metod obliczeniowych. W zasadzie wszystkie metody cechują się błędem globalnym rzędu drugiego. Można przytoczyć tu oszacowania zamieszczone w rozdziale 4.5.4 i 4.6.1, a zwłaszcza równanie (4.162).



Rysunek 3.12: Schemat przepływu informacji w wybranych metodach obliczeniowych.

Tablica 3.5: Błąd globalny metod obliczeniowych

metoda	stopień błędu	współczynnik
Runge-Kutta 2 rz.	h^2	1/6
m. różnic centralnych	h^2	1/6
m. elem. czasoprzestrzennych	h^2	1/12
m. elem. czasoprzestrzennych wyższego rzędu r. (4.162)	h^3	1/12
m. Newmarka $\beta=1/4$	h^2	$(\sqrt{2} - 1)/2$
Runge-Kutta 4 rz.	h^4	1/120

Rozdział 4

Metoda elementów czasoprzestrzennych

W poprzednim rozdziale omówiliśmy niektóre klasyczne metody całkowania równań różniczkowych ruchu. Charakteryzują się one interesującymi własnościami, niedocenianymi przez badaczy i twórców oprogramowania. W niniejszej części zajmujemy się metodą elementów czasoprzestrzennych. Podamy podstawowe pojęcia oraz przedstawimy drogę postępowania przy wyprowadzaniu równań krokowych metody. Przedstawimy sformułowanie przemieszczeniowe, wykorzystywane we wczesnym okresie rozwoju metody oraz sformułowanie prędkościowe, które z powodzeniem stosowane jest obecnie do trudnych i nietypowych zadań.

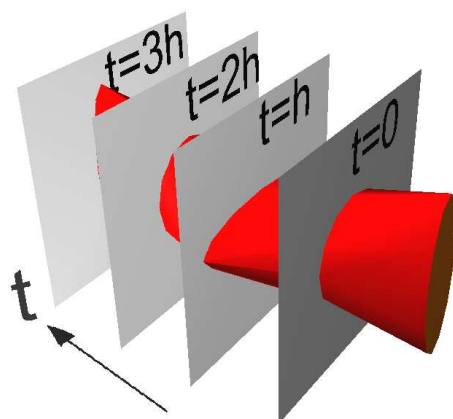
Zasadniczym elementem różniącym metodę elementów czasoprzestrzennych od klasycznych podejść do rozwiązywania problemu początkowo-brzegowego jest sposób dyskretyzacji równania różniczkowego. Klasycznie stosuje się dwuetapową aproksymację, oddzielnie względem zmiennych przestrzennych i oddzielnie względem czasu. W związku z tym w pierwszym etapie układ równań różniczkowych cząstkowych przekształcany jest w układ równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu podstawowych zmiennych stanu, a dalej stosuje się czysto numeryczne procedury całkowania równań różniczkowych względem czasu. Takie podejście ma swoje zalety, wynikające głównie z możliwości doboru w obu etapach najskuteczniejszych narzędzi, z metodami ścisłymi włącznie. Poza tym łatwe jest przejście od rozwiązań statycznych do rozwiązań dynamicznych. Większość procedur numerycznych statyki daje się przy tej okazji łatwo wykorzystać. W istocie

rozwiązanie zadania dynamiki sprowadza się do rozwiązania ciągu pewnych zadań statyki (rys. 2.1). Znaczny jest też w tym zakresie dorobek związany z oszacowaniem błędu oraz uzyskaniem bezwarunkowej stabilności rozwiązania z uwagi na krok czasowy całkowania równania różniczkowego. Wszystko to sprawia, że najpopularniejsze metody, t.j. metoda elementów skończonych połączona z metodą całkowania w czasie, np. metodą Newmarka, na stałe weszły do praktyki obliczeń symulacyjnych.

Jedną z wad podejścia klasycznego jest konieczność stosowania niezmiennego w czasie (stacjonarnego) podziału (dyskretyzacji) rozpatrywanego obszaru przestrzennego. Bardzo utrudnione jest w takim przypadku lokalne dostosowanie siatki podziału do zachodzących procesów (np. rozwój stref plastycznych, stref kontaktu, propagacja szczelin, przemieszczanie się obciążenia). Istniejące metody adaptacyjne, w tym metody wielosiatkowe (*ang.* multigrid), czy ruchomych siatek (*ang.* moving mesh), są pewną próbą dostosowania procesu numerycznego do przebiegu zjawiska i usunięcia wspomnianej wady. Jednakże pierwsza z wymienionych technik stosowana jest zasadniczo do zadań statyki, druga natomiast, na obecnym etapie rozwoju, pozwala skutecznie modelować zadania transportu ciepła, masy itp. Trzeba jednak podkreślić pewne związki koncepcji metody ruchomych siatek z prezentowaną tu metodą elementów czasoprzestrzennych.

Drugą poważną wadą jest zwykle stosowanie takiej samej procedury numerycznej całkowania w czasie w odniesieniu do wszystkich węzłów siatki podziału. Możliwe jest wprawdzie lokalne stosowanie procedur całkowania równań różniczkowych o dokładności wyższego rzędu, lecz z uwagi na opis zjawisk fizycznych w jednakowym odstępnie czasu (kroku czasowym) w całym obszarze, nie poprawia się tym w istocie numerycznego modelu zadania. Bezwarunkowo stabilny schemat całkowania równania ruchu pozwala zwiększyć efektywność obliczeń przez wydłużenie kroku czasowego, lecz przy tym wprowadza znaczny błąd amplitudowy i fazowy, różny w różnych strefach obszaru konstrukcji. Zagęszczenie siatki podziału przynosi z jednej strony poprawę dokładności aproksymacji przestrzennej, lecz z drugiej strony może pogorszyć wyniki całkowania w czasie. Lokalna ingerencja w sposób całkowania w czasie, na poziomie elementu skończonego, w zależności od jego wymiarów czy charakterystyk materiałowych, jest zwykle trudna.

Oczywiście cała złożoność celów obliczeniowych nie pozwala kategorycznie ustalić wad i zalet poszczególnych grup metod. Tłumienie przez metodę obliczeniową wyższych częstotliwości drgań jest wadą w zadaniach falowych, zaś zaletą w analizie drgań konstrukcji. Dobór narzędzia obliczeniowego odbywa się zależnie od rodzaju zadania, typu zjawisk wymagających zbadania, potrzebnej dokładności, będącej w dyspozycji maszyny obliczeniowej,



Rysunek 4.1: Ciągła w czasie reprezentacja zadania dynamiki.

z uwzględnieniem także czynników pozamerytorycznych (np. dostępność gotowych procedur numerycznych, własne doświadczenia itp.).

Aproksymacja czasoprzestrzenna rozwiązań zadań dynamiki konstrukcji nie ma pewnych wymienionych wcześniej wad klasycznych metod numerycznych. Nie jest jednak metodą doskonałą. W istocie sprowadza się ona do tego, że funkcje \mathbf{u} , charakteryzujące rozwiązanie, opisywane są w podobszarach czasoprzestrzennych poprzez parametry węzłowe \mathbf{q}_e (rys. 4.1)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q}_e . \quad (4.1)$$

Macierz $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ jest macierzą funkcji interpolujących, zależnych od zmiennych przestrzennych i od czasu¹. Takie podejście zakłada ciągły rozkład charakterystycznych funkcji, np. przemieszczeń bądź prędkości, w całym obszarze czasoprzestrzennym $\Omega = \{\mathbf{x}, t : \mathbf{x} \in V(t), 0 \leq t < \infty\}$, w którym konstrukcja jest rozpatrywana. W dyskretnym czasie $t_i, i=0, 1, 2, \dots$, można stosować różne bazy węzłów (choć z pewnymi ograniczeniami), a w związku z tym dostosowywać siatkę podziału do bieżących potrzeb. Wynikają z tego następujące udogodnienia, przedstawione również na rys. 4.2:

- możliwość redystrybucji siatki w zależności od zmieniającego się rozkładu błędu aproksymacji,

¹W celu porównania: dyskretyzacja przestrzenna posługuje się formułą interpolacyjną $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{q}_e(t)$.

- przesuwanie strefy zagęszczonej siatki wraz z przesuwanym się obciążeniem ruchomym,
- możliwość dopasowania boków elementów do charakterystycznych linii wyznaczanych w obszarze przestrzennym: frontu strefy uplastycznej, granicy zmiany fazy materiału, w szczególności – możliwość modelowania ruchomego brzegu ciała,
- stosowanie innych kształtów siatek czasoprzestrzennych niż siatki multipleksowe; siatki multipleksowe są wynikiem ewolucji siatki przestrzennej w warstwie czasowej, a odpowiednie elementy mają jednakową liczbę węzłów w chwili początkowej i końcowej; inne siatki, np. sympleksowe, charakteryzują się nowymi, ważnymi własnościami; elementy sympleksowe o wymiarowości n mają $n + 1 - i$ węzłów w chwili początkowej i $i + 1$ węzłów w chwili końcowej ($i = 0, 1, \dots, n$),
- możliwość indywidualnego formułowania sposobu całkowania w czasie w sposób aktywny w odniesieniu do każdego elementu przestrzennego,
- w szczególnym przypadku aproksymacja czasoprzestrzenna może dać klasyczną metodę rozwiązania, opartą na stałej siatce węzłów (ewoluującej jedynie wraz z materiałem).

Ostatni punkt można rozwinąć w stwierdzenie, że aproksymacja czasoprzestrzenna i wynikająca z niej metoda elementów czasoprzestrzennych są uogólnieniem metody elementów skończonych, klasycznie odniesionej do przestrzeni rzeczywistej. Przez przestrzeń rzeczywistą będziemy uważali przestrzeń zmiennych przestrzennych x, y, z , w odróżnieniu od czasoprzestrzeni, którą opisują zmienne przestrzenne x, y, z oraz czas t .

Pierwsze próby czasoprzestrzennego modelowania zadań fizycznych były opublikowane w 1964 przez Gurtina [75, 76] i Herrere [80]. Zdefiniowanie minimalizowanego funkcjonału, wynikającego z teorii splotów, umożliwiło wyprowadzenie zależności między zmienną czasową a zmiennymi przestrzennymi w obszarach czasoprzestrzennych. Obszary te można interpretować jako czasoprzestrzenne elementy skończone. Później, w 1969 roku Oden [134] zaproponował uogólnienie metody elementów skończonych. Rozszerzył interpretację obrazu konstrukcji na obszar czasu. Niestety, interesująca koncepcja niestacjonarnego podziału konstrukcji na podobszary zaproponowana w tej pracy nie była później kontynuowana. Fried [70], Argyris, Scharpf i Chan [5, 6, 7] zaczęli jednakowo traktować zmienne przestrzenne i zmienną czasową przy formułowaniu problemów. Mimo to jednak w pracach Kuanga

i Atluri [121] ostateczna dyskretyzacja w przestrzeni i w czasie była prowadzona odrębnie. Zadania dynamiczne były rozwiązywane przy rozdzieleniu zmiennej czasowej i zmiennych przestrzennych. Obszar fizyczny konstrukcji był dyskretyzowany jedną metodą (metodą elementów skończonych, różnic skończonych), podczas gdy pochodne czasowe były całkowane przy użyciu innych metod (różnic centralnych, Newmarka itp.). Ukazała się duża liczba prac na temat bezpośredniego całkowania równań różniczkowych ruchu, przy założeniu stacjonarnej dyskretyzacji.

Niezależnie od tego kierunku prac pojawiły się opracowania Kączkowskiego [102, 103, 104], w których wprowadzono po raz pierwszy do mechaniki konstrukcji interpretację fizyczną pewnych wielkości dotychczas określanych w przestrzeni fizycznej. Jest to np. równanie czteropracy wirtualnej, masa jako wielkość wektorowa czy też sztywność czasoprzestrzenna. Rozpatrywano proste przypadki drgań osiowych pręta i struny. Wprowadzono tłumienie [112] oraz podano przykład przeprowadzenia schematu całkowania w czasie przy pomocy macierzy przeniesienia [113]. Kolejne poruszane zagadnienia to drgania poprzeczne belki [114], sposób rozwiązywania sformułowanych w czasoprzestrzeni zadań dynamicznych [173], przyspieszenie procesu symulacji drgań zadań liniowych przez algebraiczną eliminację 2^n warstw czasowych [96], próba syntezy sformułowania czasoprzestrzennego zadań [111] oraz oszacowania stabilności [25, 52, 53, 122, 150]. Znaczącym wkładem było wskazanie możliwości budowania bezwarunkowo stabilnych rozwiązań dzięki modyfikacji wirtualnej funkcji kształtu [97, 98]. Niestety, stosowanie podanej techniki ogranicza się jedynie do prostokątnych elementów czasoprzestrzennych, których funkcje kształtu można wyrazić iloczynem członów określających funkcje interpolacji w przestrzeni i w czasie. Dalsze badania skierowały się na inne niż prostokątne kształty elementów czasoprzestrzennych. Trójkątne elementy struny współistniejące w siatce podziału z elementami prostokątnymi pokazano w pracy [105, 106, 174, 175]. Następnym istotnym krokiem było odejście od stacjonarnego podziału przestrzennego konstrukcji, a tym samym wprowadzenie nieprostokątnych w czasie elementów [12, 24, 25]. Krok ten pozwolił na zastosowanie metody do zupełnie nowej grupy zagadnień: zagadnień kontaktowych [15, 32] oraz procesów z adaptacją siatki podziału [13, 14, 26].

Obok prac rozwijających samą metodę, w wielu publikacjach dokonywano prób oceny dokładności i efektywności oraz zastosowania metody elementów czasoprzestrzennych w różnych zagadnieniach technicznych [16, 17, 18, 19, 20, 21, 47, 95, 107, 143, 144, 145, 147, 170]. Oprócz zadań mechaniki podjęto też prace nad zagadnieniami propagacji ciepła [22, 108].

Kolejnym etapem było uwzględnienie efektów nieliniowych: nieliniowości

geometrycznych [43, 146, 174] oraz materiałowych [27, 148, 149, 151, 153]. Warto też odnotować pracę [77], w której autorzy stosują funkcje harmoniczne do interpolacji w czasie.

W pracy Podhoreckiego [151] przedstawiono zastosowanie do zagadnień lepkosprężystych znanych z prac Kączkowskiego (np. [103, 104]) prostokątnych elementów czasoprzestrzennych. Rozważania ograniczono do ustrojów jednowymiarowych. Wykorzystano modele ciała typu Hooke'a, Kelvina-Voigta, Maxwella i Zenera. Nie podano jednak konkretnych wniosków, popartych rzeczywistymi przykładami. Szerzej zagadnienia te ujęto w [152].

Grupę prac przeglądowych na temat metody elementów czasoprzestrzennych stanowią pozycje [23, 29, 109, 176], a także część wprowadzająca do monografii [174]. Opis metody zawarto też w pracach [117, 110].

W tej dużej liczbie prac nie próbowano wykorzystać leżących w metodzie elementów czasoprzestrzennych możliwości. Rozważania ograniczono do zastosowania m.e.cz. jako metody całkowania równań różniczkowych. W dalszych rozdziałach zostanie wykazana równoznaczność takiego postępowania z zastosowaniem innych, znanych metod, jak np. metoda Newmarka. Tym bardziej celowe staje się dalsze rozwijanie wykorzystania m.e.cz. do modelowania zadań dynamiki.

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną nowe możliwości, jakie stwarza zmieniająca się w sposób ciągły w czasie aproksymacja przestrzenna. W rozdziałach 4.1 i 4.5 przedstawiono sformułowanie metody elementów czasoprzestrzennych. Wynikowe równania można wyrazić zarówno za pomocą przemieszczeń jak i prędkości przemieszczeń. W obu przypadkach sformułowanie wygląda jednak inaczej. Opis przemieszczeniowy prowadzi w efekcie do metody Galerkina, zastosowanej do przestrzeni i do czasu, natomiast opis z wykorzystaniem prędkości nie prowadzi bezpośrednio do metody Galerkina. Wymaga to podkreślenia. Oba wyprowadzenia charakteryzują się innymi własnościami i różnym stopniem przydatności. Podano sposób wyznaczania macierzy charakterystycznych czasoprzestrzennych elementów skończonych w opisie prędkościowym. Pozwalają one na łatwą zmianę liczby węzłów siatki przestrzennej, a tym samym na stosowanie technik adaptacyjnych. Własności topologiczne tej grupy elementów pozwalają uzyskać istotne korzyści obliczeniowe, szerzej omówione w rozdziale następnym.

Oddzielną charakterystyczną grupę elementów czasoprzestrzennych stanowią elementy o kształtach sympleksów. Własności skonstruowanych przy ich udziale rozwiązań omówiono w rozdziałach 5.3 i 5.4. Najistotniejszą cechą jest tutaj uzyskiwanie trójkątnych macierzy współczynników końcowego układu równań algebraicznych. Z tego wynikają niektóre interesujące za-

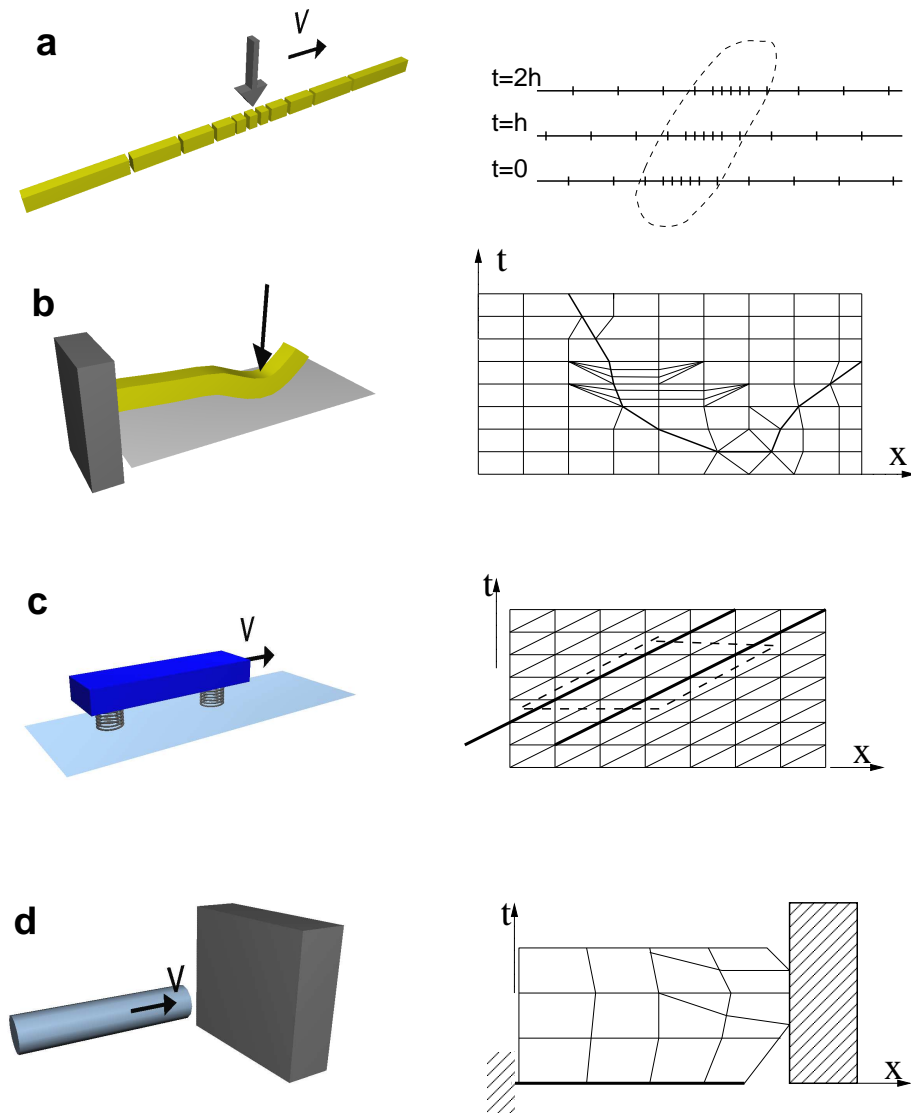
stosowania, jak np. możliwość ograniczenia prędkości propagacji informacji w układzie dyskretnym. Pozwala to w pewnych przypadkach ograniczyć ośrodek nieograniczony do niewielkiej liczby elementów skończonych. Przykład takiego podejścia przedstawiono w rozdziale 5.4.1.

Sformułowanie czasoprzestrzenne wykorzystano m.in. do modelowania zmiennej w czasie strefy kontaktu ciał. Wyznaczono dynamiczne warunki kontaktu, które zastosowano do nieskomplikowanych zadań inżynierskich. Zastosowano zagęszczoną dyskretyzację w czasie. Pozwoliło to na dokładne określenie sił kontaktu. Podano sposób eliminacji nieciągłości funkcji prędkości na krańcach czasowego przedziału kontaktu. Zdobyte doświadczenia wykorzystano do modelowania strefy kontaktu koła kolejowego z szyną i powstawania korugacji (rozd. 8.1). W rozdziale 4.5.5 rozpatrzono problem ewolucji geometrii i wynikających stąd dużych obrotów materiału. Przy nieliniowościach materiałowych iteracyjne rozwiązywanie nieliniowego równania ruchu powiązано z całkowaniem tego równania w czasie. Przedstawiono też odpowiednie schematy numeryczne.

Możliwość ciągłej w czasie zmiany siatki podziału pozwala na zmniejszenie błędu aproksymacji przez odpowiednią redystrybucję węzłów. Zarówno w przypadku r jak i h -adaptacji uzyskuje się obiecujące wyniki (rozdział 5.5).

Przykłady obliczeń zarówno zadań testowych, jak i rzeczywistych problemów inżynierskich potwierdzają skuteczność opisanych technik. Niemniej jednak wiele zagadnień może być, i z pewnością będzie, rozwijanych. Nie jest to więc ostateczny stan rozwoju czasoprzestrzennego opisu dynamiki konstrukcji.

W przykładach liczbowych jako podstawowy układ miar przyjęto układ SI. W celu poprawy uwarunkowanie wyników macierzy układów równań algebraicznych w obliczeniach komputerowych odpowiednie wielkości skalowano mnożnikami: długość mnożono przez 10^{-2} , masę przez 10^{-3} , a czas przez 10^{-6} . Pozwoliło to uniknąć różniących się o wiele rzędów wartości stałych materiałowych i tym samym pozbyć się kłopotów numerycznych (patrz rozdz. 2). Z uwagi na fakt, że wiele przykładów liczbowych ma charakter poglądowy, testowy, pozostawiono w nich dane liczbowe bezwymiarowe. W przykładach porównawczych i w zadaniach bardziej złożonych podano pełne, rzeczywiste wartości wszystkich parametrów.



Rysunek 4.2: Przykłady zadań rozwiązywanych w czasoprzestrzeni.

4.1. Sformułowanie metody – wariant przemieszczeniowy

Mimo że pierwsze wzmianki o możliwości niestacjonarnej dyskretyzacji konstrukcji pojawiły się w pracy Odena [134], prawdziwie usystematyzowane wyprowadzenie metody elementów czasoprzestrzennych przedstawił Kączkowski [102, 103]. Wprowadził nietypowe jak na inżynierskie spojrzenie terminy. Punkt materialny, pojawiający się w rozważaniach w chwili t_0 w miejscu x_0 , przesuwa się do miejsca x_1 w chwili t_1 . W układzie współrzędnych (x, t) te dwa miejsca punktu materialnego wyznaczają odcinek. By opisać ruch masy jako elementu oscylatora, na obu końcach tzw. wektora obrazującego życie punktu masowego określamy pewne wielkości fizyczne, np. pęd lub siły pochodzące od elementu sprężystego, a między obydwo ma końcami uwzględniamy wpływ oddziaływań zewnętrznych. Pisząc odpowiednie równanie pracy wirtualnej można uzależnić stan w chwili t_1 od stanu w chwili t_0 . W ten sposób uzyskuje się krokowy schemat obliczeniowy równania różniczkowego ruchu.

Opisane w serii prac nowe spojrzenie na dynamikę miało jedną wadę – było skomplikowane pojęciowo. Dynamika nie była postrzegana jako proces wiążący zjawisko jednocześnie w przestrzeni i w czasie. O ile dyskretyzację przestrzenną potrafiono przeprowadzić stosunkowo łatwo nawet w skomplikowanych problemach, to czas traktowano z dużą rezerwą. W okresie szybkiego rozwoju automatyzacji procesów obliczeniowych, kiedy powstające modele klasycznych elementów skończonych uwzględniały coraz bardziej złożone zjawiska fizyczne, trudno było wywołać odpowiednie zainteresowanie nowymi, a trudnymi technikami. Prezentowana na konferencjach naukowych nowa metoda spotykała się z krytycznymi uwagami, wynikającymi z niezrozumienia. Najczęściej zarzucano konieczność rozwiązywania gigantycznych rozmiarów układów równań algebraicznych, mimo że w rzeczywistości zadanie sprowadzane było do rozmiarów identycznych jak w metodzie elementów skończonych. Niezrozumienie wywodziło się z przeoczenia faktu, że powstający półnieskończony układ równań rozwiązuje się krokowo i w związku z tym metodyczne różnice między MES i MECz są niewielkie.

Zaniechanie przez środowisko naukowe modelowania trudnych zadań dynamiki konstrukcji i zjawisk falowych w pełni rozumianej czasoprzestrzeni oraz niedopracowanie się skutecznych algorytmów w niektórych typach problemów na długie lata pozostawiło nierozwiązane takie problemy jak choćby przedstawiony w rozdziale 7 problem opisu elementów ciągłych zaburzonych wewnątrz poruszającą się po zadanej trajektorii masą lub zmianą sztywności.

W dalszej części wyprowadzimy podstawowe równania przemieszczeniowej wersji metody elementów czasoprzestrzennych w postaci przedstawio-

nej w nieco późniejszych publikacjach. Pokażemy typowy tok postępowania w przypadku pręta drgającego osiowo. Uzyskamy przykładowe rozwiązania numeryczne i pokażemy prostotę obliczeń. Uprzedzając treść, pokażemy identyczność niektórych rozwiązań z rozwiązaniami uzyskanymi metodą różnic skończonych, zastosowanych do pochodnych przestrzennych, oraz metodą różnic centralnych, zastosowaną do prędkości i przyspieszeń. Opiszemy też czasoprzestrzenne elementy skończone pewnych wybranych typów konstrukcji. Wzorując się na opisie można, powtarzając postępowanie, wyznaczyć charakterystyczne macierze według własnych potrzeb.

Będziemy rozpatrywać ośrodek ciągły, zamknięty w obszarze \overline{V} , będącym podobszarem przestrzeni euklidesowej E^3 . V oznacza wnętrze tego obszaru, a ∂V jego brzeg, będący z kolei sumą ∂V_t i ∂V_u , gdzie zadano odpowiednio naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe. Rozpatrywać będziemy ruch ciała w przedziale czasu $[0, T]$. Zmienne ujęte w opisie, takie jak wektor przemieszczeń \mathbf{u} , prędkości \mathbf{v} , wektor sił masowych $\rho\mathbf{f}$, symetryczny tensor pola naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ i odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ określone są na iloczynie kartezjańskim zbiorów $V \times [0, T]$. Wektor sił powierzchniowych $\widehat{\mathbf{t}}$ określony jest na iloczynie $\partial V \times [0, T]$. Zakładamy, że wszystkie funkcje są dostatecznie ciągłe. Problem geometrycznie i fizycznie liniowy opisany jest następującym układem równań:

- równania geometryczne

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}) , \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T], \quad (4.2)$$

- równania fizyczne

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} , \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T], \quad (4.3)$$

- równania równowagi dynamicznej

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}^T + \rho\mathbf{f} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} , \quad (\mathbf{x}, t) \in V \times [0, T], \quad (4.4)$$

- warunki brzegowe

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \widehat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) , \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial V_t \times [0, T], \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) , \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial V_u \times [0, T], \quad (4.6)$$

- warunki początkowe

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{V} \times \{0\}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{V} \times \{0\}. \quad (4.8)$$

W powyższych związkach \mathbf{u}^0 i \mathbf{v}^0 określają odpowiednio początkowe przemieszczenia i prędkości, a $\hat{\mathbf{u}}^0$ przemieszczenia zdefiniowane na brzegu ∂V_u . Powyższy układ stanowi sformułowanie lokalne. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania dowodzi się jak np. w [133]. Do sformułowania globalnego możemy przejść mnożąc równanie (4.4) przez wariację wirtualnej funkcji przemieszczeń $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0, & (\mathbf{x}, t) \in \partial V_u \times [0, T] \\ \text{dowolna}, & (\mathbf{x}, t) \in (\bar{V} - \partial V_u) \times [0, T]. \end{cases} \quad (4.9)$$

Po scałkowaniu otrzymamy wówczas:

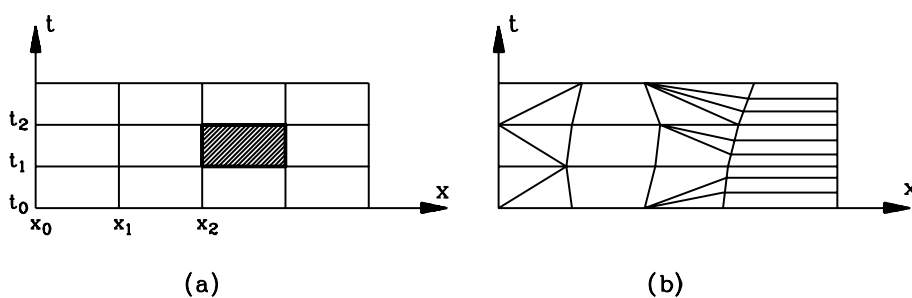
$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \delta \mathbf{u} \, dV \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V_t} \hat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} \, d(\partial V) \, dt = 0. \quad (4.10)$$

Całkując przez części otrzymujemy

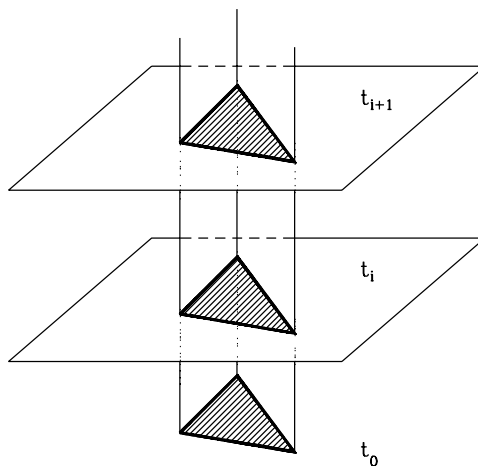
$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho (\mathbf{f} \delta \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \delta \dot{\mathbf{u}}) \, dV \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V_t} \hat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} \, d(\partial V) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \, dt. \quad (4.11)$$

Obszar, w którym opisane jest równanie (4.11) należy teraz zdyskretyzować. Obszar $\{\bar{V}, 0 \leq t \leq T\}$ dzielimy na podobszary, będące w istocie czasoprzestrzennymi elementami skończonymi. Najprostszy z możliwych podziałów pokazano na rys. 4.3a. W półnieskończonej wstędze wycinane są warstwy czasoprzestrzenne ($[t_i \leq t \leq t_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, n-1$, gdzie n jest liczbą warstw w przedziale $[0, T]$), a w nich wyodrębniane są elementy o stałej w czasie geometrii. Możliwy jest także bardziej złożony sposób podziału warstwy czasoprzestrzennej (rys. 4.3b). Do zagadnienia tego powrócimy w dalszych rozdziałach.

Najprostszy element czasoprzestrzenny wydzielony jest z czasoprzestrzeni płaszczyznami $t = t_i$ i $t = t_{i+1}$. Są to hiper-graniastosłupy (nadgraniastosłupy, graniastosłupy w przestrzeni o wymiarowości wyższej niż 3), będące elementami skończonymi, rozciągniętymi w czasie (rys. 4.4). Wartości nieświadomych, w naszym przypadku przemieszczeń \mathbf{u} , oraz ich pochodnych ($\dot{\mathbf{u}}$,



Rysunek 4.3: Przykłady siatki elementów czasoprzestrzennych: (a) stacjonarnej, (b) niestacjonarnej.



Rysunek 4.4: Czasoprzestrzenny element, wydzielony z czasoprzestrzeni.

ε , σ), rzeczywistych i wirtualnych, w obszarze elementu czasoprzestrzennego interpolujemy z wartości węzłowych przemieszczeń \mathbf{q} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} , & \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}^*(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{q} , \\
 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} , & \delta \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{q} , \\
 \varepsilon(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} , & \delta \varepsilon(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}^*(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{q} , \\
 \sigma(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} .
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Powyższe związki odnoszą się oddzielnie do każdego elementu czasoprzestrzennego. Wielkości oznaczone przez $(\cdot)^*$ odnoszą się do stanu wirtu-

alnego. Macierz \mathbf{B} łatwo jest utworzyć działając odpowiednim operatorem różniczkowym \mathcal{D} na macierz funkcji kształtu \mathbf{N} : $\mathbf{B} = \mathcal{D}\mathbf{N}$, gdzie $\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\text{grad} + \text{grad}^T)$. Należy podkreślić, że wektor \mathbf{q} składa się z wartości przemieszczeń w węzłach elementu czasoprzestrzennego. Węzły te mają różne współrzędne czasowe.

Liniove (afiniczne) funkcje kształtu $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ wyrażają warunki brzegowe swobodnego końca $\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{n} = 0$ w sposób naturalny. W przypadku elementu o długości b , przy kroku czasowym Δt są one spełnione w przybliżeniu. Zagęszczając dyskretyzację ($b \rightarrow 0$) w skrajnym elemencie $\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{n} \rightarrow 0$ ($\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{n} \sim 1/N$, N – liczba węzłów siatki podziału).

Uwzględnienie (4.12) w (4.11) daje formę kwadratową, określającą równość pracy sił wewnętrznych i zewnętrznych w przedziale $[t_0, t_1]$:

$$\sum_{e=1}^{NE} ((\mathbf{\Pi}_e^T \delta \mathbf{q}_e)^T \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{K}_e^* \mathbf{\Pi}_e \cdot \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{q}_e - (\mathbf{\Pi}_e^T \delta \mathbf{q}_e)^T \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{Q}_e) = 0. \quad (4.13)$$

NE jest tu liczbą elementów czasoprzestrzennych w strukturze. Macierze $\mathbf{\Pi}_e$ są zero-jedynkowymi macierzami przyporządkowującymi miejsca wyrazów macierzy i wektorów elementów czasoprzestrzennych miejscom w macierzy i wektorze struktury. Postać ich zależy od topologii siatki dyskretyzacji. Liczba wierszy równa jest liczbie niewiadomych stowarzyszonych z pojedynczym elementem, a liczba kolumn równa jest liczbie niewiadomych w strukturze. Macierze te określają niejako sposób sumowania macierzy elementów.

Macierz \mathbf{K}_e^* jest macierzą sztywności czasoprzestrzennej elementu

$$\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_e + \mathbf{M}_e. \quad (4.14)$$

Możemy podać tu postać macierzy sztywności \mathbf{K}_e i bezwładności \mathbf{M}_e elementu:

$$\mathbf{K}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N} dV dt, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{M}_e = - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} dV dt, \quad (4.16)$$

gdzie \mathbf{E} jest macierzą sprężystości, \mathcal{D} jest macierzą operatorów różniczkowych, a \mathbf{R} jest macierzą jednostkowych bezwładności.

Jeśli przyjmiemy ciało sprężysto-lepkie opisane przez model Kelvina–Voigta, gdzie związek między naprężeniami i odkształceniami zapisuje się następująco

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{E} + \eta_w \frac{\partial}{\partial t} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.17)$$

(η_w – współczynnik tłumienia wiskotycznego) i do równania (4.10) wprowadzimy człon dyssypatywny, zależny od prędkości przemieszczeń [24], to równanie (4.14) przyjmie postać

$$\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_e + \mathbf{M}_e + \mathbf{W}_e + \mathbf{Z}_e , \quad (4.18)$$

gdzie \mathbf{W}_e i \mathbf{Z}_e są odpowiednio członami tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego:

$$\mathbf{W}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \eta_w \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}\mathbf{N} \, dV \, dt , \quad (4.19)$$

$$\mathbf{Z}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \mathbf{N}^T \eta_z \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} \, dV \, dt . \quad (4.20)$$

\mathbf{Q}_e jest wektorem obciążenia zewnętrznego, działającego na element czasoprzestrzenny e :

$$\mathbf{Q}_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \mathbf{N}_e(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \, dV \, dt . \quad (4.21)$$

Można go otrzymać z warunku (4.5). Ponieważ zależność (4.13) musi być spełniona przy dowolnej wariacji przemieszczeń i dla całego obszaru czasoprzestrzennego, wobec tego możemy napisać

$$\sum_{e=1}^E (\mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{\Pi}_e \cdot \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{q}_e - \mathbf{\Pi}_e^T \mathbf{Q}_e) = \mathbf{0} . \quad (4.22)$$

Powyższy układ równań algebraicznych obejmuje cały obszar czasoprzestrzenny $[0, T]$. Rozwiązanie uzyskuje się wykorzystując warunki początkowe (4.7) i (4.8). Warunek przemieszczeniowy (4.7) dyskretyzuje się łatwo do postaci

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{e=1}^E \mathbf{\Pi}_e^T \int_{V_e} \mathbf{N}_e(\mathbf{x}, 0) \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \, dV_e . \quad (4.23)$$

Z kolei warunek prędkościowy (4.8) wymaga posłużenia się dodatkową formułą różnicową, aby prędkość w chwili początkowej wyrazić poprzez dwa wektory przemieszczeń: \mathbf{q}_0 dane wyrażeniem (4.23) i \mathbf{q}_{-1} (w chwili $t = -h$), na przykład w następujący sposób:

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_0 - \dot{\mathbf{q}}_0 h , \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{e=1}^E \mathbf{\Pi}_e^T \int_{V_e} \mathbf{N}_e(\mathbf{x}, 0) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) \, dV_e . \quad (4.24)$$

Rozpatrzmy teraz jedną warstwę czasową, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Dokonajmy podziału niewiadomych przemieszczeń na przemieszczenia odnoszące się do

budowanie układu równań i jego rozwiązywanie można prowadzić według poniższego schematu, posługując się pomocniczym wektorem \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{C}_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{D}_{i-1} \mathbf{q}_i, \\ \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{i+1} &= \mathbf{Q}_i - \mathbf{r}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

W tym miejscu należy wspomnieć o pracy [96], w której autor podaje sposób budowy tzw. makroelementu czasoprzestrzennego. Polega on na wyeliminowaniu co drugiej (ogólnie co 2^n) warstwy węzłów, poprzez wyeliminowanie co drugiego wiersza w układzie (4.26). W ten sposób krok czasowy wydłuża się do $2^n h$. Technika ta wymaga odwracania podmacierzy i jest skuteczna jedynie w przypadku stałych macierzy $\mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{D}_i$.

Stabilność schematów numerycznych ze stacjonarną siatką podziału, opartych na przemieszczeniach, opisana została w pracach [98, 124]. W zależności od doboru wirtualnych funkcji kształtu można uzyskać bezwarunkowo lub warunkowo stabilny wariant metody. Rozważania można podsumować stwierdzeniem, że sformułowania w cytowanych wyżej pracach są równoważne metodom Newmarka i mają wszystkie ich własności, także dotyczące stabilności. Do zagadnienia tego wrócimy jeszcze w rozdziale 4.1.2.

4.1.1. Elementy czasoprzestrzenne w opisie przemieszczeniowym

Element pręta

Zajmiemy się wyprowadzeniem podstawowych równań równowagi sił w metodzie elementów czasoprzestrzennych ze stacjonarną siatką węzłów w przestrzeni. Zagadnienie omówimy na przykładzie najprostszego równania opisującego drganie osiowe pręta. Równanie różniczkowe pręta drgającego osiowo jest identyczne z równaniem drgań struny

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t). \quad (4.31)$$

E jest modułem sprężystości podłużnej, A – polem przekroju poprzecznego, ρ – gęstością masy, a p – obciążeniem zewnętrznym. Mnożąc powyższe równanie przez wirtualną funkcję przemieszczeń $u^*(x, t)$ i całkując w rozpatrywanym obszarze $x \in [0, b]$ oraz $0 \leq t \leq h$ otrzymujemy równanie pracy wirtualnej

$$\begin{aligned}\int_0^h \int_0^b u^*(x, t) \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx dt &= \int_0^h \int_0^b u^*(x, t) EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx dt + \\ &+ \int_0^h \int_0^b u^*(x, t) p(x, t) dx dt.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Obniżamy stopień pochodnych całkując przez części pierwszy człon względem t a drugi względem x . Pamiętajmy, że funkcja u^* przyjmuje wartości równe zero w punktach $x = 0$ i $x = b$ oraz $t = 0$ i $t = h$. Nie musimy tego czynić, jeśli w dalszym etapie potrafimy zapewnić niezerowanie się drugich pochodnych rozwiązań, a w praktyce dostatecznie wysoki stopień wielomianowych aproksymacji rozwiązań. Wówczas możemy napisać

$$\begin{aligned} \int_0^h \int_0^b \frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x} EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx dt - \int_0^h \int_0^b \frac{\partial u^*(x,t)}{\partial t} \rho A \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx dt = \\ = \int_0^h \int_0^b u^*(x,t) p(x,t) dx dt . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Teraz wystarczy zaproponować sposób interpolacji wartości $u(x,t)$ oraz jej odpowiednika wirtualnego $u^*(x,t)$ na podstawie wartości węzłowych \mathbf{q}_e w elemencie. Proponuje się liniową interpolację w postaci

$$u(x,t) = [N_1(x,t), N_2(x,t), N_3(x,t), N_4(x,t)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q}_e . \quad (4.34)$$

Funkcje kształtu możemy napisać w lokalnym układzie współrzędnych (ξ, τ) . Wówczas $N_i = 1/4(1 + \xi \xi_i)(1 + \tau \tau_i)$, gdzie ξ_i, τ_i są współrzędnymi wierzchołków prostokąta $\{\xi, \tau : -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \tau \leq 1\}$. Przejście między lokalnym i globalnym układem współrzędnych określają związki: $x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$, $t = \sum_{i=1}^4 N_i t_i$. Identycznie zapisujemy funkcję wirtualną $u^*(x,t) = \mathbf{N}^* \mathbf{q}_e^*$. Po podstawieniu u i u^* do (4.33) otrzymujemy energię całkowitą układu, zawierającą człony opisujące energię wewnętrzną, kinetyczną oraz pracę sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych. Warunek minimalizacji energii sprowadza się do zerowania się pochodnych względem wszystkich niewiadomych $q_i, i=1, \dots, 4$. W końcu otrzymujemy układ czterech równań

$$\begin{aligned} \left(\frac{EAh}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\rho ab}{6h} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pierwsza z macierzy jest macierzą sztywności, której współczynniki można zapisać następująco:

$$K_{ij} = \frac{EAh}{12b} \xi_i \xi_j (3 + \tau_i \tau_j) , \quad (4.36)$$

a druga – macierzą bezwładności

$$M_{ij} = -\frac{\rho Ab}{12h} \tau_i \tau_j (3 + \xi_i \xi_j) . \quad (4.37)$$

Wprowadzając oznaczenie $k = c^2 h^2 / b^2$ oraz $c^2 = E / \rho$, można zapisać symetryczną macierz sztywności czasoprzestrzennej \mathbf{K}_e zawartej w równaniu (4.35) w nawiasie okrągłym

$$\mathbf{K}_e = \frac{\rho ab}{6h} \begin{bmatrix} 2k - 2 & -2k - 1 & k + 2 & -k + 1 \\ & 2k - 2 & -k + 1 & k + 2 \\ & & 2k - 2 & -2k - 1 \\ & & & 2k - 2 \end{bmatrix} . \quad (4.38)$$

Element belki

Rozpatrzmy element czworokątny belki średniej grubości. Węzły czworokąta mogą być w ogólnym przypadku przesunięte względem siebie w przestrzeni. W szczególnym przypadku element może być prostokątem w czasoprzestrzeni.

Przyjmijmy liniowy rozkład przemieszczeń

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 x t + a_2 x + a_3 t + a_4 \\ b_1 x t + b_2 x + b_3 t + b_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \mathbf{g} \\ \mathbf{b} \mathbf{g} \end{Bmatrix} , \quad (4.39)$$

gdzie $\mathbf{g}(x, t) = [x t, x, t, 1]$ jest wektorem jednomianów. Jeśli oznaczymy przez \mathbf{G} macierz zbudowaną z wektorów $\mathbf{g}(x_i, t_i)$, określonych w węzłach elementu, to w macierzy odwrotnej \mathbf{G}^{-1} będziemy mogli wyodrębnić kolumny oznaczone przez \mathbf{r}_i :

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(x_1, t_1) \\ \mathbf{g}(x_2, t_2) \\ \mathbf{g}(x_3, t_3) \\ \mathbf{g}(x_4, t_4) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 t_1 & x_1 & t_1 & 1 \\ x_2 t_2 & x_2 & t_2 & 1 \\ x_3 t_3 & x_3 & t_3 & 1 \\ x_4 t_4 & x_4 & t_4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4] . \quad (4.40)$$

Funkcje kształtu \mathbf{N} otrzymamy w postaci

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4] , \quad \mathbf{N}_i = \mathbf{g} \mathbf{r}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.41)$$

Operator różniczkowy \mathcal{D} wiąże odkształcenia i przemieszczenia

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \mathcal{D}\mathbf{N}\mathbf{q}. \quad (4.42)$$

Odpowiednia macierz sprężystości z kolei to

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{K} & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

W przypadku szczególnym, kiedy element czasoprzestrzenny jest prostokątem, funkcje kształtu są prostsze:

$$\mathbf{N} = \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{t}{h}\right), \frac{x}{b}\left(1 - \frac{t}{h}\right), \left(1 - \frac{x}{b}\right)\frac{t}{h}, \frac{x}{b}\frac{t}{h} \right]. \quad (4.44)$$

Macierz sztywności \mathbf{K} i bezwładności \mathbf{M} wyznaczmy jako całki w obszarze elementu Ω (por. (4.15) i (4.16) oraz (4.19) i (4.20))

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} \right)^T \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} d\Omega. \quad (4.46)$$

4.1.2. Modyfikowane funkcje kształtu

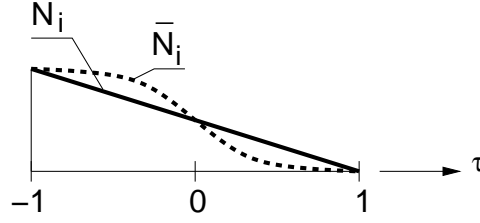
W równaniu czasopracy wirtualnej (4.13) modyfikujemy wirtualne funkcje kształtu (Kacprzyk, m.in. [97, 98]). Do członu liniowego dodajemy człon nieliniowy z parametrem α . Wówczas otrzymujemy następującą funkcję, pokazaną na rys. 4.5

$$\bar{N}(\tau) = \frac{1}{2}(1 + \tau\tau_i) + \alpha\tau_i(\tau^3 - \tau). \quad (4.47)$$

Przy stacjonarnym podziale czasoprzestrzeni otrzymujemy elementy czasoprzestrzenne o kształcie prostokątów, prostopadłościanów i hipergraniastosłupów. Ogólnie nazywamy je prostokątnymi multipleksami. W takim przypadku łatwo buduje się funkcje kształtu elementu $N_i(\mathbf{x}, t)$ jako iloczyny członów zależnych od zmiennych przestrzennych i od czasu

$$N_i(\mathbf{x}, t) = N_i^x(\mathbf{x}) \cdot N_i^t(t). \quad (4.48)$$

Funkcje N_i^x opisują rozkład przemieszczeń w przestrzeni, a N_i^t – rozkład przemieszczeń w czasie. Identyfikujemy funkcje wirtualne kształtu



Rysunek 4.5: Wirtualna funkcja kształtu.

$\bar{N}_i(\mathbf{x}, t)$. Macierze sztywności i bezwładności prostokątnego multipleksu dadzą się w takim przypadku sprowadzić do iloczynu członów zależnych od zmiennych przestrzennych $\bar{N}_i^x(\mathbf{x})$ i od czasu $\bar{N}_i^t(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V (\mathcal{D}_x \bar{\mathbf{N}}^x \bar{\mathbf{N}}^t)^T \mathbf{E} \mathcal{D}_x \mathbf{N}^x \mathbf{N}^t dV = \\ &= \int_A \int_0^h (\bar{\mathbf{N}}^t)^T (\mathcal{D}_x \bar{\mathbf{N}}^x)^T \mathbf{E} \mathcal{D}_x \mathbf{N}^x \mathbf{N}^t dt dA . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Elementy macierzy \mathbf{K} możemy więc opisać następująco

$$K_{ij} = k_{ij} \int_0^h \bar{N}_i^t N_j^t dt , \quad (4.50)$$

gdzie k_{ij} są elementami macierzy \mathbf{k}

$$\mathbf{k} = \int_A (\mathcal{D}_x \mathbf{N}^x)^T \mathbf{E} \mathcal{D}_x \mathbf{N}^x dA = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_s & \mathbf{k}_s \\ \mathbf{k}_s & \mathbf{k}_s \end{bmatrix} , \quad (4.51)$$

zbudowanej ze statycznych przestrzennych macierzy sztywności \mathbf{k}_s . Macierze te można uzyskać wprost metodą elementów skończonych.

Podobnie możemy opisać macierz bezwładności \mathbf{M} o elementach M_{ij} :

$$M_{ij} = -m_{ij} \int_0^h \frac{\partial \bar{N}_i^t}{\partial t} \frac{\partial N_j^t}{\partial t} dt . \quad (4.52)$$

Wyrazy m_{ij} są z kolei elementami macierzy \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \int_A (\mathbf{N}^x)^T \mathbf{R} \mathbf{N}^x dA = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_s & \mathbf{m}_s \\ \mathbf{m}_s & \mathbf{m}_s \end{bmatrix} , \quad (4.53)$$

gdzie \mathbf{m} jest macierzą bezwładności przestrzennego elementu skończonego. Zadanie sprowadza się do obliczenia całek względem t , opisanych zależnościami (4.50) i (4.52)

$$\int_0^h \bar{N}_i^t \bar{N}_j^t dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \bar{N}_i^t \bar{N}_j^t d\tau = \frac{h}{12} (3 + \tau_i \tau_j) - \alpha \frac{h}{15} \tau_i \tau_j, \quad (4.54)$$

$$\int_0^h \frac{\partial \bar{N}_i^t}{\partial t} \frac{\partial N_j^t}{\partial t} dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{N}_i^t}{\partial \tau} \frac{\partial N_j^t}{\partial \tau} d\tau \cdot \left(\frac{2}{h}\right)^2 = \frac{1}{h} \tau_i \tau_j. \quad (4.55)$$

Równanie opisujące ruch pojedynczego stopnia swobody jest symetryczne względem czasu t_i

$$\left[h \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{15} \right) + \frac{1}{h} \right] q_{i-1} + 2 \left[h \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{15} \right) - \frac{1}{h} \right] q_i + \left[h \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{15} \right) + \frac{1}{h} \right] q_{i+1} = 0. \quad (4.56)$$

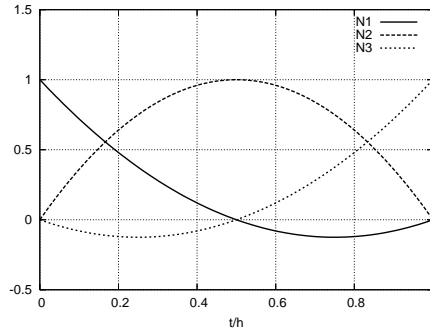
Schemat (4.56) jest bezwarunkowo stabilny przy $\alpha \geq 1,25$. Macierz elementu elementu pręta przy $EA = 1$, $\rho A = 1$ i $b = 1$ ma następującą postać

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{h}{3} - \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{3h} & -\frac{h}{3} + \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{6h} & \frac{h}{6} + \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{3h} & -\frac{h}{6} - \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{6h} \\ -\frac{h}{3} + \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{3h} & \frac{h}{3} - \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{6h} & -\frac{h}{6} - \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{3h} & \frac{h}{6} + \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{6h} \\ \frac{h}{6} + \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{3h} & -\frac{h}{6} - \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{6h} & \frac{h}{3} - \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{3h} & -\frac{h}{3} + \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{6h} \\ -\frac{h}{6} - \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{6h} & \frac{h}{6} + \frac{\alpha h}{15} + \frac{1}{3h} & -\frac{h}{3} + \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{6h} & \frac{h}{3} - \frac{\alpha h}{15} - \frac{1}{3h} \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

4.2. Elementy czasoprzestrzenne wyższego rzędu

Możemy opracować elementy z wyższego rzędu funkcjami kształtu w czasie (rys. 4.6). Podobnie czyni się w metodzie elementów skończonych w odniesieniu do zmiennych przestrzennych. Pierwsze próby zastosowań opisano w pracy [140]. W przypadku jednego stopnia swobody zastosujemy następujące funkcje:

$$\begin{aligned} N_1(t) &= 2 \left(\frac{t}{h} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{t}{h} - 1 \right), \\ N_2(t) &= -4 \frac{t}{h} \left(\frac{t}{h} - 1 \right), \\ N_3(t) &= 2 \frac{t}{h} \left(\frac{t}{h} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$



Rysunek 4.6: Funkcje kształtu drugiego stopnia.

Wynikowa macierz sztywności:

$$\mathbf{K} = \frac{kh}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

a macierz bezwładności

$$\mathbf{M} = \frac{m}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

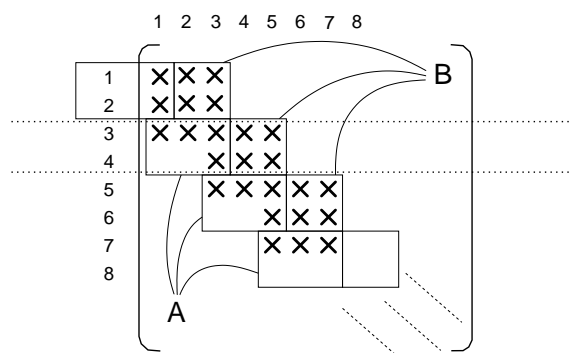
Za pracą [140] można też przytoczyć macierz tłumienia wewnętrznego \mathbf{W} i zewnętrznego \mathbf{Z} :

$$\mathbf{W} = \eta_w \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \eta_z \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Sposób rozwiązywania tego nietypowego układu równań pokazano na rys. 4.7. Z macierzy globalnej wyodrębniamy podmacierze \mathbf{A} i \mathbf{B} . Postępowanie w wydzielonej na rysunku warstwie można opisać równaniami

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} + \mathbf{B} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}. \quad (4.62)$$

W każdym kroku rozwiązujemy układ równań o wymiarze podwójnej liczby stopni swobody układu przestrzennego. w pierwszym kroku wykorzystujemy



Rysunek 4.7: Schemat macierzy globalnej zadania z kwadratowymi funkcjami kształtu.

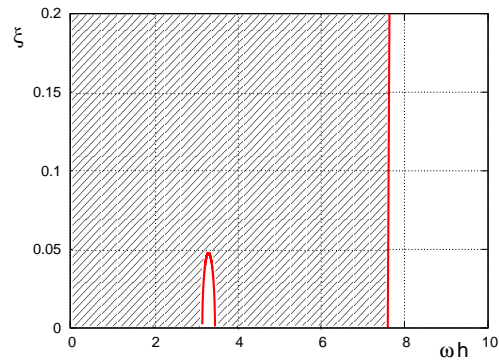
warunki początkowe określające przemieszczenia w chwili $t = h$. Przyjmujemy, że w chwili $t = 0$ przemieszczenia są równe zero. To narzuca automatycznie wektor prędkości na początku procesu: $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)/h = \mathbf{q}_1/h$. W większości problemów przyjmujemy $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ i $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$, co oznacza brak ruchu. W przypadku innych warunków początkowych należy obliczyć wartości obu wektorów przemieszczeń poprzedzających chwilę t_2 .

W pierwszym kroku mnożymy macierz \mathbf{A} przez zadane lub zerowe przemieszczenia w chwili $-1, 0$ i 1 . Otrzymujemy układ równań o liczbie niewiadomych równej podwojonej liczbie stopni swobody w zadaniu statycznym. Na rys. 4.7 jest to układ równań o dwóch niewiadomych. Rozwiązanie jego daje wartości przemieszczeń w chwilach t_2 i t_3 . Następne etapy wykonujemy w sposób powtarzalny, zgodnie ze schematem (4.62).

Głębsza analiza własności schematów całkowania z elementami wyższego rzędu zamieszczona w pracy [1] daje porównanie maksymalnego błędu wybranych metod przy różnym kroku czasowym (tab. 4.1). Wyniki uzyskano z analizy zadania o następujących parametrach: $\omega = 16,4$ rad/s, przemieszczenie początkowe $u_0 = 0,019047$, różny krok czasowy z zakresu $0 < h \leq 0,4$ s. Porównano wyniki uzyskane przy liniowej i kwadratowej funkcji kształtu w metodzie elementów czasoprzestrzennych, niejawnymy metodzie Eulera² oraz metodzie różnic centralnych. Rezultaty uwidocznione na rys. 4.9 pokazują błąd metody elementów czasoprzestrzennych z liniowymi i kwadratowymi

² W niejawnym sformułowaniu metody Eulera przyspieszenia w chwili $i + 1$ określamy w sposób następujący:

$$u_{i+1} = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) = \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) .$$



Rysunek 4.8: Obszar stabilności przy kwadratowej funkcji interpolującej w czasie.

Tablica 4.1: Porównanie błędów fazowych drgań oscylatora [1] .

krok czasowy [s]	metoda obliczeń			
	f. liniowe m.e.cz.	f. kwadratowe m.e.cz.	m. Eulera niejawna	m. różnic centralnych
$h=0,1$	$7,97 \cdot 10^{-3}$	$7,35 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$
$h=0,01$	$1,025 \cdot 10^{-4}$	$7,61 \cdot 10^{-7}$	$7,59 \cdot 10^{-3}$	$1,03 \cdot 10^{-4}$
$h=0,001$	$1,03 \cdot 10^{-6}$	$7,68 \cdot 10^{-11}$	$9,66 \cdot 10^{-4}$	$1,031 \cdot 10^{-6}$

funkcjami kształtu w odniesieniu do metody liniowego przyspieszenia³, metody niejawnej Eulera oraz metody różnic centralnych. Dostrzegamy przewagę kwadratowej interpolacji przemieszczeń nad interpolacją liniową. Interpolacja kwadratowa przemieszczeń daje formuły o kawałkami stałym przyspieszeniu.

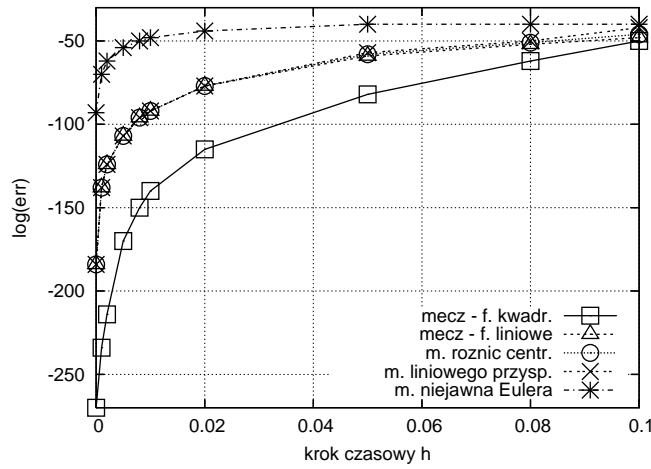
Po uwzględnieniu tego przybliżenia w równaniu ruchu otrzymujemy

$$-\omega^2 u_{i+1} = \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) .$$

Po przekształceniu otrzymujemy przemieszczenie w chwili $i + 1$

$$u_{i+1} = \frac{2}{1 + \omega^2 h^2} u_i - \frac{1}{1 + \omega^2 h^2} u_{i-1} .$$

³Wariant liniowego przyspieszenia uzyskuje się w metodzie Newmarka przy $\beta = 1/6$ i $\gamma = 1/2$.



Rysunek 4.9: Błąd fazowy wybranych metod [1].

4.2.1. Sześcienne funkcje kształtu

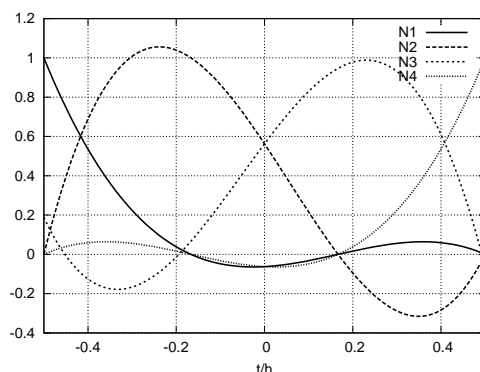
Powtarzamy za Pelcem [140] sformułowanie macierzy z wykorzystaniem sześciennych funkcji interpolujących w czasie:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\frac{9t^3}{2h^3} + \frac{9t^2}{4h^2} + \frac{1t}{8h} - \frac{1}{16}, & \frac{27t^3}{2h^3} - \frac{9t^2}{4h^2} - \frac{27t}{8h} + \frac{1}{16}, \\ -\frac{27t^3}{2h^3} - \frac{9t^2}{4h^2} + \frac{27t}{8h} + \frac{9}{16}, & \frac{9t^3}{2h^3} + \frac{9t^2}{4h^2} - \frac{1t}{8h} - \frac{1}{16} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Przebieg tych funkcji w przedziale $[-h/2, h/2]$ pokazuje rys. 4.10. Wynikowe macierze sztywności \mathbf{K} , bezwładności \mathbf{M} i tłumienia zewnętrznego \mathbf{Z} i wewnętrznego \mathbf{W} mają postać:

$$\mathbf{K} = \frac{kh}{1680} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

$$\mathbf{M} = \frac{m}{40h} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$



Rysunek 4.10: Sześciennie funkcje interpolujące w czasie przy położeniu węzłów w chwilach $-h/2, -h/6, h/6$ i $h/2$.

$$\mathbf{W} = \frac{\eta_w}{80} \begin{bmatrix} -40 & 57 & -24 & 7 \\ -57 & 0 & 81 & -24 \\ 24 & -81 & 0 & 57 \\ -7 & 24 & -57 & 40 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Analiza stabilności

Rozpatrujemy równanie ruchu w postaci

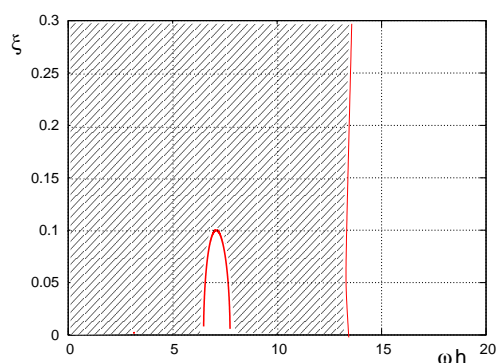
$$m\ddot{x} + 2\xi\omega m\dot{x} + kx = 0. \quad (4.67)$$

Analiza stabilności, wychodząca z warunków $|\lambda_i| \leq 1$ prowadzi do obszaru stabilności przedstawionego na rys. 4.11. Przy ustalonej wartości ξ przedział stabilności nie jest spójny. Z równania

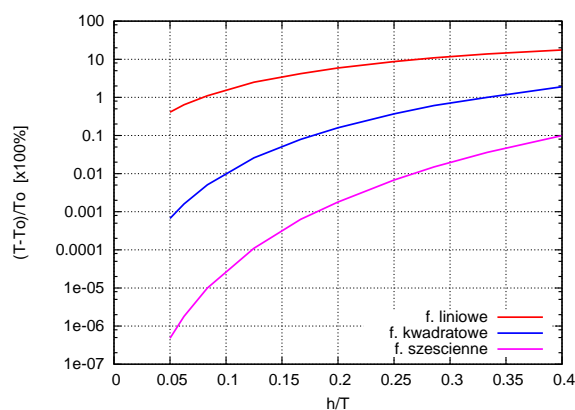
$$\xi = \sqrt{\frac{(\omega^2 h^2 - 10)(\omega^2 h^2 - 12)}{-40\omega^2 h^2}}, \quad \sqrt{10} \leq \omega h \leq \sqrt{12} \quad (4.68)$$

można określić zakres niestabilności przy $\xi = 0$.

Błąd fazowy maleje wraz ze skracaniem kroku czasowego. Lepszą dokładnością charakteryzują się funkcje interpolujące wyższego rzędu. Rys. 4.12 przedstawia procentowy błąd fazowy w zależności od wielkości kroku czasowego, przy zastosowaniu liniowych, kwadratowych i sześciennych funkcji kształtu w czasie.



Rysunek 4.11: Obszar stabilności przy sześcienniej funkcji interpolującej w czasie.



Rysunek 4.12: Błąd fazowy zależny od kroku całkowania h .

4.3. Stabilność w siatkach niestacjonarnych

Przy badaniu schematów obliczeniowych aproksymowanych nieprostokątnymi siatkami czasoprzestrzennymi zauważamy w pewnych przypadkach utratę stabilności rozwiązań. Różnorodność kształtu siatek zmusza do ograniczenia badań zagadnienia stabilności przy nieregularnych siatkach do nielicznych, charakterystycznych przypadków. Zbadamy układ elementów pokazany na rys. 4.13a. Analizę ograniczymy do drgań osiowych pręta. Zamocujemy skrajne węzły i w ten sposób uzyskujemy układ z jednym węzłem ruchomym, o jednym stopniu swobody. Powtarzalny superelement otrzymu-

gdzie

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{FD}^{-1}\mathbf{E} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}) & (\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{FD}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Schemat (4.70) jest stabilny, kiedy promień spektralny ψ macierzy \mathbf{T} jest nie większy od jedności

$$\psi(\mathbf{T}) \leq 1. \quad (4.72)$$

W przypadku symetrii globalnej macierzy sztywności czasoprzestrzennej w zadaniu o jednym stopniu swobody można w macierzy \mathbf{T} zredukować prawy górny wyraz do wartości $-\mathbf{I}$. Warunek (4.72) upraszcza się wówczas do nierówności

$$|\mathbf{T}_{11}| \leq 2. \quad (4.73)$$

4.3.1. Przypadek elementów czworokątnych

W przypadkach prostych analizę stabilności możemy prowadzić analitycznie. Drgania osiowe lub skrętne pręta czy drgania poprzeczne struny opisują węzły o pojedynczych stopniach swobody. Z tego względu są dobrym obiektem analizy. Kontynuujemy analizę układu elementów czasoprzestrzennych pokazanych na rys. 4.13a i 4.13b.

Linijowe funkcje kształtu przekształcają trapezowe kształty elementów w kwadrat

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad t = \sum_{i=1}^4 N_i t_i, \quad (4.74)$$

gdzie

$$N_i(\xi, \tau) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \tau\tau_i), \quad (4.75)$$

x_i, t_i - współrzędne węzłów w układzie globalnym,
 ξ_i, τ_i - współrzędne węzłów w układzie lokalnym.

Dalsze obliczenia prowadzimy w sposób znany z metody elementów skończonych. W metodzie elementów czasoprzestrzennych drogę postępowania pokazano w rozdziale 4.1. Współczynniki macierzy sztywności k_{ij} i bezwład-

ności m_{ij} elementu trapezowego opisano poniżej:

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= \frac{EAh}{2a_1} \xi_i \xi_j \left(\tau_i + \tau_j - \tau_i \tau_j \frac{a_2}{a_1} \right) + \\
&+ \frac{EAh}{2a_1^2} \xi_i \xi_j \left(a_1 - a_2 \left(\tau_i + \tau_j - \tau_i \tau_j \frac{a_2}{a_1} \right) \right) \ln \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1} , \\
m_{ij} &= -\frac{\rho A}{48ha_1} \xi_i \xi_j (a_1^2 + 3a_3^2) \\
&\left[\left(\tau_i + \tau_j - \frac{a_2}{a_1} \tau_i \tau_j \right) \left(2 - \frac{a_2}{a_1} \ln \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1} \right) + \ln \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1} \right] + \\
&+ \frac{\rho A a_1}{24h} \xi_i \xi_j (\tau_i + \tau_j) + \frac{\rho A a_3}{8h} (\xi_i \tau_j + \xi_j \tau_i) - \frac{\rho A a_2}{24h} \tau_i \tau_j (\xi_i \xi_j + 3) ,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_1 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 , \\
a_2 &= -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 , \\
a_3 &= -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 .
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Współczynniki $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{F}$ w równaniach (4.69) i (4.71) są skalarami i mają postać następującą

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left(\frac{EAh}{d^3} - \frac{\rho A}{3hd} \right) (d^2 + 4b^2) \ln \frac{2b + d}{2b - d} - \frac{4EAhb}{d^2} , \\
\mathbf{B} &= \left(\frac{EAh}{2d^3} - \frac{\rho A}{6hd} \right) (d^2 - 4b^2) \ln \frac{2b + d}{2b - d} + \frac{2EAhb}{d^2} , \\
\mathbf{C} &= \mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} .
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Wprowadzamy bezwymiarowe parametry $s = d/ch$, $c^2 = E/\rho$, $k = d/b$, $0 \leq k \leq 2$ oraz $K = ch/b$. Parametr k określa wielkość przesunięcia węzła w stosunku do wymiaru przestrzennego elementu. Parametr K określa prędkość przesunięcia węzła w stosunku do prędkości fali c .

Obszar stabilności w układzie parametrów k, s ograniczony jest nierównościami

$$\left(3 - \frac{3k}{\ln \frac{2+k}{2-k}} \right)^{\frac{1}{2}} < s < \sqrt{3} . \tag{4.79}$$

Nierówność (4.79) przedstawiona jest na rys. 4.14. Nachylenie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych wynosi

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{ch} . \tag{4.80}$$

Proste przechodzące przez początek układu współrzędnych określają punkty stabilności zadania, w którym h jest jedyną zmienną. Zauważamy, że pełen zakres stabilności przy parametrze k otrzymujemy, gdy $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}/2$. Zachodzi to przy kroku czasowym równym

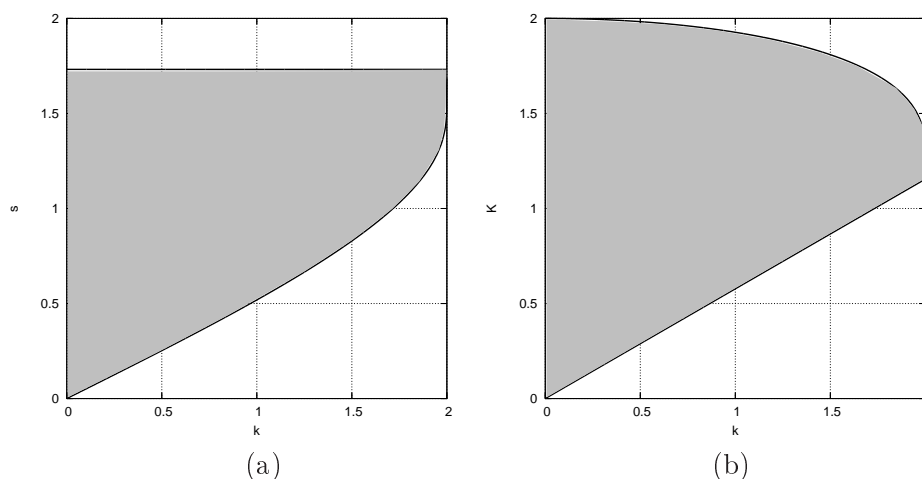
$$h = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{h}. \quad (4.81)$$

To z kolei prowadzi do warunku $h \leq 2b/c$. W układzie k, K obszar stabilności ograniczają linie

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq K \leq \frac{k}{\sqrt{3 - \frac{3k}{\ln \frac{2+k}{2-k}}}}. \quad (4.82)$$

Obszar stabilności zmienia się wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia

Własności stabilności siatek niestacjonarnych można wyjaśnić dodatkowo analizując własności siatek zbudowanych z trójkątnych elementów pręta. Przyjęto siatkę elementów jak na rys. 4.16. Jest ona podobna do siatki z rys. 4.13a. Każdy czworokąt podzielono na dwa elementy trójkątne, tak aby w co drugiej warstwie kierunek podziału był przeciwny. Przyjęto liniowy rozkład przemieszczeń w przestrzeni i w czasie. Otrzymano następujące współczyn-



Rysunek 4.14: Obszar stabilności trapezowych elementów czasoprzestrzennych w układzie k, s (a) oraz k, K (b).

niki macierzy sztywności:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{32EAhb}{4b^2-d^2} - \frac{4\rho A(4b^2+d^2)}{h(2b+d)}, & \mathbf{D} &= \mathbf{A}, \\ \mathbf{B} &= \frac{2\rho A(2b-d)}{h}, & \mathbf{C} &= \mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{AB}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Badanie wartości własnych macierzy \mathbf{T} prowadzi do nierówności

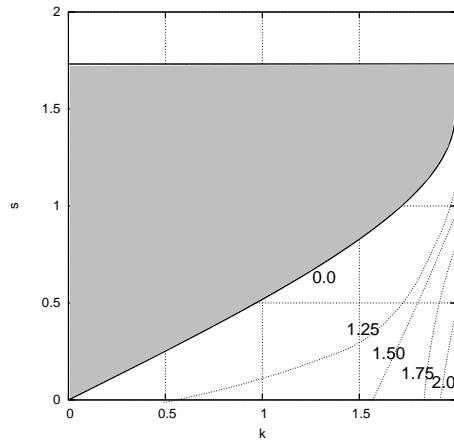
$$\begin{aligned} s &> \sqrt{\frac{8}{2-k} \frac{k^2}{4+k^2}} && \text{przy } -2 \leq k \leq 0, \\ s &> \frac{k}{\sqrt{2-k}} && \text{przy } 0 \leq k \leq 2, \\ s &< \frac{2}{\sqrt{2-k}} && \text{przy } -2 \leq k \leq 2. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Nierówności (4.84) przedstawia rys. 4.17. Dwa pierwsze warunki pozwalają określić krok czasowy h w stacjonarnych siatkach podziału, czyli przy $k = 0$

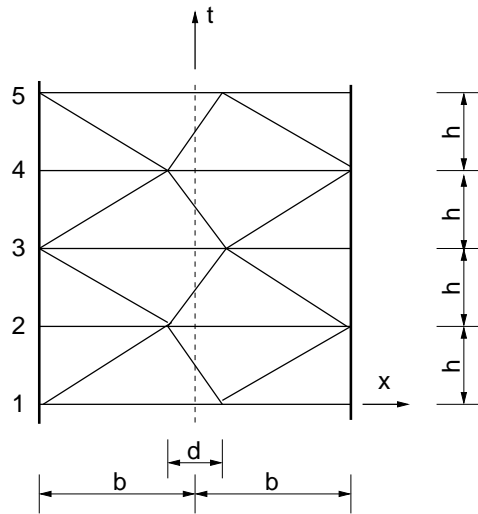
$$\left. \frac{ds}{dk} \right|_{k=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (4.85)$$

Uwzględniając (4.85) otrzymujemy wartość graniczną kroku h w badanej siatce niestacjonarnej

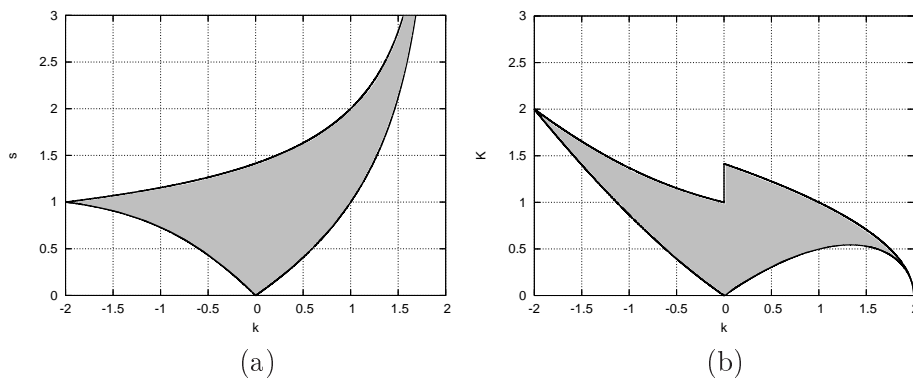
$$h_{kr} = \sqrt{2} \frac{b}{c}. \quad (4.86)$$



Rysunek 4.15: Wpływ tłumienia na obszar stabilności trapezowych elementów czasoprzestrzennych.



Rysunek 4.16: Przykładowa siatka trójkątnych elementów czasoprzestrzennych.

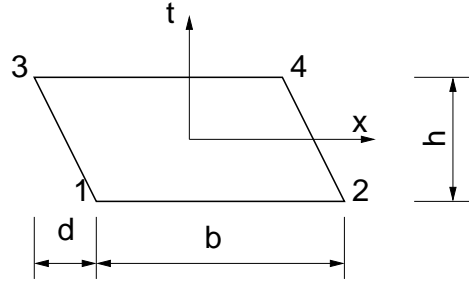


Rysunek 4.17: Obszar stabilności z siatką elementów trójkątnych pręta w układzie k,s (a) oraz k,K (b).

4.3.2. Stabilność ukośnych elementów czworokątnych pręta drgającego osiowo

Zbadajmy własności schematów obliczeniowych uzyskanych z zastosowaniem elementu równoległobocznego jak na rys. 4.18. Wykorzystujemy rzeczywiste funkcje kształtu

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \tau\tau_i) \quad (4.87)$$



Rysunek 4.18: Czasoprzestrzenny element równoległoboczny o zamocowanych węzłach 1 i 3.

oraz wirtualne funkcje kształtu w postaci

$$N_i = \frac{1}{4} [(1 + \xi\xi_i)(1 + \tau\tau_i) + \alpha\tau_i(\tau^3 - \tau)] . \quad (4.88)$$

Elementy macierzy sztywności K_{ij} opisuje zależność

$$K_{ij} = \frac{hEA}{4b} \xi_i \xi_j \left(1 + \frac{5 - 5\alpha}{15} \tau_i \tau_j \right) , \quad (4.89)$$

a macierzy bezwładności

$$M_{ij} = -\rho A \left[\frac{d}{4h} (\xi_i \tau_j + \xi_j \tau_i) + \frac{\xi_i \xi_j d^2}{4bh} + \frac{\tau_i \tau_j b}{4h} + \frac{\xi_i \xi_j \tau_i \tau_j}{180bh} (15b^2 + 15d^2 - 12\alpha d^2) \right] . \quad (4.90)$$

Przy zamocowaniu węzłów 1 i 3 otrzymujemy macierz sztywności pręta o wymiarach 2×2 w postaci

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} , \quad (4.91)$$

gdzie

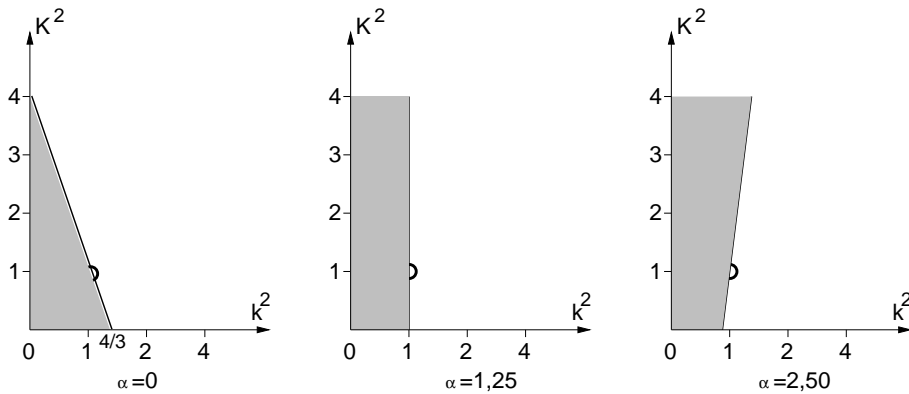
$$\begin{aligned} K_{11}^* &= \frac{EAh}{15b} (5 - \alpha) - \frac{\rho A (b^2 + d^2)}{3bh} + \frac{\rho Ad}{2h} + \frac{\rho A \alpha d^2}{15bh} , \\ K_{12}^* &= K_{21}^* = \frac{EAh}{30b} (5 + 2\alpha) + \frac{\rho Ab}{3h} - \frac{\rho A \alpha d^2}{30bh} (5 + 2\alpha) , \\ K_{22}^* &= \frac{EAh}{15b} (5 - \alpha) - \frac{\rho A (b^2 + d^2)}{3bh} - \frac{\rho Ad}{2h} + \frac{\rho A \alpha d^2}{15bh} . \end{aligned} \quad (4.92)$$

Macierz wzmocnienia przy warunku (4.72) prowadzi do nierówności

$$-1 \leq \frac{2K^2(5 - \alpha) - 10(1 - k^2) + 2\alpha k^2}{(K^2 - k^2)(5 + 2\alpha) + 10} \leq 1, \quad (4.93)$$

gdzie $K = \frac{ch}{b}$, $k = d/h$.

Obszary stabilności w układzie parametrów k, K , przy różnych wartościach α pokazano na rys. 4.19.



Rysunek 4.19: Obszar stabilności przy różnych współczynnikach α .

4.4. Makroelementy czasoprzestrzenne

Formuły obu metod możemy zapisać w postaci macierzy przejścia w następującej ogólnej formie

$$\mathbf{q}_{I+1} = \mathbf{T}\mathbf{q}_I. \quad (4.94)$$

Wektory \mathbf{q}_I i \mathbf{q}_{I+1} określają wektory przemieszczeń w dwóch kolejnych stanach. W przypadku równania różniczkowego drugiego rzędu wektory te mają umowną postać

$$\mathbf{q}_{I+1} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{i+1} \\ \mathbf{q}_i \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \mathbf{q}_I = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i-1} \end{array} \right\}. \quad (4.95)$$

Równanie (4.94) opisuje pełny schemat krokowy. Jest to w efekcie inaczej zapisany schemat krokowy metody elementów czasoprzestrzennych. W powyższy sposób można przedstawić zarówno wariant przemieszczeniowy, jak i prędkościowy metody. Wiąże on w efekcie trzy kolejne chwile.

Przemieszczeniowy wariant metody można sprowadzić do postaci (4.94) wykorzystując podstawowy schemat (4.27) oraz tożsamość jedyńkową:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{i+1} \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -B^{-1}(A+D) & -B^{-1}C \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i-1} \end{Bmatrix} . \quad (4.96)$$

Powyższa forma zapisu pozwala na łatwe badanie własności schematu obliczeniowego, szczególnie stabilności. Omawia to rozdział 4.1.2. Zwróćmy tu uwagę na łatwość skonstruowania makroelementu czasoprzestrzennego, opartego na układzie elementów czasoprzestrzennych, opisanym w (4.94).

Skoro możemy przejść ze stanu pierwszego do drugiego (przez stan pierwszy rozumiemy stan zawarty między chwilami 0 i 1, a przez stan drugi – stan zawarty między chwilami 1 i 2)

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{T}\mathbf{q}_1$$

oraz z drugiego do trzeciego

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{T}\mathbf{q}_2 = \mathbf{T}\mathbf{T}\mathbf{q}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{q}_1 ,$$

możemy w identyczny sposób przejść do dowolnego stanu N

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{T}^N\mathbf{q}_1 .$$

Widzimy, że w przypadku zadania liniowego i stałych w czasie macierzy wynikowych metody, przejście do dowolnej, odległej chwili możemy zrealizować dzięki odpowiedniej potędze macierzy przejścia \mathbf{T} . W praktyce wyznaczenie wielokrotnego iloczynu macierzy jest nieefektywne. Skuteczne jest natomiast wyznaczenie potęgi o wykładniku 2, 4, 16, 256, 65536 itd, czyli $((2^2)^2)^2 \dots = 2^{2^N}$. Wymaga to zaledwie wyznaczenia kilku iloczynów dwóch jednakowych macierzy. Dzięki temu ogromnie wydłużamy w praktyce nasz krok obliczeniowy h . Drugim ograniczeniem opisanej techniki jest niemożność stosowania dowolnego schematu obciążenia konstrukcji w czasie. Występujące po prawej stronie układu równań wektory obciążenia nie mogą zostać w skuteczny sposób uwzględnione. W związku z tym konstrukcja makroelementu czasoprzestrzennego pozwala na obliczenia zadań, w których drgania inicjowane są jedynie przez odpowiednie warunki początkowe. Można też zainicjować drgania przez działanie dowolnego wektora obciążenia. Jednak dopiero po tej początkowej fazie, kiedy wektor zewnętrznych obciążeń można przyjąć jako równy zeru, można przejść do wykorzystania makroelementów.

4.5. Opis prędkościowy metody

Metoda w ujęciu przemieszczeniowym ma wiele cech podobnych do metody różnic centralnych. Schemat obliczeniowy oparty jest na przemieszczeniach w trzech kolejnych chwilach czasu. W zależności od przyjętych funkcji wirtualnych przemieszczeń metoda w wariacie przemieszczeniowym może być warunkowo lub bezwarunkowo stabilna. Z kolei można uzyskać schemat rozwiązania równań ruchu wykorzystując prędkości jako podstawowe wielkości opisu stanu układu. Droga postępowania nie różni się wiele od wyprowadzeń z wykorzystaniem przemieszczeń. Tworzy się równanie pracy wirtualnej układu, która przy wyznaczonych parametrach prędkości w chwili początkowej i końcowej w przedziale czasu przyjmuje minimum. W ten sposób wiążemy znane wielkości w chwili wcześniejszej z wielkościami w chwili późniejszej.

W następnych rozdziałach przedstawimy tok postępowania w przypadku pojedynczego stopnia swobody. Następnie powtórzmy go w przypadku struny. Zastosujemy różne kształty funkcji wirtualnych prędkości. Porównamy uzyskane schematy całkowania z metodą Newmarka oraz innymi metodami obliczeniowymi.

4.5.1. Układ o jednym stopniu swobody

Opracujmy schemat obliczeniowy drgań punktu materialnego, opisanego równaniem

$$m \frac{dv}{dt} + kx = 0 . \quad (4.97)$$

Zakładamy liniowy rozkład prędkości rzeczywistej v w przedziale czasu h ($0 \leq t \leq h$)

$$v = \left(1 - \frac{t}{h}\right)v_0 + \frac{t}{h}v_1 . \quad (4.98)$$

Przemieszczenie $x(t)$ opisuje całka

$$x(t) = \int_0^t v dt = x_0 + \frac{h}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{h}\right)^2\right] v_0 + \frac{t^2}{2h} v_1 . \quad (4.99)$$

Przemieszczenie $x(t)$ zależne jest liniowo od prędkości v_0 i v_1 , ustalonych na krańcach przedziału $[0, h]$. Obieramy teraz postać funkcji wirtualnej. Możemy ją wybrać spośród wielu możliwych funkcji. Wybrana funkcja na krańcach przedziału czasu musi przyjmować wartości równe zero. Poniżej

przyjmujemy wirtualną funkcję prędkości jako rozkład Diraca, zależny od paramentu α ($0 \leq \alpha \leq 1$) i prędkości v_1 :

$$v^* = v_1 \delta\left(\frac{t}{h} - \alpha\right). \quad (4.100)$$

Jeżeli pomnożymy równanie różniczkowe ruchu (4.97), które w istocie jest równaniem równowagi sił działających na punkt materialny, przez wirtualną prędkość (4.100), otrzymamy równanie mocy wirtualnej. Po scałkowaniu go w przedziale czasu $[0, h]$ otrzymamy równanie pracy wirtualnej

$$\int_0^h v^* \frac{1}{h} (v_1 - v_0) dt + \int_0^h v^* \frac{k}{m} x(t) dt = 0. \quad (4.101)$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie pozwalające wyznaczyć prędkość w chwili następnej, na podstawie prędkości i przemieszczenia w chwili poprzedniej

$$v_1 = \frac{1 - \frac{kh^2}{2m} [1 - (1 - \alpha)^2]}{1 + \frac{k\alpha^2 h^2}{2m}} v_0 - \frac{k}{m} \frac{h}{\left(1 + \frac{k\alpha^2 h^2}{2m}\right)} x_0. \quad (4.102)$$

To samo możemy zapisać symbolicznie

$$v_1 = T v_0 + B x_0. \quad (4.103)$$

Pozostaje wyznaczyć na podstawie prędkości v_0 i v_1 brakujące przemieszczenie x_1 . Wykorzystujemy zależność

$$x_1 = x_0 + h[(1 - \beta)v_0 + \beta v_1]. \quad (4.104)$$

Nieco dalej wykazemy, że rozwiązanie stabilne otrzymujemy w pewnym zakresie parametru α przy $\beta = 1 - \alpha$. Uwzględniając to możemy napisać końcowy wzór

$$x_1 = x_0 + h[\alpha v_0 + (1 - \alpha)v_1]. \quad (4.105)$$

W szczególnym przypadku $\alpha = 1/2$ równanie (4.105) jest identyczne z równaniem (4.99) przyjętym przy $t = h$, czyli $x_1 = x_0 + h(v_0 + v_1)/2$.

Wprowadzając oznaczenie $\kappa = h^2 k/m$ możemy opisać przejście do następnej chwili w następujący sposób:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\alpha\kappa}{2 + \alpha^2\kappa} & -\frac{2\kappa}{h(\alpha^2\kappa + 2)} \\ 3h - \frac{2h(\alpha\kappa + 2)}{\alpha^2\kappa + 2} & \frac{2\kappa(\alpha - 1)}{\alpha^2\kappa + 2} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ x_0 \end{Bmatrix}. \quad (4.106)$$

Macierz przejścia \mathbf{T} jest macierzą o wymiarach 2×2 . Możemy ją wykorzystać do określenia kryterium stabilności przy dowolnej wartości kroku czasowego, a więc przy $h \rightarrow \infty$. Wyznamy wartości własne tej macierzy:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_{1/2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \pm \frac{i\sqrt{2\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \quad (4.107)$$

oraz ich moduły:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} |\lambda_{1/2}| = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \sqrt{2}/2 \leq \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2}, & \text{jeżeli } 0 \leq \alpha < \sqrt{2}/2. \end{cases} \quad (4.108)$$

Oba moduły wartości własnych są równe jedności gdy $\alpha \geq \sqrt{2}/2$. W tym zakresie parametru α otrzymujemy bezwarunkowo stabilny schemat obliczeniowy. Ta istotna cecha pozwala bezpiecznie prowadzić obliczenia układów o dużej liczbie stopni swobody, lub układów o ewoluującej geometrii lub własnościach materiałowych. W takich przypadkach bezwarunkowa stabilność metody jest konieczna.

Ważną sprawą jest też zdolność tłumienia wyższych częstotliwości drgań przy zachowaniu zerowego tłumienia częstotliwości podstawowych układu. Wielu autorów poświęca temu swoje prace (np. [81, 84]). Jeśli formułę (4.104) zmodyfikuje się tak, że prędkość określać się będzie w nieco późniejszym momencie niż $\alpha - 1$, to uzyskuje się pożądany efekt tłumienia. Zmodyfikowano parametr β do postaci

$$\beta = 1 - \alpha/(1 + \gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (4.109)$$

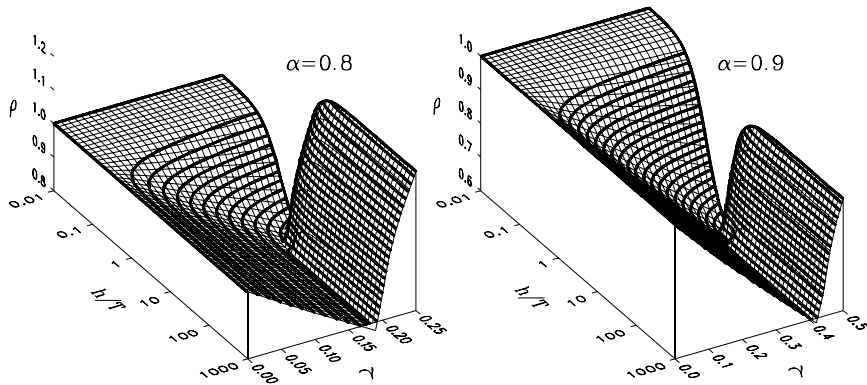
Na rysunkach 4.20 pokazano wartość promienia spektralnego w zależności od parametru γ przy wzrastających wartościach względnego kroku czasowego h . Wykonano je przy $\alpha = 0,8$ i $\alpha = 0,9$. Pogrubione linie są poziomiami wykreślonymi co 0,02. Przy $\gamma = 0,0$ promień spektralny ρ równy jest, zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, jedności. Kolejny rysunek 4.21, pokazuje wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia przy $\alpha = 0,8$ i $0,9$, w zależności od wielkości względnego kroku czasowego h/T . Poziomice na obu rysunkach wykreślono co 0,05.

Przykładowe obliczenia drgań pojedynczego punktu materialnego, wykonane przy warunkach początkowych $x_0 = 0$ i $v_0 = 1$ oraz przy $\alpha = 0,5$ pokazano na rys. 4.22, a przy $\alpha = 1,0$ na rys. 4.23.

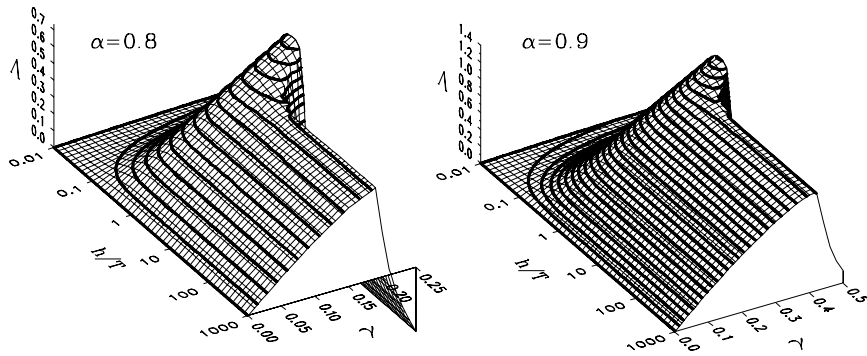
4.5.2. Dyskretyzacja równania różniczkowego drgań struny

Równanie różniczkowe drgań struny ma następującą postać:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4.110)$$



Rysunek 4.20: Promień spektralny zależny od parametru γ przy $\alpha=0,8$ i $\alpha=0,9$.

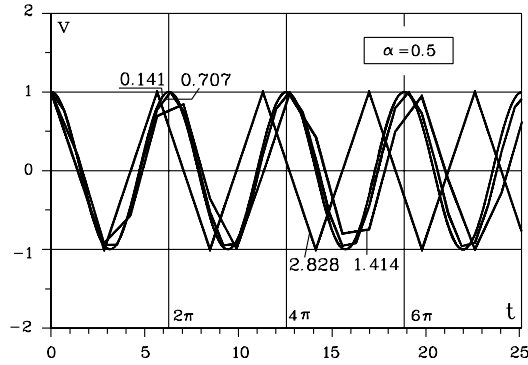


Rysunek 4.21: Logarymiczny dekrement tłumienia zależny od parametru γ przy $\alpha=0,8$ i $\alpha=0,9$.

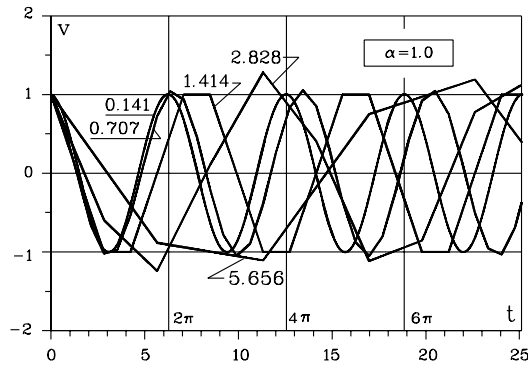
T jest siłą naciągu struny, A - polem przekroju poprzecznego, ρ - gęstością masy, η - współczynnikiem tłumienia. $c = \sqrt{T/\rho}$ jest prędkością fali w strunie przy $\eta = 0$.

Rozpatrujemy równanie w obszarze $\Omega = \{(x, t): 0 \leq x \leq b, 0 \leq t \leq h\}$. Równanie mocy wirtualnej tworzymy mnożąc (4.110) przez prędkość wirtualną $v^*(x, t)$.

$$\int_0^b v^*(x, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = 0. \quad (4.111)$$



Rysunek 4.22: Prędkość v wyznaczona przy różnych wartościach kroku czasowego, przy $\alpha=0,5$.



Rysunek 4.23: Prędkość v wyznaczona przy różnych wartościach kroku czasowego, przy $\alpha=1,0$.

Całkowita praca wirtualna w obszarze Ω wynosi

$$\int_0^h \int_0^b v^*(x, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = 0. \quad (4.112)$$

Całkując przez części równanie (4.112) względem x i t otrzymujemy

$$\iint_{\Omega} v^* \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial v^*}{\partial x} \varepsilon_0 d\Omega - \eta \iint_{\Omega} v^* v d\Omega = 0. \quad (4.113)$$

Przyjmujemy liniową zmienność prędkości $v = \partial u / \partial t$ względem x i t :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) v_i . \quad (4.114)$$

W obszarze Ω funkcje kształtu $\mathbf{N} = [N_1, \dots, N_4]$ mają postać:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{bh}(x-b)(t-h) , \\ N_2 &= -\frac{1}{bh}x(t-h) , \\ N_3 &= -\frac{1}{bh}(x-b)t , \\ N_4 &= \frac{1}{bh}xt . \end{aligned} \quad (4.115)$$

Przemieszczenie wyznaczamy całkując

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t (N_1 v_1 + \dots + N_4 v_4) dt . \quad (4.116)$$

W efekcie otrzymujemy

$$u(x, t) = u(x, 0) + \frac{xt^2}{2bh}(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) + \frac{xt}{b}(-v_1 + v_2) + \frac{t^2}{2h}(-v_1 + v_3) + v_1 t . \quad (4.117)$$

Pochodną $\partial u / \partial x$ otrzymujemy z równania (4.117)

$$\partial u / \partial x = \frac{t^2}{2bh}(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) + \frac{t}{b}(-v_1 + v_2) + \frac{du}{dt}|_{t=0} . \quad (4.118)$$

Zasadniczą sprawą jest dobór odpowiedniej funkcji wirtualnej prędkości. Wzorem wyprowadzeń dotyczących drgań oscylatora przyjmujemy

$$v^*(x, t) = \delta(t - \alpha h) \left(\left(1 - \frac{x}{b}\right) v_3 + \frac{x}{b} v_4 \right) . \quad (4.119)$$

δ jest funkcją Diraca. Potrzebne pochodne funkcji wirtualnej v^* i rzeczywistej v wyznaczamy z (4.119) i (4.114)

$$\frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{1}{b}(-v_3 + v_4) , \quad (4.120)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{x}{bh}(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) + \frac{1}{h}(-v_1 + v_3) . \quad (4.121)$$

Zauważamy, że z uwagi na człon delty Diraca w funkcji podcałkowej całkowanie w obszarze Ω sprowadza się do całkowania względem x w przedziale $[0, h]$. Uwzględniając powyższe związki w (4.113) możemy napisać w formie macierzowej końcową postać równania

$$\left\{ \rho A \int_0^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{x}{b} - 1\right) \frac{x}{b} \end{bmatrix} \left[\frac{x}{bh} - \frac{1}{h}, -\frac{x}{bh}, -\frac{x}{bh} + \frac{1}{h}, \frac{x}{bh} \right] dx + \right. \\ \left. + T \int_0^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{b} \frac{t}{b} \end{bmatrix} \left[\frac{t^2}{2bh} - \frac{t}{b}, -\frac{t^2}{2bh} + \frac{t}{b}, -\frac{t^2}{2bh}, \frac{t^2}{2bh} \right] dx \Big|_{t=\alpha h} - \right. \\ \left. - \eta \int_0^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{x}{b} - 1\right) \frac{x}{b} \end{bmatrix} \left[\frac{(x-b)(t-h)}{bh}, -\frac{x(t-h)}{bh}, -\frac{(x-b)t}{bh}, \frac{xt}{bh} \right] dx \Big|_{t=\alpha h} \right\} \\ \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} = 0 . \quad (4.122)$$

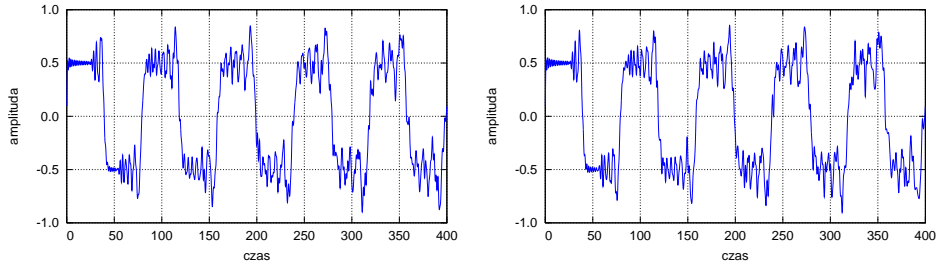
Widzimy, że dwa pierwsze wiersze wszystkich iloczynów macierzy zawierają zera. W dalszej części będziemy operowali tylko dolną połową macierzy otrzymanych po całkowaniu (4.122). Wynikowe macierze przyjmują następującą postać:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho b}{h} \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right] = \frac{1}{h} [-\mathbf{M}_{stat} \mid \mathbf{M}_{stat}] , \quad (4.123)$$

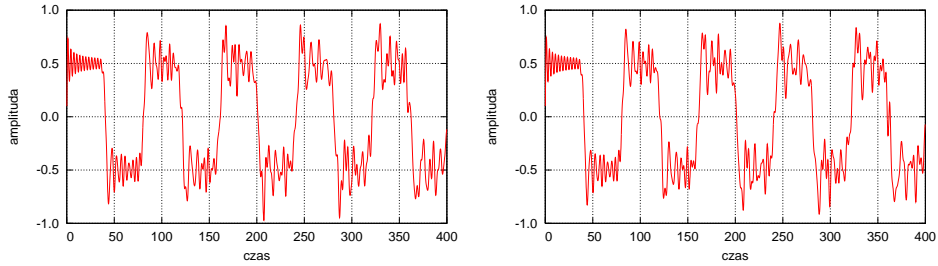
$$\mathbf{K} = \frac{Nh}{b} \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & -\alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & \frac{\alpha^2}{2} & -\frac{\alpha^2}{2} \\ -\alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & \alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & -\frac{\alpha^2}{2} & \frac{\alpha^2}{2} \end{array} \right] = \\ = h \left[\alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) \mathbf{K}_{stat} \mid \frac{\alpha^2}{2} \mathbf{K}_{stat} \right] , \quad (4.124)$$

$$\mathbf{C} = \eta b \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{6} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{6} \\ \frac{1-\alpha}{6} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{\alpha}{6} & \frac{\alpha}{3} \end{array} \right] = [(1 - \alpha) \mathbf{C}_{stat} \mid \alpha \mathbf{C}_{stat}] . \quad (4.125)$$

Końcowa postać równania ruchu opisuje równowagę sił na brzegu obszaru Ω . Wektor węzłowych prędkości $\dot{\mathbf{q}}$ zawiera prędkości $\dot{\mathbf{q}}_a$ w chwili początkowej



Rysunek 4.24: Przemieszczenia swobodnego końca pręta, uzyskane metodą elementów czasoprzestrzennych z pełną macierzą mas, przy $\alpha=0,5$ i $\alpha=1,0$.



Rysunek 4.25: Przemieszczenia swobodnego końca pręta, uzyskane metodą elementów czasoprzestrzennych z diagonalną macierzą mas, przy $\alpha=0,5$ i $\alpha=1,0$.

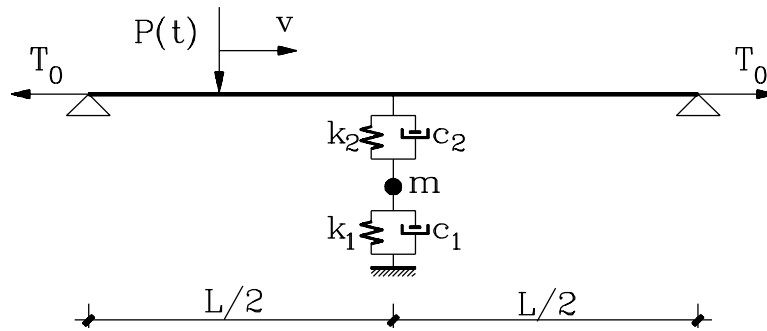
$t = 0$ oraz $\dot{\mathbf{q}}_p$ w chwili końcowej $t = h$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{C} + \mathbf{K}) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{Bmatrix} = \mathbf{0} . \quad (4.126)$$

Otrzymujemy równanie macierzowe, w którym niewiadomą jest $\dot{\mathbf{q}}_p$. Rys. 4.24 pokazuje wykres w czasie przemieszczeń osiowych swobodnego końca pręta, pod wpływem impulsu początkowego. Rys. 4.25 pokazuje z kolei wynik identycznego zadania, lecz z zastosowaniem diagonalnej macierzy bezwładności.

Przykład drgań struny obciążonej ruchomą siłą

Schemat zadania (rys. 4.26) jak i wyniki do porównań zaczerpnięto z pracy [41]. Autorzy przeprowadzili obliczenia metodami Fouriera i d'Alemberta. Poniżej identyczne zadanie rozwiązano metodą elementów czasoprzestrzennych, według sformułowania prędkościowego.



Rysunek 4.26: Schemat struny obciążonej ruchomą siłą.

Przyjęto następujące dane liczbowe: długość struny $L=100$ m, napięcie $T_0=10$ kN, gęstość masy $\rho=0,89$ kg/m, siła skupiona $P_0=90$ N, masa skupiona $m=10$ kg, tłumienie $c_1=c_2=0$. Przyjęto wariant warunkowo stabilny metody z parametrem $\alpha=0,5$ i tłumieniem numerycznym $\gamma=0,1$.

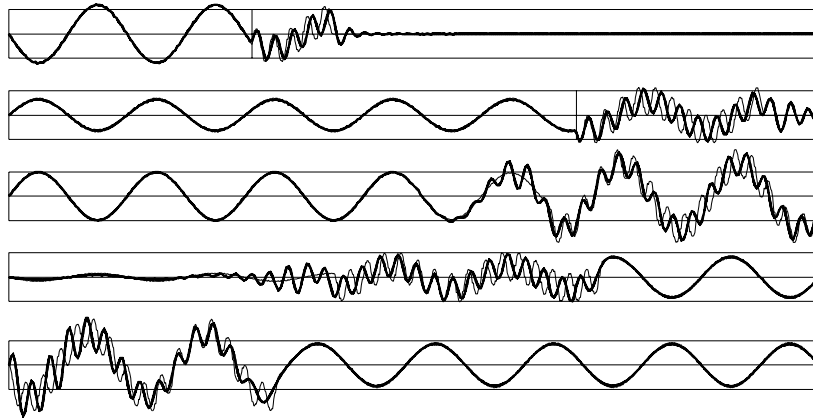
W pierwszym przypadku przyjęto $m=c_1=c_2=0$. Siła $P(t) = P_0 \sin \omega t$ była siłą sinusoidalnie zmienną, o częstości $\omega=0,4$ (odpowiadało to liczbie 40 cykli na przestrzeni 200 m). Prędkość v wynosiła $79,5$ m/s (co odpowiadało prędkości $0,75 c$). Na rys. 4.27 pokazano przemieszczenia poprzeczne w wybranych chwilach. Kreską pionową na trzech pierwszych wykresach zaznaczono położenie siły. Linia gruba obrazuje wyniki uzyskane metodą elementów czasoprzestrzennych, a linia cienka – metodą Fouriera. Widać bardzo dobrą zgodność obu rozwiązań. Drugi przypadek jest bardziej złożony. Zawiera w połowie przęsła podpórę, złożoną z dwóch sprężyn k_1 , k_2 i masy m . Jadąca z prędkością $v=79,5$ m/s siła jest stała. Na rys. 4.28 przedstawiającym wyniki, grubą pionową kreską oznaczono podpórę. Oba rozwiązania, metodą elementów czasoprzestrzennych i metodą Fouriera, pokrywają się. W cytowanej już pracy [41] wyniki otrzymane metodą falową jakościowo odbiegają od obu rezultatów pokazanych na rys. 4.28.

4.5.3. Ogólny przypadek sprężystości

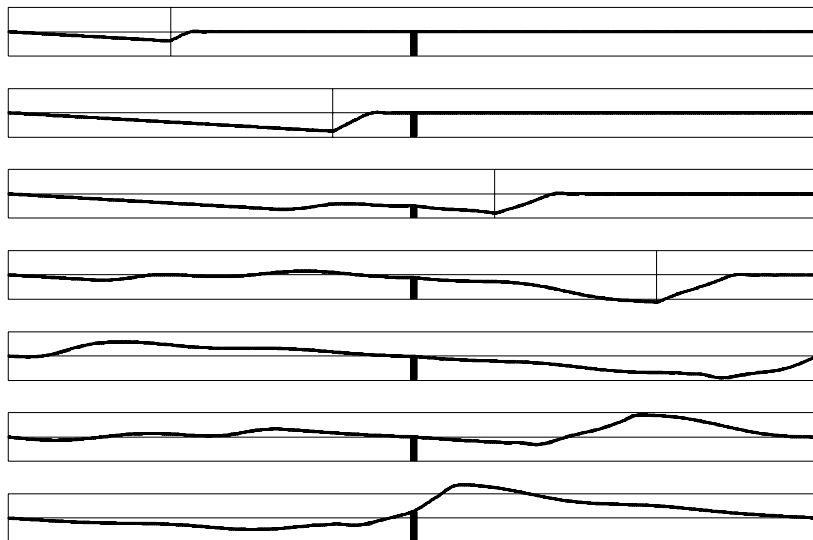
Zajmiemy się teraz ogólniejszym podejściem pozwalającym na dyskretyzację dowolnego zadania dynamiki układów ciągłych.

Jeżeli określimy odkształcenia ε jako

$$\varepsilon = \mathcal{D}\mathbf{u} , \quad (4.127)$$



Rysunek 4.27: Przemieszczenia poprzeczne struny w chwilach równych 0,3, 0,7, 1,0, 1,2 i 1,5 czasu pełnego przejazdu (linia cienka – metoda Fouriera, linia gruba – metoda elementów czasoprzestrzennych).



Rysunek 4.28: Przemieszczenia poprzeczne struny co 0,2 czasu pełnego przejazdu (linia cienka – metoda Fouriera [42], linia gruba – metoda elementów czasoprzestrzennych).

gdzie \mathcal{D} jest operatorem różniczkowym, zaś naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} , \quad (4.128)$$

oraz jeśli przyjmiemy dystrybucję wirtualnych prędkości \mathbf{v}^* , to równanie prac wirtualnych, wyrażone w prędkościach przyjmie następującą postać:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \eta_z \mathbf{v} d\Omega = 0 . \quad (4.129)$$

Przemieszczenie $\mathbf{u}(t)$ określa całka

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v} dt . \quad (4.130)$$

Po uwzględnieniu (4.127), (4.128) i (4.130) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{v}^*)^T \mathbf{E} \underbrace{\mathcal{D}\mathbf{u}_0}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0} d\Omega + \int_{\Omega} \left[(\mathcal{D}\mathbf{v}^*)^T \mathbf{E} \mathcal{D} \int_0^t \mathbf{v} dt \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{v}^*)^T \eta_z \mathbf{v} d\Omega = 0 . \end{aligned} \quad (4.131)$$

Następnie wprowadzimy formuły interpolacyjne:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} \quad \text{i} \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{N}^*\dot{\mathbf{q}} . \quad (4.132)$$

Ostatecznie mamy:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\Omega} \left[(\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{E} \mathcal{D} \int_0^t \mathbf{N} dt \right] d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \eta_z \mathbf{N} d\Omega \right\} \dot{\mathbf{q}} + \\ + \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (4.133)$$

Jeśli przyjmiemy jak poprzednio dystrybucję wirtualnych przemieszczeń zależnych od parametrów węzłowych określonych w chwili $t=h$, to w wyrażeniu (4.133) otrzymamy zerowe górne połowy macierzy \mathbf{M} , \mathbf{K} i wektora \mathbf{s} . Tak jak poprzednio możemy sterować własnościami procedury za pomocą parametru α .

Przy tej okazji nasuwa się pewien wniosek dotyczący kosztu obliczeniowego otrzymanej formuły. Cofnąć się musimy do przyjętych wirtualnych rozkładów parametrów węzłowych. Dystrybucja Diraca względem czasu sprowadza problem całkowania w objętości elementu czasoprzestrzennego Ω

do całkowania na powierzchni $t = \alpha h$, względem zmiennych przestrzennych x, y, z . Redukuje to koszt obliczeń, w porównaniu z kosztem procedur uzyskanych z zastosowaniem klasycznej, liniowej interpolacji parametrów wirtualnych względem czasu.

W przypadku równania (4.133) obszary całkowania upraszczają się z objętości czasoprzestrzennej Ω do powierzchni czasoprzestrzennej (objętości rzeczywistej) $V(\alpha h)$. Pierwsza całka zawiera składnik całkowany w granicach $[0, t]$. Z uwagi na powyższe wnioski dotyczące całki z dystrybucji, pozostaje dokonać całkowania w granicach $[0, \alpha h]$. Przyjęcie liniowych funkcji podcałkowych \mathbf{N} pozwala wyznaczyć średnią wartość podcałkową przy $t = \alpha h/2$ i przemnożyć przez długość przedziału αh . Wówczas macierz sztywności, bezwładności i wektor naprężeń początkowych, opisujące element czasoprzestrzenny mają postać następującą:

$$\mathbf{K} = \iint_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h/2) dV \cdot \alpha h, \quad (4.134)$$

$$\mathbf{M} = \iint_{V_{\alpha h}} \mathbf{N}_{\alpha h}^T(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h)}{\partial t} dV, \quad (4.135)$$

$$\mathbf{Z} = \iint_{V_{\alpha h}} \mathbf{N}_{\alpha h}^T(\mathbf{x}) \eta_z \mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h) dV, \quad (4.136)$$

$$\mathbf{s} = \iint_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV. \quad (4.137)$$

$V_{\alpha h}$ oznacza przekrój elementu czasoprzestrzennego przy $t = \alpha h$. $\mathbf{N}_{\alpha h}$ jest macierzą funkcji interpolujących, określonych na powierzchni $V_{\alpha h}$, $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \cdot)$ zaś jest macierzą funkcji interpolujących w objętości Ω , wyznaczonych w określonej chwili. Zmiana granic całkowania daje jeszcze łatwiejsze do numerycznych obliczeń formuły określające macierze charakterystyczne. Macierze (4.134), (4.135) i (4.136) mają wymiar $N \times 2N$ (N – całkowita liczba stopni swobody). Wiążą one chwile t_i i t_{i+1} .

Jeśli funkcje rzeczywistego rozkładu prędkości są liniowe to w przybliżeniu odpowiada to omówionej wcześniej procedurze przy $\alpha=0,5$. Związki identyczne uzyska się przy małych deformacjach, kiedy $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1}$. Przy dużych deformacjach geometrię przyjmuje się w środku ciężkości elementu, a więc przy odkształceniach dodatnich powyżej $\alpha=0,5$, a przy ujemnych – poniżej $\alpha=0,5$.

4.5.4. Inne funkcje prędkości wirtualnych

Sposób postępowania jest identyczny jak w przypadku funkcji wirtualnej przyjętej według wzoru (4.100). Rozpatrzmy i zbadamy własności innego

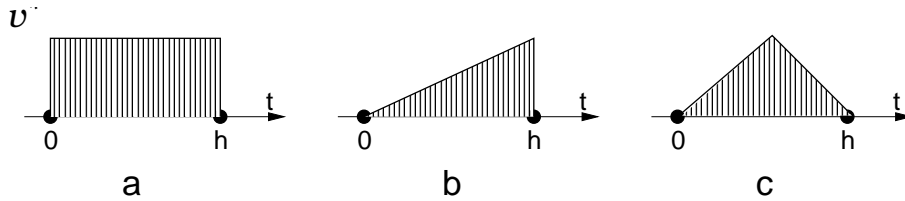
typu funkcji wirtualnych. Dokładność i stabilność rozwiązania zależy od kształtu funkcji. W dalszej części podamy macierze sztywności i bezwładności elementu pręta, otrzymane przy różnych funkcjach wirtualnych. Oszacujemy też błąd metody dyskretnej [31].

Równowaga globalna (funkcja kapeluszowa)

Postulujemy równowagę globalną w przedziale $[0, h]$. Przyjmujemy funkcję o stałej wartości (np. równej 1) w rozpatrywanym przedziale (rys. 4.29a)

$$v^*(x, t) = \left(1 - \frac{x}{b}\right) v_3 + \frac{x}{b} v_4. \quad (4.138)$$

Wynikowe macierze sztywności i bezwładności mają postać



Rysunek 4.29: Funkcje wirtualne: a - kapeluszowa, b - trójkątna, c - daszkowa.

$$\mathbf{K} = \frac{EAh}{b} \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right], \quad (4.139)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Ab}{h} \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right]. \quad (4.140)$$

Przemieszczenia w chwili następniej wyznaczamy na podstawie średniej prędkości $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})/2$. Jest to wyrażenie (4.104) przy $1/2 \leq \beta \leq 1$.

Funkcja trójkątna

W przedziale $[0, h]$ przyjmujemy rozkład funkcji wirtualnej w czasie w kształcie trójkąta (rys. 4.29b)

$$v^*(x, t) = \left(1 - \frac{x}{b}\right) \frac{t}{h} v_3 + \frac{x}{b} \frac{t}{h} v_4. \quad (4.141)$$

Macierze sztywności i bezwładności mają w tym przypadku postać

$$\mathbf{K} = \frac{EAh}{b} \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{5}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right], \quad (4.142)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Ab}{h} \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right]. \quad (4.143)$$

Z warunku stabilności otrzymujemy parametr $2/3 \leq \beta \leq 1$.

Funkcja daszkowa

W tym przypadku przyjmujemy rozkład funkcji wirtualnej w czasie w kształcie trójkąta jak na rys. 4.29c)

$$v^*(x, t) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{b})\frac{2t}{h} v_3 + \frac{x}{b}\frac{2t}{h} v_4, & \text{przy } 0 \leq t \leq t/2, \\ (1 - \frac{x}{b})(-\frac{2t}{h} + 2) v_3 + \frac{x}{b}(-\frac{2t}{h} + 2) v_4 & \text{przy } t/2 < t \leq h. \end{cases} \quad (4.144)$$

Macierze sztywności i bezwładności mają w tym przypadku postać

$$\mathbf{K} = \frac{EAh}{b} \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{17}{96} & -\frac{17}{96} & \frac{7}{96} & -\frac{7}{96} \\ -\frac{17}{96} & \frac{17}{96} & -\frac{7}{96} & \frac{7}{96} \end{array} \right], \quad (4.145)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Ab}{h} \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right]. \quad (4.146)$$

Z warunku stabilności otrzymujemy parametr $3/4 \leq \beta \leq 1$.

Równowaga punktowa

Rozkład prędkości wirtualnej w postaci funkcji Diraca opisano w rozdz. 4.5.1. Przeanalizujemy proces opisany równaniem (4.106). Rozwinięcie prędkości i przemieszczenia w szereg Taylora przedstawiamy poniżej

$$v_{i+1} = \left(1 - \alpha\omega^2 h^2 + \frac{1}{2}\alpha^3\omega^4 h^4 + \mathcal{O}(h^6) \right) v_i + \left(-\omega^2 h + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^4 h^3 + \mathcal{O}(h^5) \right) u_i, \quad (4.147)$$

$$u_{i+1} = (h - \omega^2 h^3 \alpha(1 - \alpha) + \mathcal{O}(h^5)) v_i + \left(1 - \omega^2 h^2(1 - \alpha) + \frac{1}{2}\omega^4 h^4 \alpha^2(1 - \alpha) + \mathcal{O}(h^6) \right) u_i.$$

Parametr $\omega^2 = k/m$ jest kwadratem częstości własnej. Pamiętając o rozwinięciach funkcji trygonometrycznych możemy oszacować błąd metody. W tym celu należy rozpatrzyć dwa przypadki: $v(0) = 0, u(0) = 1$ oraz $v(0) = 1, u(0) = 0$ i przyrównać wyniki (4.147) do rozwinięć rozwiązań ścisłych. Otrzymamy wówczas błąd prędkości ϵ^v

$$\epsilon_{11}^v = \omega^2 h^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + \omega^4 h^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{\alpha^3}{2} \right) + \mathcal{O}(h^6), \quad (4.148)$$

$$\epsilon_{12}^v = \omega^4 h^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (4.149)$$

oraz błąd przemieszczeń ϵ^u

$$\epsilon_{21}^u = \omega^2 h^3 \left(\alpha(1 - \alpha) - \frac{1}{6} \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (4.150)$$

$$\epsilon_{22}^u = \omega^2 h^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \omega^4 h^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{\alpha^2}{2}(1 - \alpha) \right) + \mathcal{O}(h^6). \quad (4.151)$$

Dolne indeksy oznaczają element macierzy przejścia (4.106). Widzimy, że przy $\alpha = 1/2$ znikają człony drugiego stopnia. Błąd wynosi w tym przypadku $1/12 h^3 + \mathcal{O}(h^4)$.

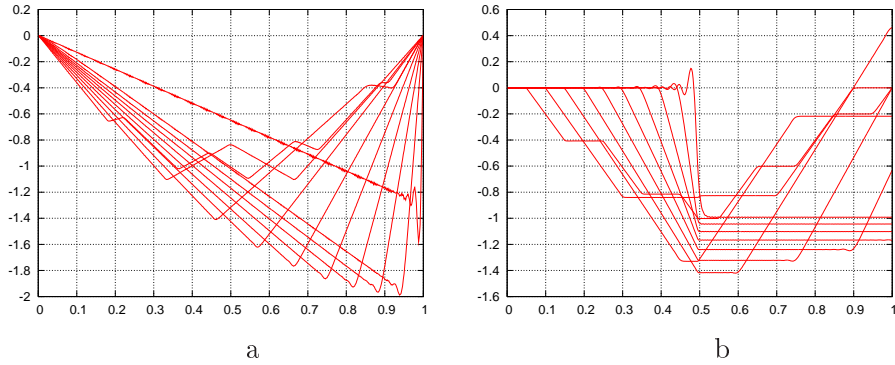
Podobną analizę błędu można przeprowadzić również w przypadku wcześniej pokazanych funkcji wirtualnych prędkości. Oszacowanie pozostawiamy czytelnikowi.

Wyniki przykładowych obliczeń przedstawia rys. 4.30. Struna obciążona jest siłą poruszającą się ze stałą prędkością. Sporządzono wykresy w przedziale od $0,1 c$ do $1,0 c$, co $0,1 c$ wartości prędkości fali c . Przedstawiono przemieszczenie pionowe punktu pod siłą oraz przemieszczenie pionowe środka struny.

4.5.5. Przykłady obliczeniowe

Deformacja lepkoplastyczna

Przyjęcie lepkoplastycznego modelu ciała prowadzi do znacznych uproszczeń. Jednorodny, izotropowy i nieściśliwy materiał opisano według prawa Nortona-Hoffa [85].



Rysunek 4.30: Przemieszczenia pod siłą (a) oraz w środku struny (b).

Dewiatorową część tensora naprężeń Cauchy'ego $\boldsymbol{\tau}'$ przedstawia zależność

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{K\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{(\sqrt{3}D)^{1-m}}, \quad (4.152)$$

gdzie:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v}) = \mathcal{D}\mathbf{v}, \quad (4.153)$$

$$D = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}, \quad (4.154)$$

a K i m są stałymi. Praca wirtualna w warstwie czasoprzestrzennej wyraża się całką

$$\int_0^h \int_V (\mathbf{v}^*)^T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_0^h \int_V (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*)^T \boldsymbol{\tau}' d\Omega = \int_0^h \int_{\partial V} (\mathbf{v}^*)^T \mathbf{f} d(\partial V) dt. \quad (4.155)$$

Rozpatrzmy krótko drugi człon, gdyż tylko on różni się od odpowiedniego członu w równaniu (4.129). Interpolacja prędkości wirtualnych uwzględniona w (4.153) i rzeczywistych, uwzględniona w (4.152) pozwala zapisać ten człon w postaci następującej:

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \frac{K}{(\sqrt{3}D)^{1-m}} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.156)$$

W efekcie przekształceń macierz odpowiadająca temu członowi a związana z energią potencjalną będzie miała postać następującą:

$$\mathbf{K} = \int_0^h \int_{V_{\alpha h}} (\mathcal{D}\mathbf{N}_{\alpha h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N}(\mathbf{x}, \alpha h) dV dt. \quad (4.157)$$

Przy porównaniu powyższego związku z macierzą sztywności odpowiadającą przypadkowi sprężystemu (4.134) dostrzegamy, że druga w iloczynie funkcja kształtu określona jest w innej chwili oraz że brak jest mnożnika αh . Inny jest też obszar całkowania. Ponadto macierz \mathbf{E} jest teraz zależna od prędkości odkształceń. Równanie końcowe ma więc postać

$$(\mathbf{K} + \mathbf{M} + \mathbf{Z})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} . \quad (4.158)$$

Warunek nieściśliwości

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.159)$$

wchodzący w skład funkcji kary można łatwo rozwinąć w odpowiednią formułę. Człon funkcji kary obciążający funkcjonał ma postać:

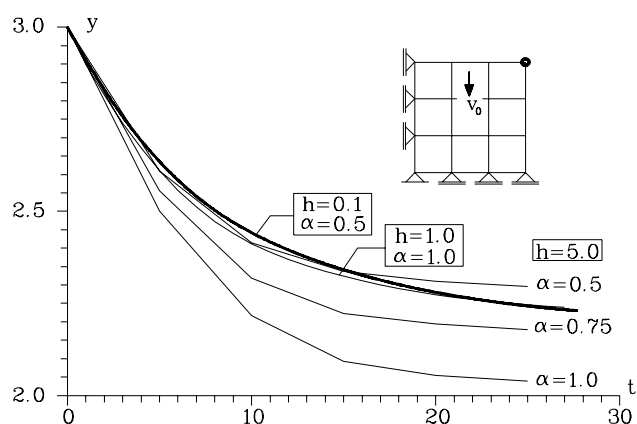
$$\frac{1}{2}\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}^* \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \int_{\Omega} (\mathcal{D}\mathbf{N}^*)^T \mathbf{\Lambda} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega \cdot \dot{\mathbf{q}} , \quad (4.160)$$

gdzie λ jest współczynnikiem funkcji kary a macierz $\mathbf{\Lambda}$ w zadaniu dwuwymiarowym ma postać następującą:

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.161)$$

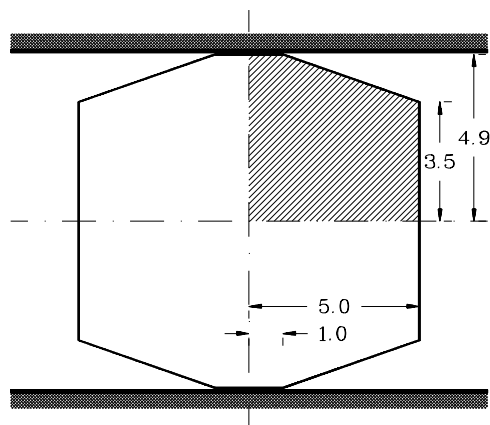
Zgniatanie kwadratowej tarczy Wykonano obliczenia deformowanego kwadratu podpartego na dolnej krawędzi. Nadano mu prędkość początkową v_0 . Przyjęto materiał lepkoplastyczny o następujących danych: $K=10^9$ Ns/m², $m=0,1$, $\rho=1,0$ kg/m³, oraz $v_0=1$ m/s. Obliczenia wykonano przy różnym kroku czasowym i przy różnych wartościach parametru α . Położenie prawego górnego naroża w czasie przedstawia rys. 4.31. Krok czasowy $h=0,1 \cdot 10^{-6}$ s jest dostatecznie mały i wyniki można uznać za dokładne. Przy dużym kroku czasowym $h=5 \cdot 10^{-6}$ s rozwiązanie przybliża się do dokładnego (za takie przyjęto tu rozwiązanie uzyskane przy małym kroku czasowym i schemacie niejawnym, z parametrem $\alpha=0,5$) wraz z przyjmowaniem coraz mniejszej wartości parametru α (od 1,0 do 0,5), tj. przy obliczeniach wykonywanych procedurą niejawną.

Nasuwa się wniosek, potwierdzający zresztą opinie wyrażane w wielu pracach, że nie można kategorycznie stwierdzić, która z procedur, jawna czy niejawną, jest skuteczniejsza. O ile procedura jawna zmierza do wyniku każdego etapu jednokrokwowo, to wymaga większej liczby kroków o krótszym kroku czasowym h ($h=1 \cdot 10^{-6}$ s, $\alpha=1$). Procedura niejawną pozwala na znaczne wydłużenie kroku czasowego, ale wymaga iteracyjnego dochodzenia do rozwiązania w każdym kroku ($h=5 \cdot 10^{-6}$ s, $\alpha=0,5$). Sumaryczny koszt obliczeń jest w obu przypadkach podobny.

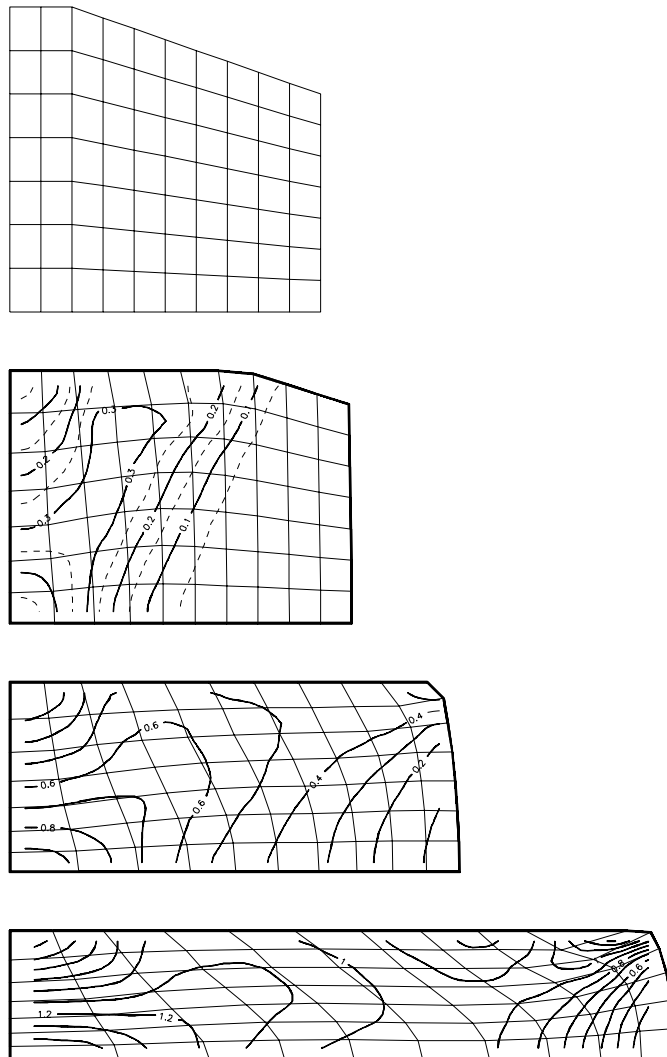


Rysunek 4.31: Pionowa współrzędna narożnego węzła w czasie.

Przykład kucia Kolejne obliczenia wykonano rozwijając przykład zaczerpnięty z pracy [44]. Ćwiartka płaskiego, ośmiokątnego obszaru (rys. 4.32) ścisana jest za stałą prędkością $v=0,1$. Przyjęto materiał lepkoplastyczny według związków podanych w ww. pracy. Stałe materiałowe wynoszą: $m=0,1$, $K=1$, $\rho=0,0$. Obliczenia prowadzono przy kroku $\Delta t=1$. Na górnej powierzchni uwzględniono tarcie proporcjonalne do prędkości stycznej węzłów v_t : $T = -\beta|v_t|^{m-1}v_t$ ($\beta=0,05$). Zdeformowaną siatkę elementów wraz z uogólnionymi odkształceniami uwidoczniono na rys. 4.33.



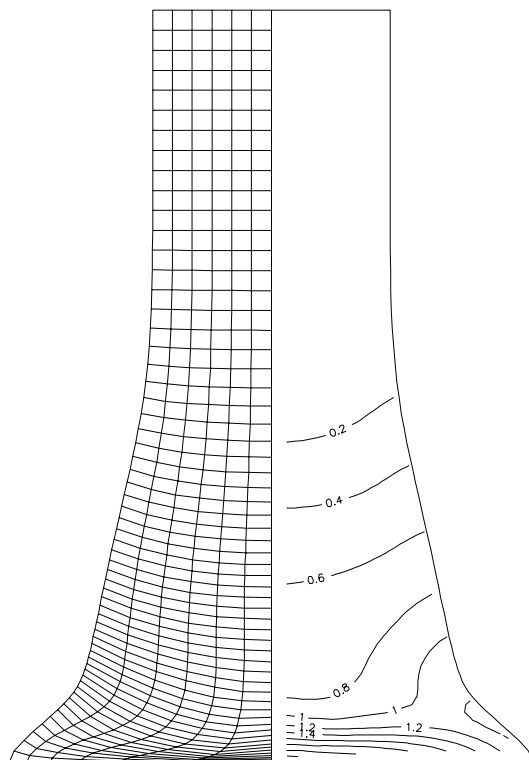
Rysunek 4.32: Schemat obszaru poddanego ścisaniu.



Rysunek 4.33: Zdeformowana siatka elementów oraz uogólnione odkształcenia rejestrowane co 10 kroków obliczeniowych, przy $t=0, 10, 20, 30$.

Zderzenie walca Kolejny przykład dotyczy walca o wysokości $H=3,24$ cm, promieniu $R=0,32$ cm, gęstość materiału $\rho=8,93$ g/cm³. Materiał lepko-plastyczny o parametrach: $m=0,1$, $K=0,005$. Walec uderza z prędkością $v=0,0227$ cm/ μ s w sztywny fundament. Przyjęto idealny poślizg w miejscu kontaktu z podporą. Obliczenia wykonano przy $\alpha=0,5$ i kroku czasowego

wym $h=1,0 \mu s$. Rys. 4.34 prezentuje zdeformowaną siatkę elementów oraz uogólnione odkształcenia po $80 \mu s$. Maksymalne odkształcenie zarejestro-



Rysunek 4.34: Siatka elementów oraz uogólnione odkształcenia po $80 \mu s$.

wane w chwili $t=80 \mu s$ wynosi 3,04, końcowa wysokość 2,014 cm, końcowy promień 0,707 cm. Można porównać otrzymane rezultaty z innymi publikowanymi wynikami, dotyczącymi tego samego zadania. Autorzy opisują w swoich pracach inny materiał (np. sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem) oraz różnorodne techniki obliczeniowe, co powoduje, że porównanie nie jest jednoznaczne. Otrzymują oni, z dość dużym rozrzutem, wartości zebrane w tablicy 4.2 [55, 72]. Mimo różnych modeli reologicznych zbieżność wyników m.e.cz. z wartościami uzyskanymi przez innych autorów jest dostatecznie dobra.

Zgniatanie cylindra Innym przykładem jest osiowo-symetryczny cylinder ścisany ze stałą prędkością $v=180 \text{ km/h}$. Siatka podziału zawiera 1250 ele-

Tablica 4.2: Porównanie wyników testu zderzenia walca.

program	końcowa dł. [cm]	końcowy promień [cm]	maks. odksz.
wg [72] 2-wym.	0,711	2,147	3,09
wg [72] 3-wym.	0,711	2,147	3,09
DYNA2D ^a	0,707	2,143—2,152	2,54—3,21
DYNA3D	0,703	2,147	2,96
MARC	0,702	2,166	3,24 ^b 3,00 ^c
NIKE2D ^a	0,707	2,147	2,97
	0,712	2,076	3,03
4-węzłowe czworokąty [161] ^d	0,710	2,147	
3-węzłowe trójkąty [161] ^e	0,710	2,147	
4-węzłowe czworokąty [161] ^e	0,707	2,147	
4-węzłowe czworokątne [161] ^e	0,714	2,164	3,03
m. e. cz.	0,707	2,014	3,04

^aRóżni autorzy podają różne dane, zależne od przyjętych parametrów obliczeniowych.

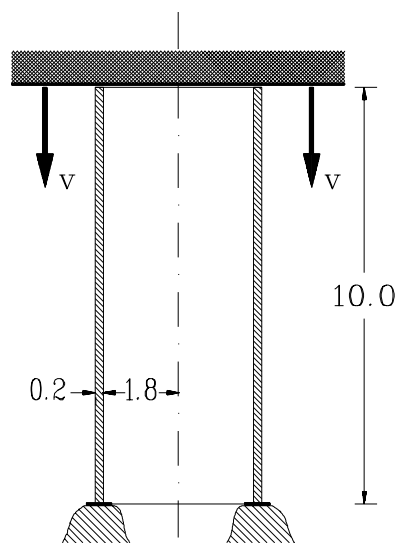
^bśrednia wartość w elemencie.

^cWartość węzłowa, ekstrapolowana z punktów Gaussa.

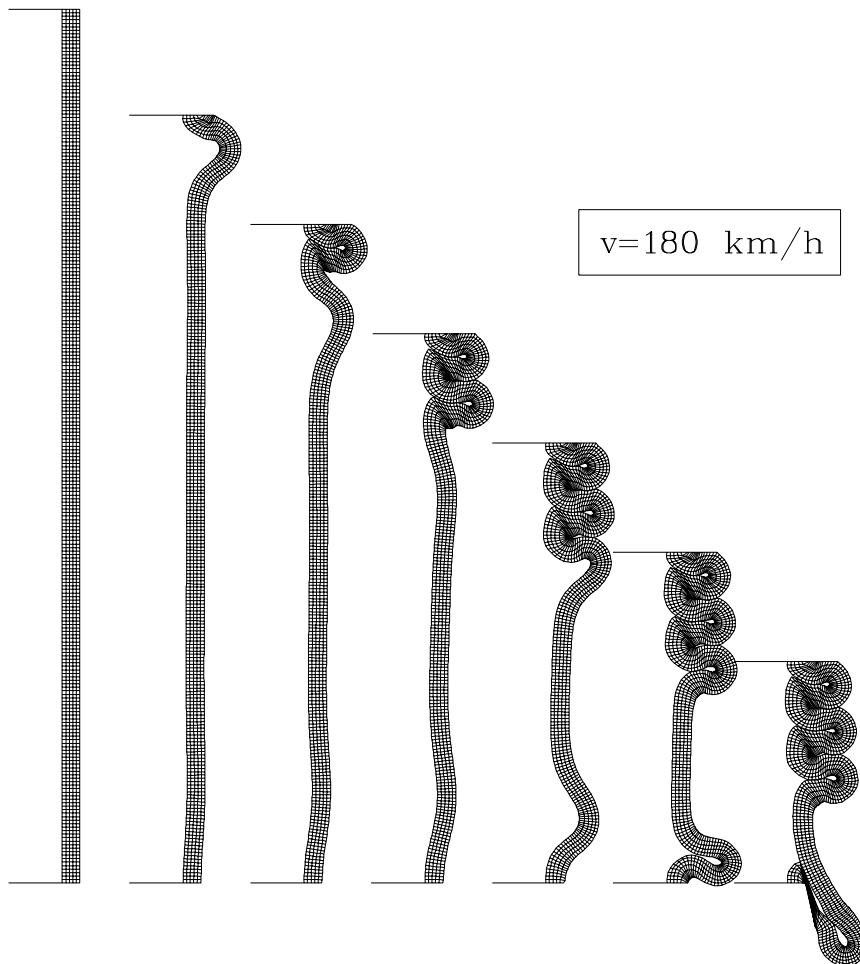
^dsformułowanie standardowe mieszane

^esformułowanie mieszane stabilizowane

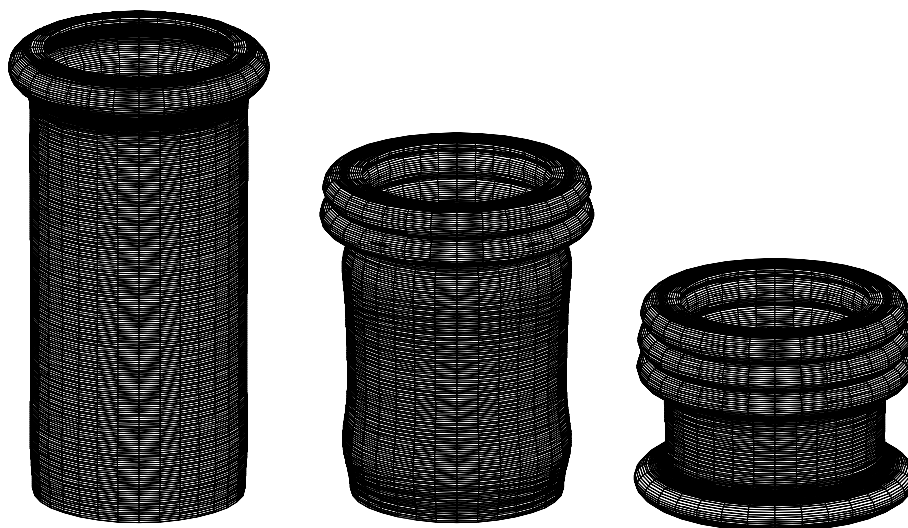
mentów czworokątnych. Schemat zadania przedstawia rysunek 4.35. Rysunek 4.36 przedstawia kolejne fazy deformacji cylindra zakończona zniszczeniem strefy podparcia. Rysunek 4.37 pokazuje pierwszą, trzecią i piątą fazę zgniatania w aksonometrii. W celu porównania jakościowego przedstawic można wynik eksperymentu. Zgniatano cylinder ze stopu glinowo-magnezowego AlMgSi05, o wysokości $H=100$ mm i masie $m=40$ g. Zgniotu dokonano przez uderzenie spadającą z wysokości 5 m masą 19 kg. Rys. 4.38 przedstawia wynik eksperymentu.



Rysunek 4.35: Schemat ściskania lepkoplastycznego cylindra.



Rysunek 4.36: Kolejne fazy deformacji cylindra.



Rysunek 4.37: Rysunki aksonometryczne deformacji cylindra.



Rysunek 4.38: Wynik eksperymentu dynamicznego zgniatania cylindra.

4.6. Metoda elementów czasoprzestrzennych a inne metody obliczeniowe

4.6.1. Zbieżność metody

Błąd metody szacuje się jako różnicę między rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym. Ścisłym rozwiązaniem równania (4.97) jest sinusoida $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, ze stałymi A i B wyznaczanymi z warunków początkowych. Wystarczy od rozwinięcia rozwiązania dokładnego w szereg Maclaurina odjąć rozwiązanie (4.106), aby wyznaczyć błąd kroku $[0, h]$. Najkorzystniejszym, z punktu widzenia zbieżności, jest przypadek $\alpha = 1/2$. Rozwiązanie przybliżone zbiega do rozwiązania ścisłego z błędem proporcjonalnym do trzeciej potęgi kroku Δt . W tabeli 4.3 dokonano podsumowania różnych wariantów metody. Kombinacja liniowa wariantów określonych przy różnych

Tablica 4.3: Stopień zbieżności metod.

metoda	stopień błędu	współczynnik
m.e.cz. $\alpha = 0$	Δt^2	$\frac{1}{2}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{1}{4}$	Δt^2	$\frac{1}{4}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{1}{2}$	Δt^3	$\frac{1}{12}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Δt^2	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
m.e.cz. $\alpha = \frac{3}{4}$	Δt^2	$\frac{1}{4}$
m.e.cz. $\alpha = 1$	Δt^2	$\frac{1}{2}$
m.e.cz. $v^* = 1$ (4.163)	Δt^2	$\frac{1}{12}$
Runge–Kutta 2 rz.	Δt^3	$\frac{1}{6}$
Runge–Kutta 4 rz.	Δt^5	$\frac{1}{120}$

α pozwala poprawić dokładność. Przyjęcie funkcji wirtualnej w postaci $\sum_j w_j \delta(t/h - \alpha_j)$, gdzie α_j są współrzędnymi pików, a w_j wielkością (wagą)

tych pików, prędkość v_{i+1} wyznacza się formułą

$$v_{i+1} = \frac{\sum_j \left(1 - \frac{kh^2}{2m} [1 - (1 - \alpha_j)^2]\right) w_j}{\sum_j \left(1 + \frac{kh^2 \alpha_j^2}{2m}\right) w_j} v_i - \frac{\frac{k}{m} h}{\sum_j \left(1 + \frac{kh^2 \alpha_j^2}{2m}\right) w_j} x_i . \quad (4.162)$$

Jeśli przyjmie się $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1/2$, $\alpha_3=1$, wówczas otrzyma się odpowiednie współczynniki w_j : $w_1=1/6$, $w_2 = 2/3$, $w_3=1/6$. Rozwiązanie ma błąd $\mathcal{O}(h^4)$ (dokładnie $h^4/12 + \mathcal{O}(h^5)$). Dobierając położenie kolejnych pików można wyzerować kolejne człony opisujące błąd lokalny rozwiązania. W ten sposób możemy skonstruować układ równań algebraicznych, w którym niewiadomymi będą udziały poszczególnych pików Diraca w końcowej funkcji wirtualnej prędkości. Odrębnym problemem jest dobór położenia α_i funkcji typu $\delta(t - \alpha_i h)$. Można to zrobić optymalnie, redukując błąd i wymagając zarazem spełnienia określonego kryterium przez wynikowe współczynniki (np. aby były one jednakowego znaku). Zagadnieniem tym nie będziemy się tutaj dalej zajmować.

W podobny sposób jak w p. 4.5.1 można wyprowadzić całą rodzinę schematów obliczeniowych, różniących się kształtem funkcji wirtualnej przyjętej przy wyprowadzeniu, a tym samym różniących się miejscem, w którym ustalana jest równowaga. Na uwagę zasługuje jeszcze schemat uzyskany przy globalnej równowadze, gdy funkcja wirtualna prędkości jest równa jedności w całym przedziale czasowym h , poza krańcami przedziału, gdzie wartości są równe zero. Formuła wynikowa przedstawia się następująco:

$$v_{i+1} = \frac{1 - \frac{k}{m} \frac{h^2}{3}}{1 + \frac{k}{m} \frac{h^2}{6}} v_i - \frac{\frac{k}{m} h}{1 + \frac{k}{m} \frac{h^2}{6}} x_i, \quad x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2} h (v_i + v_{i+1}) . \quad (4.163)$$

Schemat (4.163) ma błąd lokalny $\mathcal{O}(h^3)$ (dokładnie $h^3/12$) i jest warunkowo stabilny. Warunek stabilności narzuca ograniczenie $\omega h \leq 2\sqrt{3}$.

Operator a_1 formuły różnicowej $y_{i+1} = a_1 y_i + a_2 y_{i-1}$ dla wybranych metod przedstawiono w tablicy 4.4. Rysunek 4.39 ilustruje błąd fazowy wybranych metod całkowania równania różniczkowego ruchu.

Można wykazać, że przy $\alpha = \sqrt{2\beta}$ (β – parametr metody Newmarka) schemat (4.106) odpowiada metodzie Newmarka. Należy tu zaznaczyć, że identyczność metody Newmarka i metody elementów czasoprzestrzennych ogranicza się jedynie do przypadku z zerową macierzą tłumienia. W ogólnym przypadku pełnej analogii nie udało się dotąd pokazać.

Tablica 4.4: Operatory różnych schematów różnicowych całkowania równania różniczkowego.

metoda		operator
m. różnic centralnych		$2 - \kappa$
m. trapezów		$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
m. Newmarka:	$\beta=1/4, \gamma=1/2$	$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
	$\beta=1/6, \gamma=1/2$	$\frac{4(3-\kappa)}{6+\kappa}$
	$\beta=1/12, \gamma=1/2$	$\frac{2(12-5\kappa)}{12+\kappa}$
	$\beta=0, \gamma=1/2$	$2 - \kappa$
m.e.cz. – formuła przemieszczeniowa:	klasyczna ($\eta=0$)	$\frac{4(3-\kappa)}{6+\kappa}$
	$\eta=5/4$	$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
	$\eta=5/2$	$\frac{6-\kappa}{3+\kappa}$
m.e.cz. – formuła prędkościowa:	$\alpha=0$	$2 - \kappa$
	$\alpha = 1/2$	$\frac{16-6\kappa}{8+\kappa}$
	$\alpha = \sqrt{2}/2$	$\frac{2(4-\kappa)}{4+\kappa}$
	$\alpha=1$	$\frac{4}{2+\kappa}$
	formuła z $v^* = 1$ (4.163)	$\frac{4(3-\kappa)}{6+\kappa}$

4.6.2. Błąd fazowy

Błąd fazowy schematu całkowania wyrażonego w prędkościach określa iloraz

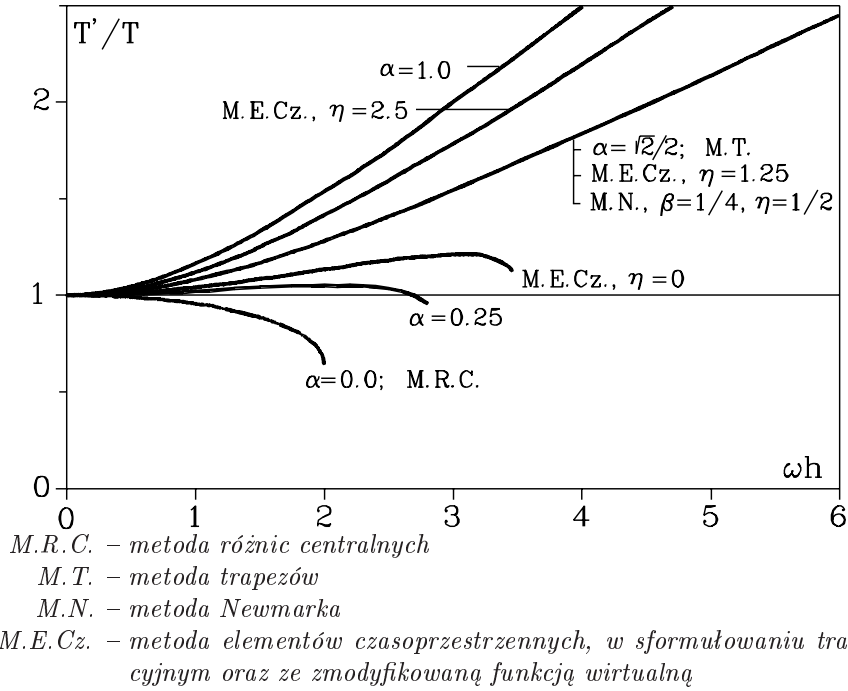
$$P = \frac{T'}{T} = \frac{\omega}{\omega'} . \quad (4.164)$$

Równanie charakterystyczne schematu opisanego przez (4.106) ma postać

$$\lambda^2 - (T_{11} + T_{22})\lambda + (T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22}) = 0 , \quad (4.165)$$

gdzie T_{ij} są elementami macierzy przejścia (4.106). Rozwiązaniem (4.165) są liczby

$$\lambda_{1/2} = \frac{\alpha^2\kappa + 2 - \kappa \pm i\sqrt{\kappa(2\alpha^2\kappa + 4 - \kappa)}}{\alpha^2\kappa + 2}, \quad \kappa = \frac{k}{m}h^2 . \quad (4.166)$$



Rysunek 4.39: Błąd fazowy metody elementów czasoprzestrzennych w sformułowaniu prędkościowym, zależnym od parametru α , na tle różnych metod całkowania równania różniczkowego ruchu.

Ponieważ częstość w schemacie numerycznym określa się przez

$$\operatorname{tg} \omega' h = \frac{\Im(\lambda)}{\Re(\lambda)}, \quad \omega' = \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \frac{\Im(\lambda)}{\Re(\lambda)}, \quad (4.167)$$

wobec tego błąd fazowy wynosi

$$P = \frac{\sqrt{\kappa}}{\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\kappa(2\alpha^2\kappa+4-\kappa)}}{\alpha^2\kappa+2-\kappa} \right)}, \quad (4.168)$$

a w granicy

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} P = 0. \quad (4.169)$$

■

Pytanie, który wariant metody, jawny czy niejawny, należy przyjąć w danych obliczeniach jest nadal aktualne. Niżej podane podsumowanie częściowo charakteryzuje podstawowe cechy obu tych grup.

Metody niejawne

- Metody niejawne są zwykle bezwarunkowo stabilne. Wielkość kroku czasowego uzależniona jest tylko od wymaganej dokładności.
- Obliczenia wymagają większej liczby operacji arytmetycznych przypadających na jeden krok obliczeniowy oraz większej pamięci operacyjnej.
- Kryteria dokładności wymagają, by krok czasowy wynosił ok. $1/100$ podstawowego okresu drgań.
- Algorytmy wymagają rozkładu macierzy na czynniki (faktoryzacji).
- Metody niejawne są dogodne w analizie zagadnień inercyjnych.
- Metody niejawne zaleca się stosować do ustrojów zginanych, ze względu na dużą wartość najwyższych częstości drgań w porównaniu z okresem podstawowym.
- Efektywność tej grupy metod spada przy analizie układów wielowymiarowych.

Metody jawne

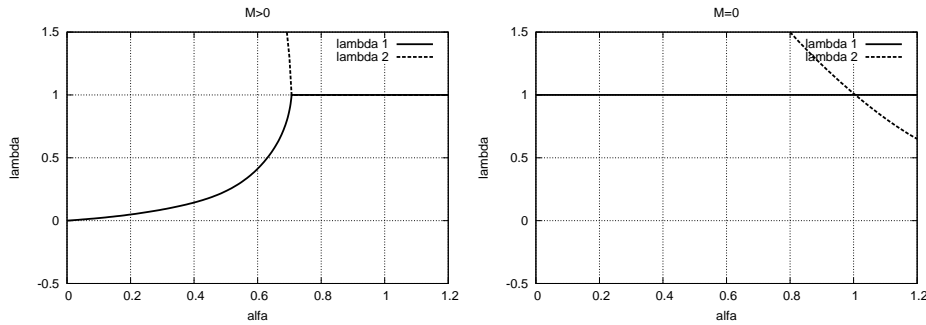
- Warunki stabilności ograniczają krok czasowy metod jawnych.
- Obliczenia są efektywne przy diagonalnej macierzy mas. Konsystentna macierz mas poprawia dokładność ustrojów zginanych lecz zawyża częstości, podczas gdy macierz diagonalna częstości zaniża. Macierz diagonalna modyfikowana [82] (całkowita masa elementu rozłożona diagonalnie według proporcji diagonalni macierzy konsystentnej) charakteryzuje się najkorzystniejszymi własnościami.

4.6.3. Zadania bezmasowe

Przyjrzymy się teraz rozwiązaniom zadań bezmasowych. Zastosujemy do ich rozwiązania schemat obliczeniowy metody elementów czasoprzestrzennych. Rozpatrujemy zadania statyczne, choć proces odkształcenia materiału wywołany jest kinematycznie. W ten sposób można uzyskać poglądowe wyniki

procesu quasistatycznego deformacji. Analizować można procesy kształtowania materiałów w formach, zgniatania podłużnic samochodowych itp.

Zbadajmy stabilność schematu obliczeniowego prędkościowej metody elementów czasoprzestrzennych (4.94) przy zerowej wartości współczynników bezwładności. Zajmiemy się schematem obliczeniowym uzyskanym przy wirtualnej funkcji prędkości w postaci delty Diraca. Przyjmując masę $m = 0$ obliczymy moduły wartości własnych macierzy przejścia \mathbf{T} w zadaniu o jednym stopniu swobody. Na rys. 4.40 pokazano zależność obu wartości własnych od wartości parametru α w przypadku zadania masowego i bezmasowego. W przypadku układu inercyjnego największa co do modułu wartość własna nie przekracza 1 przy $\alpha \geq \sqrt{2}/2$. W zadaniu bezinercyjnym moduły obu wartości własnych są równe 1 jedynie przy $\alpha = 1$. Jest to jedyny parametr procedury, przy którym rozwiązanie jest bezwarunkowo stabilne w przypadku $m = 0$. Przykłady obliczeń wykonane przy zerowej macierzy



Rysunek 4.40: Wartości własne macierzy przejścia w zadaniu masowym i bezmasowym.

bezwładności przedstawiono w rozdziale 9.1.

4.7. Metoda elementów czasoprzestrzennych a metoda Newmarka

Porównajmy metodę elementów czasoprzestrzennych w ujęciu prędkościowym do metody Newmarka. W tym celu sprowadzimy zapis metody Newmarka do postaci z macierzą przejścia. Powiążemy wektor złożony z prędkości i przemieszczenia w chwili następnej z takim samym wektorem w chwili poprzedniej. Zajmiemy się przypadkiem uproszczonym. Przyjmując zerową wartość funkcji obciążeń oraz brak tłumienia rozpatrzmy drgania swobodne

nielumione. Wykorzystując algorytm 4 po odpowiednich przekształceniach możemy zapisać macierz przejścia

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\beta(h^2\omega^2\beta+1)} - \frac{1}{2\beta} + 1 & -\frac{h\omega^2(h^2\omega^2(4\beta-1)+4)}{4(h^2\omega^2\beta+1)} \\ \frac{h}{1+h^2\omega^2\beta} & \frac{1-h^2\omega^2(\frac{1}{2}-\beta)}{1+h^2\omega^2\beta} \end{bmatrix}. \quad (4.170)$$

Jeśli rozwinie się wyrazy macierzy (4.170) w szereg Taylora i podobnie postąpi się z macierzą (4.106), to przy parametrze metody czasoprzestrzennej $\alpha = 1/2$ i parametrze metody Newmarka $\beta = 1/2$ otrzymujemy zgodność obu macierzy na poziomie błędu $\mathcal{O}(h^3)$

$$\Delta\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h^3\omega^4}{8} \\ -\frac{h^3\omega^2}{4} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.171)$$

Jedynie w przypadku zastosowania wirtualnej funkcji kapeluszowej oraz $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ można łatwo porównać metodę Newmarka z metodą elementów czasoprzestrzennych. Otrzymujemy wówczas macierz przeniesienia metody czasoprzestrzennej w postaci (4.163). Bez trudu spostrzeżemy, że obie macierze są sobie równe w przypadku $\beta = 1/6$ i $\gamma = 1/2$ w metodzie Newmarka. W związku z tym, o ile nie uwzględnimy tłumienia opisanego macierzą \mathbf{C} , otrzymujemy identyczność obu metod.

Identyczne rozważania można przeprowadzić w metodzie różnic centralnych i metodzie trapezów. Są one szczególnym przypadkiem grupy metod Newmarka.

Elementy sympleksowe

Schematy rozwiązania metody elementów skończonych sprowadzają się do układów równań algebraicznych. Ich rozwiązanie stanowi duży udział w koszcie całego procesu obliczeniowego. Liczba operacji arytmetycznych znacznie wzrasta w zadaniach nieliniowych, wymagających wielokrotnego rozwiązywania układu równań w każdym kroku czasowym. Stosowane są dwie grupy metod rozwiązywania układów równań: bezpośrednie i iteracyjne. Pierwsze prowadzą do rozwiązania przy jednokrotnym zaangażowaniu macierzy współczynników. Stosowany jest tu bądź rozkład macierzy na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych, bądź bezpośrednia triangularyzacja macierzy. Wyznaczenie niewiadomych przy trójkątnych postaciach macierzy jest natychmiastowe. Wykorzystać można rozkład klasyczny LU Gaussa na iloczyn macierzy trójkątnej dolnej i górnej, metodę Cholesky'ego-Banachiewicza $U^T U$ na iloczyn macierzy trójkątnej i jej postaci transponowanej, rozkład Doolittle'a lub Crouta LU z jedynkami na diagonalu macierzy L lub U lub rozkład LDL^T , z diagonalną macierzą D oraz macierzą trójkątną dolną L . Metody te charakteryzują się małym kosztem obliczeniowym. Rozkład LDL^T oraz rozkład Crouta i Doolittle'a wymagają $n^3/6$ operacji mnożenia, a rozkład Gaussa – $n^3/3$ działań. Koszt obliczeniowy w ogólnym przypadku zależy od szerokości pasma macierzy współczynników układu równań. Wadą grupy metod rozkładu macierzy jest konieczność stosowania specjalnych algorytmów zmniejszających szerokość pasma macierzy. W przypadku zadań płaskich, zdyskretyzowanych siatką o jednakowej liczbie węzłów w obu kierunkach, koszt rozwiązania układu jest proporcjonalny do czwartej potęgi liczby węzłów w jednym kierunku siatki. Z kolei w przypadku obszaru w kształcie kostki trójwymiarowej, pokrytej równomiernie siatką w trzech kierunkach,

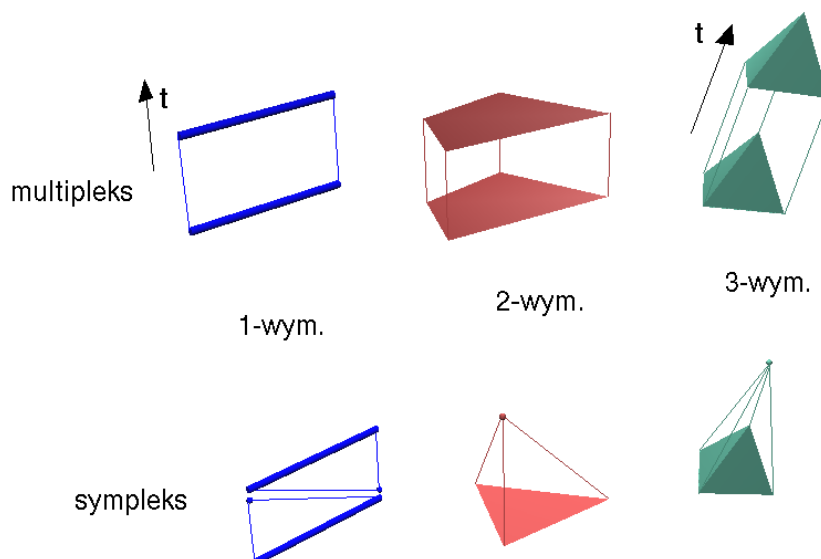
koszt ten wzrasta wraz z siódmą potęgą liczby węzłów na jednej krawędzi. Efekty nieliniowe zadania i konieczność iteracyjnego, spowolnionego przez wzrost liczby węzłów, dochodzenia do równowagi sił, jeszcze bardziej wydłuża proces obliczeniowy.

Druga grupa, grupa metod iteracyjnych (np. Jacobiego, Gaussa–Jordana), rzadziej stosowana w praktyce, pozwala na włączenie efektów nieliniowych zadania do procesu iteracyjnego rozwiązania układu równań. W ten sposób zbliżanie się do rozwiązania odbywa się na bazie równocześnie uaktualnianych macierzy elementów. Proces ten można prowadzić bez konieczności formowania macierzy globalnej (lub nawet jej części). Jest to wówczas procedura prowadzona „element po elemencie”. Mimo tej niewątpliwie korzystnej cechy, całość obliczeń jest bardzo kosztowna i narażona na kłopoty związane ze zbieżnością i stabilnością procesu.

Inną grupę metod iteracyjnych typu „element po elemencie” prezentują np. prace [87, 118]. Koszt obliczeniowy jest jednak duży i metody tego typu zaczynają być atrakcyjne dopiero przy odpowiednio dużych zadaniach. Niemniej jednak, jak wynika z analizy przedstawionej w pracy [118], zbieżność jest stosunkowo wolna i zależy od uwarunkowania macierzy (a więc od szerokości pasma macierzy, kształtu badanego obiektu i parametrów materiałowych elementów). Stwierdzono dużą wrażliwość na efekty nieliniowe. Zwiększenie kroku czasowego w zadaniach nieliniowych radykalnie pogarsza zbieżność.

Powyższe niedogodności, a szczególnie trudne do przewidzenia tempo zbieżności metod iteracyjnych sprawiają, że chętniej stosuje się w praktyce metody bezpośrednie.

Nowe możliwości otwiera aproksymacja czasoprzestrzenna, przy zastosowaniu podobszarów czasoprzestrzennych o kształtach sympleksów (rys. 5.1). Elementy te w rzeczywistej przestrzeni jednowymiarowej oraz w czasie przyjmują kształt trójkątów. Elementami o takim kształcie można modelować pręty drgające osiowo, pręty zginane lub struny. Dwuwymiarowe obiekty takie jak tarcze, płyty i powłoki w przestrzeni dyskretyzujemy trójkątnymi elementami, a w czasoprzestrzeni czworościanami utworzonymi na bazie tychże trójkątów. Bryły trójwymiarowe w przestrzeni przekładają się na nadczworościenne elementy sympleksowe w czasoprzestrzeni. Nadczworościany są tworami w przestrzeni $n+1$ wymiarowej i mają $5-i$ ($i=1, \dots, 4$) węzłów w chwili t_i oraz i węzłów w chwili t_{i+1} .

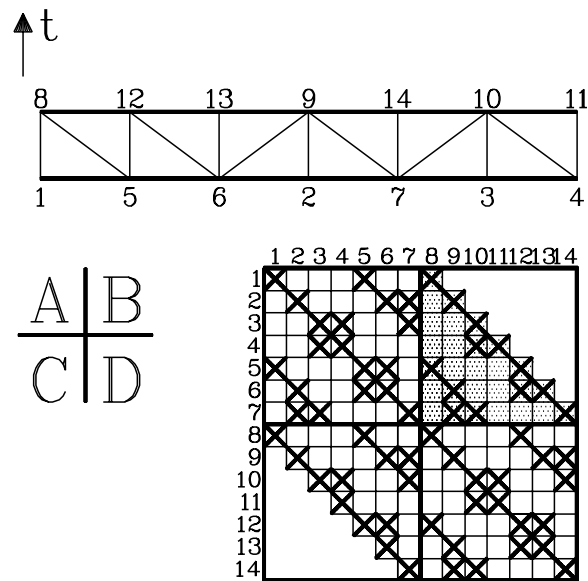


Rysunek 5.1: Przykłady elementów o kształtach multipleksów i sympleksów obiektów jedno, dwu i trójwymiarowych.

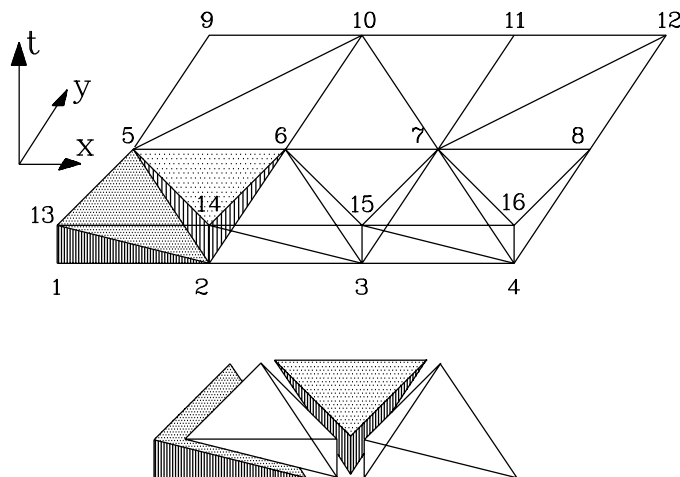
5.1. Własności podziału czasoprzestrzeni

Warstwę czasoprzestrzenną ograniczoną płaszczyznami t_i i t_{i+1} można wypełnić elementami sympleksowymi na wiele sposobów. Odpowiednie wypełnienie warstwy czasoprzestrzennej elementami sympleksowymi pozwala uzyskać trójkątną macierz współczynników układu równań bezpośrednio przy formowaniu macierzy globalnej (rys. 5.2). Przy wytyczaniu podziału na trójkąty czasoprzestrzenne należy kierować się zasadą, że krawędzie ukośne prowadzimy od punktu $(x_i, \Delta t)$ do punktu $(x_j, 0)$, jeśli $i < j$. W ten sposób otrzymujemy krawędzie ukośne w czasoprzestrzeni. W przeciwnym przypadku, tj. $i \geq j$, otrzymujemy krawędzie równoległe do osi czasu. Podobnie postępujemy w zadaniach o wyższej wymiarowości przestrzennej. Tok postępowanie opisuje algorytm 9. Przykład wypełnienia objętości warstwy czasoprzestrzennej w zadaniu jednowymiarowym pokazano na rys. 5.3. W opisany sposób uzyskuje się macierz współczynników układu równań w postaci macierzy trójkątnej dolnej.

W identyczny sposób tworzymy warstwę elementów czworościennych w obszarach dwuwymiarowych w przestrzeni. Obrazuje to rys. 5.3. Przy two-



Rysunek 5.2: Zapełnienie macierzy globalnej w obszarze jednowymiarowym, przy trójkątnej siatce elementów czasoprzestrzennych.



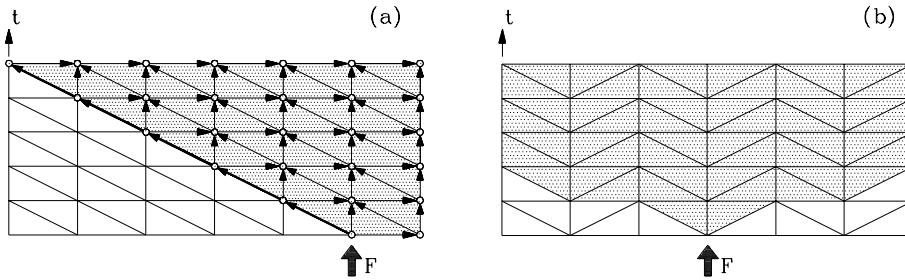
Rysunek 5.3: Wypełnienie czasoprzestrzeni w obszarze dwuwymiarowym.

Algorytm 9 Metoda podziału czasoprzestrzeni na elementy sympleksowe.

1. Rozpatrujemy kolejne węzły siatki podziału przestrzennego (np. węzeł i).
2. Numerujemy węzły elementów przestrzennych, stykających się z rozpatrywanym węzłem:
 - jeżeli numer węzła elementu otaczającego węzeł i jest większy od i , to współrzędna czasowa węzła w czasoprzestrzeni jest równa 0,
 - jeżeli numer węzła elementu otoczenia węzła i jest mniejszy od i , to współrzędna czasowa węzła w czasoprzestrzeni jest równa h ,
 - jeżeli jest to węzeł i , wówczas powstają 2 węzły elementu czasoprzestrzennego o współrzędnych czasowych 0 i h .

zeniu siatki czasoprzestrzennej i budowie macierzy współczynników należy postąpić przeciwnie do algorytmu 9. Otrzymamy wówczas trójkątną górną macierz współczynników. Można rozszerzyć zasadę zapelniania czasoprzestrzeni elementami sympleksowymi następującym stwierdzeniem: każdy podział warstwy czasoprzestrzennej elementami sympleksowymi pozwala rozwiązać wynikowy układ równań węzeł po węzle. Należy dokonywać tego dobierając odpowiednią kolejność węzłów, wynikającą ze sposobu zapelnienia warstwy elementami. Jest to oczywiste, gdyż zmiana kolejności równań i kolejności zmiennych w wektorze niewiadomych zawsze sprowadza taki układ równań do układu o macierzy trójkątnej (górnej lub dolnej).

Rozwiązywanie układu równań o trójkątnej macierzy współczynników jest efektywne, gdyż można bezpośrednio przystąpić do jego rozwiązywania równanie po równaniu. Własnością takiej procedury jest przepływ informacji w danej chwili tylko w jednym kierunku: od równania pierwszego do ostatniego (lub odwrotnie, jeśli mamy do czynienia z macierzą trójkątną górną). W procesie krokowym przebiegającym w czasie wyraża się to w ten sposób, że przepływ informacji między węzłami siatki przestrzennej w jednym kierunku ma prędkość ograniczoną, w drugim zaś nieograniczoną (rys. 5.4a). Próby numeryczne wykazały, że w fazie początkowej procesu obliczeniowego obserwuje się pewne różnice wyników. W dłuższym okresie obserwacji różnice te są zdominowane przez błędy wynikające z samego modelu dyskretnego, własności metody obliczeniowej czy drgań pasożytniczych. Anizotropia czasoprzestrzenna wpływa na wyniki zadań falowych (uderzenia, odbicia fal itp.). Nie ma istotnego wpływu na wyniki zadań dynamiki konstrukcji. Zja-



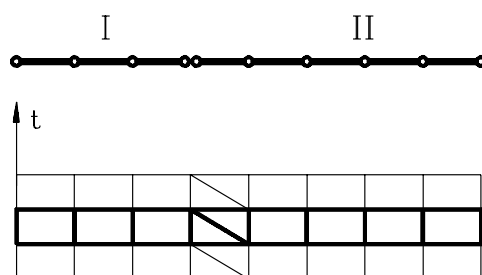
Rysunek 5.4: Ograniczenie prędkości przepływu informacji (a) oraz izotropowe własności czasoprzestrzeni (b).

wisko anizotropii można usunąć wprowadzając specjalny podział warstwy, bez uprzywilejowania jakiegokolwiek kierunku (rys. 5.4b).

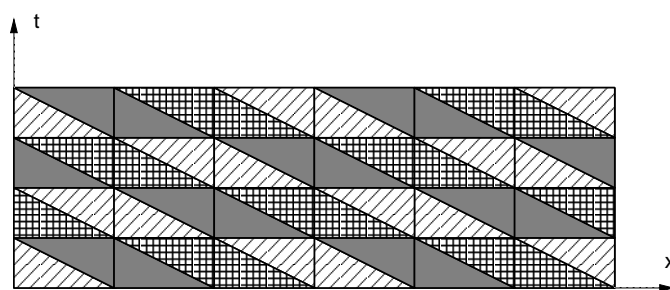
Drugą własnością praktyczną elementów sympleksowych jest możliwość rozseparowania układu równań pozwala na podział konstrukcji na podobszary i rozwiązywanie układu równań partiami. Cała konstrukcja, za wyjątkiem miejsc sklejenia podobszarów, może być modelowana elementami typu „multipleks”, a więc w sposób klasyczny. Jedynie w miejscach sklejenia umieszcza się elementy typu „sympleks” (rys. 5.5). Rozwiązanie zadania przebiega w dwóch etapach: najpierw rozwiązujemy I podukład równań, a następnie wykorzystując znane rozwiązanie w węzle na styku obu podobszarów – podukład II. Dzięki temu obliczenia można prowadzić na procesorach równoległych. Rys. 5.6 pokazuje na przykładzie najprostszej siatki elementów, jak proces obliczeniowy może zostać rozdzielony na cztery procesory. Obszar zaangażowania każdego z nich na rysunku odpowiednio zakreślono. Poczynając od węzła najbliższego początkowi układu współrzędnych można posuwać się wraz z czasem, realizując obliczenia zaznaczonych podukładów elementów. Większa liczba procesorów pozwala na jeszcze większe przyspieszenie cyklu obliczeniowego.

Elementy wyższego rzędu, z węzłami pośrednimi zarówno wzdłuż osi x jak i t , również pozwalają na skonstruowanie układu równań, dającego się rozwiązać „węzły po węzłach”. Oznacza to, że można wydzielić grupy węzłów (rys. 5.7), które wchodzi do obliczeń kolejno. W ten sposób uzyskuje się własności podobne jak przy elementach prostych, pierwszego rzędu, gdzie do obliczeń pobiera się węzły pojedynczo.

Innego rodzaju podział czasoprzestrzeni proponuje się w pracach [105, 143]. Węzły rozmieszczone są na przemian w co drugiej chwili (rys. 5.8). Zaletą takiego podejścia jest wydłużenie kroku całkowania (choć stabilność

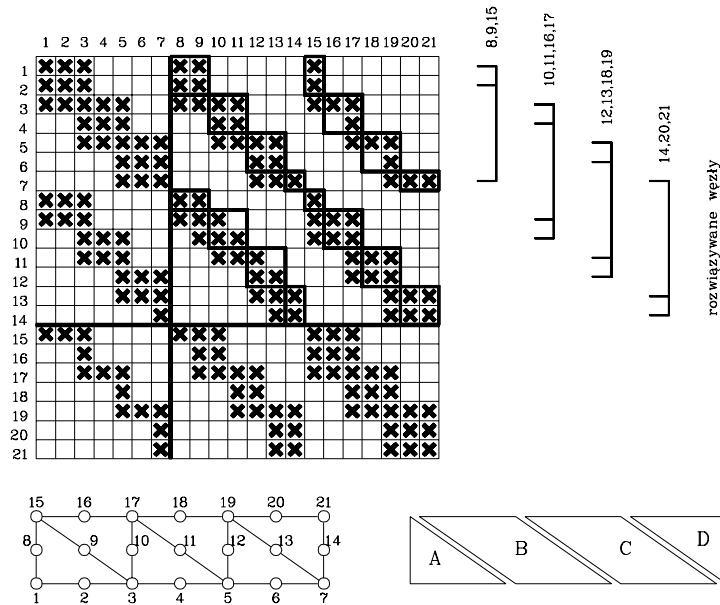


Rysunek 5.5: Podział obszaru konstrukcji na podobszary przy wykorzystaniu elementów sympleksowych.

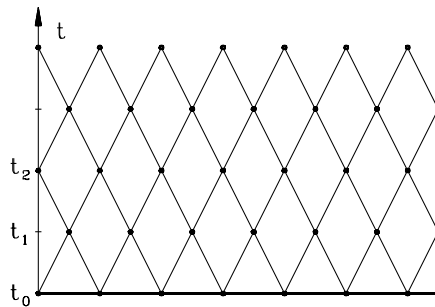


Rysunek 5.6: Obszary działania poszczególnych procesorów w rozwiązaniu wieloprocesorowym.

takiego schematu nie w pełni została zbadana), izotropia, a przede wszystkim rozseparowanie równań układu. Pozwala to ograniczyć pewne procesy iteracyjne (np. przy nieliniowościach materiałowych) do poszczególnych węzłów, bez konieczności operowania całymi macierzami. Poważną wadą jest trudność w praktycznym stosowaniu takiego podziału. Szczególne kłopoty pojawiają się już przy wypełnianiu nawet nieskomplikowanych obszarów płaskich. Przy brzegach i w narożach obszaru trzeba budować trójwymiarowe obiekty o nietypowym kształcie, różniące się od całej reszty siatki. Nakład pracy w fazie programowania jest jednak tak duży, że może zwrócić się jedynie przy wielokrotnie wykonywanych obliczeniach konstrukcji o siatkach ogromnych rozmiarów.



Rysunek 5.7: Budowa i rozwiązywanie układu równań w przypadku elementów czasoprzestrzennych wyższego rzędu.



Rysunek 5.8: Naprzemianległe rozmieszczenie węzłów elementów.

5.2. Efektywność numeryczna

Efektywność numeryczna jest jedną z podstawowych cech, którą należy się kierować przy rozwiązywaniu zadań nieliniowych. Znalezienie rozwiązania w jednym kroku obliczeniowym składa się z dwóch etapów: budowy globalnej macierzy współczynników, po uprzedniej modyfikacji geometrii i własności

materiałowych, oraz rozwiązania układu równań algebraicznych. Na koszt obliczeniowy procesu całkowania równania ruchu istotny wpływ ma postać macierzy bezwładności oraz sposób uwzględnienia tłumienia. Diagonalna macierz bezwładności oraz tłumienie numeryczne, opisane przez kombinację macierzy sztywności i bezwładności, pozwalają znacznie skrócić i uprościć proces obliczeniowy. Użycie jawnych schematów całkowania w czasie powoduje rozprzężenie równań układu ze względu na wektor niewiadomych. Jednak w niektórych przypadkach wymaga się uwzględnienia konsystentnych macierzy mas i tłumienia. W takich przypadkach konieczność rozwiązania pełnego układu równań podnosi istotnie koszt.

Najprostszą oceną jakości algorytmu jest oszacowanie liczby operacji arytmetycznych koniecznych do przeprowadzenia w jednym kroku obliczeniowym. Można przyjąć, że udział operacji mnożenia M w ogólnej liczbie operacji arytmetycznych jest stały. W metodzie elementów czasoprzestrzennych liczba mnożeń potrzebnych do rozwiązania utworzonego układu równań (bez fazy wyznaczania współczynników tego układu) zależy od wielkości pamięci operacyjnej użytej do gromadzenia współczynników. Wynosi ona

$$M = 2sN(c + 1) \quad , \quad (5.1)$$

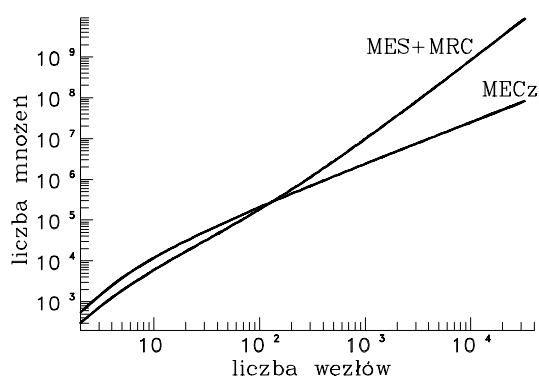
jeśli angażuje się $3,5 sN(c + 1) + 1,5 sN$ komórek pamięci, oraz

$$M = 3sN(c + 1) \quad , \quad (5.2)$$

jeśli angażuje się $1,5 sN(c + 1) + 1,5 sN$ komórek pamięci. Przez komórkę pamięci rozumiemy tu porcję pamięci przechowującą liczbę rzeczywistą. Przez c oznaczamy liczbę węzłów sąsiadujących z pojedynczym węzłem siatki, N jest całkowitą liczbą stopni swobody, a s jest węzłową liczbą stopni swobody.

Porównanie pełnego kosztu obliczeniowego jednego kroku metody elementów czasoprzestrzennych i metody elementów skończonych połączonej z metodą różnic centralnych wymaga poczynienia pewnych założeń. W metodzie elementów skończonych i różnic centralnych przyjęto:

- tworzenie macierzy współczynników na każdym kroku obliczeniowym,
- symetrię macierzy elementów i macierzy globalnej,
- regularny brzeg pasma macierzy globalnej (uzupełniony zerami),
- konsystentną macierz bezwładności,
- pomijalne tłumienie,
- optymalną numerację węzłów w celu zwężenia szerokości pasma macierzy,



Rysunek 5.9: Porównanie kosztu obliczeniowego metody elementów skończonych i różnic centralnych z metodą elementów czasoprzestrzennych.

- wykonywanie mnożeń przez zera w obrębie pasma,
- płaskie zadanie sprężystości jako zadanie modelowe przyjęte do oszacowania.

Porównanie kosztu obliczeń przedstawiono na rys. 5.9. W celu porównania opisanych wyżej oszacowań (5.1) i (5.2) można przytoczyć dane literaturowe [131]. Metoda Newmarka wymaga $M = Nb^2/2n + N(4b + 3)$ operacji mnożenia na 1 krok obliczeniowy (n – liczba kroków obliczeniowych, b – szerokość półpasma macierzy). Z kolei metoda Trujillo [131, 171] przy przechowywaniu macierzy w formie półpasma wymaga $M = N(4b + 6)$ operacji, a przy przechowywaniu macierzy w formie blokowej $M = 2sN(c + 1) + 10N$. Zestawienie kosztu obliczeniowego poszczególnych metod podano w tablicy 5.1. Należy zwrócić uwagę, że szerokość półpasma macierzy b jest zwykle proporcjonalna do $N^{1/2}$ w zadaniach płaskich i do $N^{1/3}$ w zadaniach trójwymiarowych. W porównaniu pominięto całą grupę metod wykorzystujących diagonalne macierze bezwładności i tłumienia. Dają one rozseparowane równania i koszt rozwiązania zadań jest wówczas niski.

Wnioski

- Koszt obliczeniowy m. e. cz. rośnie liniowo wraz z liczbą węzłów siatki.
- Liczba operacji w m. e. cz. nie zależy od sposobu numeracji węzłów (topologii siatki).
- W metodach klasycznych szerokość półpasma b rośnie wraz ze wzrostem wielkości zadania. Liczba operacji arytmetycznych przypada-

Tablica 5.1: Koszt obliczeniowy poszczególnych metod numerycznych.

metoda	liczba mnożeń
m. Gaussa (symetria macierzy)	$\frac{N^3}{6} + \frac{N^2}{4} + \frac{N}{12}$
m. Gaussa (symetria macierzy, pasmowość)	$\frac{1}{2}b^2N$
m. e. cz. (większa pamięć operacyjna)	$2sN(c+1)$
m. e. cz. (mniejsza pamięć operacyjna)	$3sN(c+1)$
m. Newmarka [131]	$4bN + 3N$
m. Trujillo (z półpasmem) [131]	$4bN + 6N$
m. Trujillo (z zapisem blokowym) [131]	$2bN + 10N$

jących na jeden krok obliczeniowy jest wówczas proporcjonalna do $bN \approx N^{\frac{3}{2}}$.

- Oszacowania są zgrubne i mogą zmieniać się znacznie w przypadku różnych konkretnych zadań.

5.3. Elementy sympleksowe w opisie przemieszczeniowym

W następnych rozdziałach wyprowadzimy macierze sztywności, bezwładności i tłumienia podstawowych sympleksowych czasoprzestrzennych elementów skończonych. Zajmiemy się element pręta lub struny, element belki średniej grubości, tarczy, płyty średniej grubości oraz ciała trójwymiarowego. Sposób budowania macierzy jest prosty. Wykorzystujemy znaną z metody elementów skończonych drogę postępowania. Jediną różnicą jest uwzględnienie czasu jako dodatkowej współrzędnej układu, w którym opisujemy element dyskretny.

5.3.1. Trójkątny element pręta drgającego osiowo

Stosujemy liniowy rozkład przemieszczeń wewnątrz elementu trójkątnego

$$u(x, t) = a_1x + a_2t + a_3, \quad (5.3)$$

gdzie a_1 , a_2 , a_3 są stałymi zależnymi od geometrii elementu i od wartości węzłowych przemieszczeń. Inaczej można to zapisać we współrzędnych

powierzchniowych L_i

$$u = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 , \quad (5.4)$$

gdzie

$$L_i = \frac{1}{2\Delta} \det \begin{bmatrix} x & t & 1 \\ x_k & t_k & 1 \\ x_l & t_l & 1 \end{bmatrix} , \quad (5.5)$$

i, k, l i j, m, n — permutacje numerów wierzchołków trójkąta,

Δ — pole powierzchni trójkąta.

Funkcje kształtu $N_i(x, t)$ wyrażają się prosto przez współrzędne L_i

$$\mathbf{N} = [L_1, L_2, L_3] \quad (5.6)$$

Operator różniczkowy $\mathcal{D} = \partial/\partial x$ jest jednoelementowy. Jeśli początek układu współrzędnych przyjmiemy w środku ciężkości trójkąta, to macierze sztywności \mathbf{K} i bezwładności \mathbf{M} elementu wyrażą się następująco:

$$K_{ij} = \frac{EA}{4\Delta} (t_k - t_l)(t_m - t_n) , \quad (5.7)$$

$$M_{ij} = -\frac{\rho A}{4\Delta} (x_k - x_l)(x_m - x_n) . \quad (5.8)$$

Tłumienie zewnętrzne \mathbf{Z} ma postać

$$Z_{ij} = \frac{\eta_z}{4\Delta} (x_k t_l - x_l t_k)(x_n - x_m) , \quad (5.9)$$

a wewnętrzne, z uwagi na podwójne różniczkowanie (5.3) jest równe zero.

5.3.2. Element czasoprzestrzenny belki o średniej grubości

W belce o średniej grubości uwzględniamy efekty ścinania. Zarówno ugięcie w jak i obrót θ wyrażają się niezależnymi funkcjami liniowymi

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 x + a_2 t + a_3 \\ b_1 x + b_2 t + b_3 \end{Bmatrix} . \quad (5.10)$$

Współczynniki a_i i b_i zależą od geometrii elementu czasoprzestrzennego. We współrzędnych powierzchniowych L_1, L_2, L_3 można zapisać zależność przemieszczeń od wartości węzłowych

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 w_1 + L_2 w_2 + L_3 w_3 \\ L_1 \theta_1 + L_2 \theta_2 + L_3 \theta_3 \end{Bmatrix} , \quad (5.11)$$

gdzie

$$L_i = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} x & t & 1 \\ x_j & t_j & 1 \\ x_k & t_k & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.12)$$

a Δ jest polem powierzchni elementu trójkątnego.

Można wyznaczyć współczynniki a_i

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\Delta}(t_{23}w_1 + t_{31}w_2 + t_{12}w_3) \\ a_2 &= \frac{1}{2\Delta}(x_{32}w_1 + x_{13}w_2 + x_{21}w_3) \\ a_3 &= \frac{1}{2\Delta}(x_2t_3w_1 + x_3t_1w_2 + x_1t_2w_3), \end{aligned} \quad (5.13)$$

gdzie $x_{ij} = x_i - x_j$, $t_{ij} = t_i - t_j$. Współczynniki b_i wyrażają się podobnie. Zawierają parametry obrotów θ_k zamiast przemieszczeń poprzecznych w_k . Wobec całkowitego rozprężenia ugięć i obrotów tego macierz funkcji kształtu wyraża się jako macierz diagonalna

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.14)$$

Odształcenia ε określane są przez średni kąt ścinania β oraz krzywiznę κ

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \beta \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (5.15)$$

Operator różniczkowy \mathcal{D} zawiera pochodne względem zmiennej x i ma następującą postać

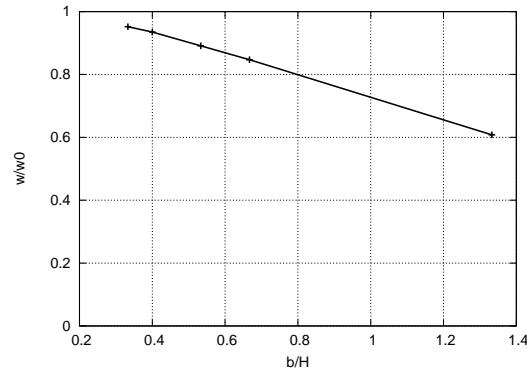
$$\mathcal{D}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Związek konstytutywny określa macierz sprężystości \mathbf{E}

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{K} & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.17)$$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie iloczynów, zgodnie z ogólnymi wzorami (4.15), (4.16) oraz (4.19) i (4.20), a następnie obliczenie całek w obszarze trójkąta. Jeśli początek układu współrzędnych przyjmiemy w środku ciężkości trójkąta, to możemy wykorzystać znane reguły

$$\int_{\Delta} dxdt = \Delta, \quad \int_{\Delta} x dxdt = 0, \quad \int_{\Delta} x^2 dxdt = \frac{\Delta}{12}\Sigma x_i^2, \quad \int_{\Delta} xt dxdt = \frac{\Delta}{12}\Sigma x_i t_i. \quad (5.18)$$



Rysunek 5.10: Dokładność przemieszczeń swobodnego końca belki w zależności od długości przestrzennej elementów.

W dalszych wyprowadzeniach możemy postąpić jak w p. 5.3.1, dodając zmienną przestrzenną y . Funkcje interpolujące możemy wyrazić współrzędnymi objętościowymi $L_i(x, y, t)$, rozszerzając ich definicję przedstawioną w (5.5) o dodatkową zmienną y . Do całkowania podcałkowych iloczynów możemy wykorzystać analogiczne do (5.18) reguły całkowania

$$\int_V dx dy dt = V, \quad \int_V x dx dy dt = 0, \quad (5.21)$$

$$\int_V x^2 dx dy dt = \frac{V}{12} \Sigma x_i^2, \quad \int_V xt dx dy dt = \frac{V}{12} \Sigma x_i t_i. \quad (5.22)$$

Wynikowe współczynniki macierzy można w efekcie tego podać jawnie. Mimo to wpisywanie odpowiednich wyrażeń do programu komputerowego może być żmudne. Z tego względu proponujemy tu inną drogę postępowania.

Oznaczamy przez \mathbf{g} wektor jednomianów

$$\mathbf{g} = [x, y, t, 1] \quad (5.23)$$

oraz przez \mathbf{a} i \mathbf{b} wektory stałych współczynników a_i , i b_i , $i=1, \dots, 4$. Możemy zapisać przemieszczenia \mathbf{u} następująco

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} \mathbf{a} \\ \mathbf{g} \mathbf{b} \end{array} \right\}. \quad (5.24)$$

Utworzymy macierz \mathbf{G} zawierającą wartości węzłowych wektorów \mathbf{g}

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(x_1, y_1, t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(x_4, y_4, t_4) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Kolumny macierzy odwrotnej \mathbf{G}^{-1} oznaczamy przez $\mathbf{r}_i = [p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, p_{4i}]^T$. Macierz kształtu \mathbf{N} , złożona z podmacierzy \mathbf{N}_i , przy takim zapisie ma postać

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4], \quad \mathbf{N}_i = \mathbf{g} \mathbf{r}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Operator różniczkowy \mathcal{D}_x , wiążący odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ i przemieszczenia \mathbf{u} zależnością $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u}$, w przypadku dwuwymiarowego stanu naprężenia lub odkształcenia ma postać

$$\mathcal{D}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

a macierz sprężystości \mathbf{E} w przypadku płaskiego stanu naprężenia

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Odpowiednia macierz w zagadnieniu płaskiego stanu odkształcenia ma podobną postać

$$\mathbf{E} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

E jest modulem Younga, a ν - współczynnikiem Poissona. Przyjmując początek układu współrzędnych w środku ciężkości czworościanu można łatwo przeprowadzić całkowanie macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia. W efekcie otrzymujemy macierze sztywności \mathbf{K} , bezwładności \mathbf{M} , tłumienia wewnętrznego \mathbf{W} i tłumienia zewnętrznego \mathbf{Z} . Poniżej przedstawiamy podmacierze o wymiarach 2×2 tych macierzy. Po napisaniu ich przy $i, j = 1, \dots, 4$ można nimi wypełnić macierze elementów, mające wymiary 8×8 :

$$\mathbf{K}_{ij} = V \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} p_{1i} p_{1j} + \frac{E}{2(1+\nu)} p_{2i} p_{2j} & \frac{E}{1-\nu^2} p_{1i} p_{2j} + \frac{E}{2(1+\nu)} p_{2i} p_{1j} \\ \frac{E}{1-\nu^2} p_{2i} p_{1j} + \frac{E}{2(1+\nu)} p_{1i} p_{2j} & \frac{E}{1-\nu^2} p_{2i} p_{2j} + \frac{E}{2(1+\nu)} p_{1i} p_{1j} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = -\rho V p_{3i} p_{3j} \mathbf{I}, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{0}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{Z}_{ij} = \eta_z V p_{4i} p_{3j} \mathbf{I}. \quad (5.33)$$

\mathbf{I} oznacza macierz jednostkową, a $\mathbf{0}$ macierz zerową, obie o wymiarze 2×2 .

5.3.4. Czworóścienny element płyty średniej grubości

Element o liniowych funkcjach kształtu

Podobnie jak w przypadku belki (rozdz. 5.3.2), przyjmujemy liniowy rozkład przemieszczeń wewnątrz elementu czworóściennego

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 x + a_2 y + a_3 t + a_4 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 t + b_4 \\ c_1 x + c_2 y + c_3 t + c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_4 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ c_1 & \dots & c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ t \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \mathbf{g}. \quad (5.34)$$

\mathbf{g} jest wektorem zawierającym jednomiany $\mathbf{g}(x, y, t) = [x, y, t, 1]$, a wektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} zawierają współczynniki w wielomianach opisujących rozkład przemieszczeń w elemencie.

Macierz odwrotną do macierzy węzłowych wartości jednomianów w wierzchołkach czworóściennego elementu zapisujemy jako macierz o kolumnach \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, 4$, a jej współczynniki oznaczamy przez p_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T(x_1, y_1, t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}^T(x_4, y_4, t_4) \end{bmatrix}^{-1} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_4] = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{41} & \dots & p_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Czasoprzestrzenna macierz funkcji kształtu \mathbf{N}_i będzie miała postać

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{g}^T(x, y, t) \mathbf{r}_i \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (5.36)$$

Składowe tensora odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ zawierają krzywizny κ_x , κ_y i κ_{xy} oraz średnie kąty ścinania β_x i β_y

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (5.37)$$

Wobec tego operator różniczkowy występujący w związku odkształceń i przemieszczeń $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u}$ będzie miał postać następującą

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (5.38)$$

Macierz sprężystości ma znaną postać

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ & D & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} D & 0 & 0 \\ \text{(sym.)} & & & H & 0 \\ & & & & H \end{bmatrix} , \quad (5.39)$$

$$D = \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu} , \quad H = \frac{5}{6} Gh ,$$

gdzie h jest grubością płyty, ν – współczynnikiem Poissona, E i G – modułem sprężystości podłużnej i ścinania.

Wykonanie odpowiednich różniczkowań i scałkowanie wyników iloczynów macierzowych w obszarze czworościanu daje odpowiednie macierze elementu. Całkowanie można uprościć, jeśli początek układu współrzędnych umieści się w środku ciężkości czworościanu.

Macierz funkcji kształtu, po napisaniu (5.36), zapisujemy w postaci

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_4], \quad \mathbf{N}_i = (p_{1i}x + p_{2i}y + p_{3i}t + p_{4i}) \mathbf{I}_{3 \times 3} . \quad (5.40)$$

Odpowiednie komponenty podcałkowe w macierzach elementu zapiszemy z wykorzystaniem elementów p_{ij} odwrotności macierzy \mathbf{G}^{-1} (5.35)

$$\mathcal{D}\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & p_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2i} \\ 0 & p_{2i} & p_{1i} \\ p_{1i} & \mathbf{gr}_i & 0 \\ p_{2i} & 0 & \mathbf{gr}_i \end{bmatrix} , \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial t} = p_{3i} \mathbf{I}_{3 \times 3} , \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3i} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Wówczas końcowa postać macierzy \mathbf{K}_{ijkl} , \mathbf{M}_{ijkl} , \mathbf{W}_{ijkl} i \mathbf{Z}_{ijkl} elementu czasoprzestrzennego płyty średniej grubości jest następująca:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11} &= (p_{1i}p_{1j} + p_{2i}p_{2j})HV, \\ K_{ij}^{12} &= p_{1i}p_{4j}HV, \\ K_{ij}^{13} &= p_{2i}p_{4j}HV, \\ K_{ij}^{21} &= p_{4i}p_{1j}HV, \\ K_{ij}^{22} &= p_{1i}p_{1j}DV + \frac{1-\nu}{2}DVp_{2i}p_{2j} + HVp_{4i}p_{4j} + \\ &\quad + \frac{HV}{20} \left[p_{1i}p_{1j} \sum x^2 + (p_{1i}p_{2j} + p_{2i}p_{1j}) \sum xy + (p_{1i}p_{3j} + p_{3i}p_{1j}) \sum xt + \right. \\ &\quad \left. + (p_{2i}p_{3j} + p_{3i}p_{2j}) \sum yt + p_{2i}p_{2j} \sum y^2 + p_{3i}p_{3j} \sum t^2 \right], \\ K_{ij}^{23} &= (\nu p_{1i}p_{2j} + \frac{1-\nu}{2}p_{2i}p_{1j})DV, \\ K_{ij}^{31} &= p_{4i}p_{2j}HV, \\ K_{ij}^{32} &= (\nu p_{2i}p_{1j} + \frac{1-\nu}{2}p_{1i}p_{2j})DV, \\ K_{ij}^{33} &= p_{2i}p_{2j}DV + \frac{1-\nu}{2}DVp_{1i}p_{1j} + HVp_{4i}p_{4j} + \\ &\quad + \frac{HV}{20} \left[p_{1i}p_{1j} \sum x^2 + (p_{1i}p_{2j} + p_{2i}p_{1j}) \sum xy + (p_{1i}p_{3j} + p_{3i}p_{1j}) \sum xt + \right. \\ &\quad \left. + p_{2i}p_{2j} \sum y^2 + (p_{2i}p_{3j} + p_{3i}p_{2j}) \sum yt + p_{3i}p_{3j} \sum t^2 \right], \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{h^2}{12} & \\ & & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} \rho V p_{3i} p_{3j}, \quad (5.45)$$

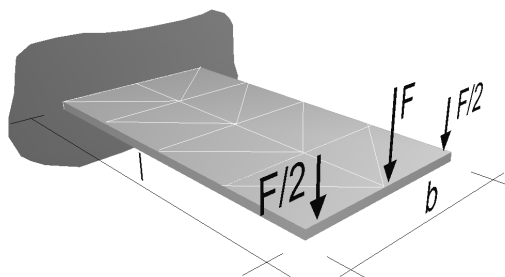
$$\mathbf{W}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & p_{1i} & p_{2i} \\ 0 & p_{4i} & 0 \\ 0 & 0 & p_{4i} \end{bmatrix} \eta V p_{3j}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{Z}_{ij} = p_{4i} p_{3j} \eta_z V \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}. \quad (5.47)$$

Sumy iloczynów współrzędnych węzłów czworościanu $\sum xy, \dots, \sum yt$ oraz sumy kwadratów tych współrzędnych $\sum x^2$ itd. wyznaczane są w układzie współrzędnych o początku w środku ciężkości czworościanu.

Przykład obliczeniowy

Wykonano obliczenia płyty wspornikowej średniej grubości, obciążonej równomiernie wzdłuż wolnego brzegu (rys. 5.11). Przyjęto obciążenie stałe w czasie. Obliczenia wykonano przy następujących danych bezwymiarowych: $l=5,08$, $b=2,54$, $E=1$, $\rho=1$, $\nu=0,3$, $F=1$. Położenie równowagi porównano z ugięciami statycznymi otrzymanymi przez innych autorów. Wyniki zestawiono w tabelicy 5.2. Siatka złożona z niewielu elementów skończonych daje układy przesztynnione. Częstości drgań są nieco zawyżone a ugięcia zaniżone. Wynika to nie tylko z przesztynnienia, ale w pewnym stopniu również z trudniejszego obciążenia w sposób ciągły brzegu w siatce o niewielu węzłach, kiedy to do współpracy w siatce sympleksów węzły włączają się stopniowo.



Rysunek 5.11: Płytę wspornikowa w zadaniu testowym.

Okazuje się, że dokładność uzyskiwanych w tym przypadku wyników zależy bardziej od modelu elementu skończonego niż od sposobu całkowania równania różniczkowego w czasie. Wyniki całkowania metodą elementów czasoprzestrzennych można uznać za dokładne.

5.3.5. Nadczworościenny element ciała trójwymiarowego

Elementy mają kształt nadczworościanu, o 5-*i* węzłach w chwili t_i i *i* węzłach w chwili t_{i+1} , $i=1, \dots, 4$. Konstrukcja geometrii takich obiektów jest prosta. Oznaczamy węzły o współrzędnych x_i, y_i, z_i, t_i numerami 1, 2, 3, 4, a węzły

Tablica 5.2: Zestawienie wyników obliczeń zadań testowych płyty.

siatka podziału	liczba węzłów	ugięcie w	okres T	$\frac{Dw}{QL^2}$	$\frac{\omega}{\sqrt{D/\rho t L^4}}$
2×1	6	318,	109,	0,564	4,84
4×2	15	537,	133,	0,953	3,97
8×4	45	720,	157,	1,277	3,37
Inne wartości porównawcze*:					
— metoda Ritz'a					3,47
— doświadczenia					3,42
— doświadczenia Plunketta					3,50
— elementy skończone (analiza modalna)					
— 2×1 (4 elementy trójkątne)					3,39
— 4×2 (16 elementów trójkątnych)					3,44

*O.C. Zienkiewicz, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972

o identycznych współrzędnych przestrzennych i czasie i_{i+1} numerami 1', 2', 3', i 4'. Kolejne nadczworościany rozpinamy na węzłach (1, 2, 3, 4, 1'), (2, 3, 4, 1', 2'), (3, 4, 1', 2', 3') i (4, 1', 2', 3', 4'). Wektor przemieszczeń punktu materialnego w trójosiowym stanie odkształcenia ma postać

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} y \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (5.48)$$

Odształcenia określone są przez odpowiednie pochodne

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (5.49)$$

Posługując się operatorem różniczkowym \mathcal{D}_x można to zapisać jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}_x \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.50)$$

gdzie

$$\mathcal{D}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Przemieszczenia wewnątrz elementu interpolowane są funkcjami kształtu \mathbf{N}_i , $i=1, \dots, 4$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}\mathbf{q}. \quad (5.52)$$

Macierz funkcji kształtu \mathbf{N} można zapisać wykorzystując współrzędne objętościowe L_i

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4], \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} L_i & 0 & 0 \\ 0 & L_i & 0 \\ 0 & 0 & L_i \end{bmatrix} = \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{I}_3. \quad (5.53)$$

$L_i = H_i/H$ jest współrzędną objętościową, a H_i i H są objętościami czterowymiarowych sympleksów

$$H_i(x, y, z, t) = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_j & y_j & z_j & t_j \\ x_k & y_k & z_k & t_k \\ x_l & y_l & z_l & t_l \\ x_m & y_m & z_m & t_m \end{vmatrix}, \quad H = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & t_i \\ x_j & y_j & z_j & t_j \\ x_k & y_k & z_k & t_k \\ x_l & y_l & z_l & t_l \\ x_m & y_m & z_m & t_m \end{vmatrix}. \quad (5.54)$$

Wskaźniki i, j, k, l są numerami kolejnych wierzchołków sympleksu. Objętość n -wymiarowego sympleksu H_n wyraża się wzorem

$$H_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & 1 \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.55)$$

x_i^j oznacza tu j -tą współrzędną i -tego wierzchołka.

Można wykorzystać sposób wyprowadzenia macierzy podany w rozdz. 5.3.3. Przyjmujemy w takim przypadku zapis przemieszczeń jako funkcje

liniowe:

$$\begin{aligned} u &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t + a_5 , \\ v &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t + b_5 , \\ w &= c_1x + c_2y + c_3z + c_4t + c_5 . \end{aligned} \quad (5.56)$$

Oznaczamy wektor $\mathbf{g} = [x, y, z, t, 1]$ i piszemy macierz złożoną z wektorów \mathbf{g} o wartościach ustalonych w węzłach

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(x_5, y_5, z_5, t_5) \end{bmatrix} . \quad (5.57)$$

Przemieszczenia węzłowe \mathbf{u}_e , \mathbf{v}_e i \mathbf{w}_e zawierające pogrupowane węzłowe przemieszczenia w odpowiednich kierunkach x , y i z można zapisać następująco:

$$\mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1\mathbf{a} \\ \mathbf{g}_2\mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_5\mathbf{a} \end{Bmatrix} , \quad \mathbf{v}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1\mathbf{b} \\ \mathbf{g}_2\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_5\mathbf{b} \end{Bmatrix} , \quad \mathbf{w}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1\mathbf{c} \\ \mathbf{g}_2\mathbf{c} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_5\mathbf{c} \end{Bmatrix} \quad (5.58)$$

lub

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{G}\mathbf{a} , \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{G}\mathbf{b} , \quad \mathbf{w}_e = \mathbf{G}\mathbf{c} . \quad (5.59)$$

Po odwróceniu macierzy \mathbf{G} wyznaczamy nieznanne wartości stałych a_i , b_i , c_i , $i=1, \dots, 5$ występujących w związkach (5.56). Wówczas

$$u(x, y, z, t) = \mathbf{g} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}_e , \quad v(x, y, z, t) = \mathbf{g} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{v}_e , \quad w(x, y, z, t) = \mathbf{g} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{w}_e . \quad (5.60)$$

Zapis powyższy możemy ujednostynić stosując w nim zerojedynkowe macierze przyporządkowania \mathbf{A}_u , \mathbf{A}_v i \mathbf{A}_w , przyporządkowujące odpowiednie wartości węzłowe wektorowi przemieszczeń węzłowych \mathbf{q} . Macierze te powinny spełniać równości: $\mathbf{u}_e = \mathbf{A}_u \mathbf{q}$, $\mathbf{v}_e = \mathbf{A}_v \mathbf{q}$ i $\mathbf{w}_e = \mathbf{A}_w \mathbf{q}$. W takim przypadku możemy przemieszczenia interpolować następująco:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} y \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_u \\ \mathbf{g} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_v \\ \mathbf{g} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_w \end{bmatrix} . \quad (5.61)$$

Jeśli teraz oznaczymy przez \mathbf{r}_i odpowiednie kolumny macierzy \mathbf{G}^{-1} , a przez p_{ij} odpowiednie wyrazy te samej macierzy odwrotnej, to funkcje kształtu można zapisać następująco:

$$\mathbf{N}_i(x, y, z, t) = \mathbf{g} \mathbf{r}_i \mathbf{I}_3 , \quad i = 1, \dots, 5 . \quad (5.62)$$

Tu również podkreślamy, że odpowiednie wymagane całkowania można uprościć przyjmując początek układu współrzędnych w środku ciężkości naczwo-rościanu.

5.4. Elementy trójkątne wyrażone w prędkościach

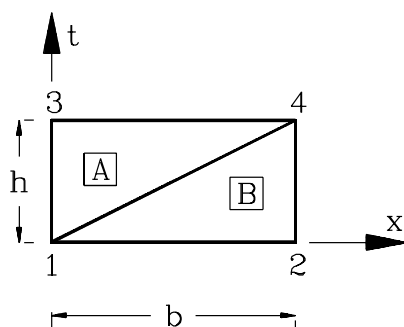
Spróbujemy skonstruować model elementu trójkątnego pręta drgającego osiowo oraz zbadać jego własności. Istotną przy tym będzie dokładność amplitudy i okresu drgań swobodnych oraz stabilność schematu obliczeniowego z wykorzystaniem takich elementów.

Znane już równanie mocy wirtualnej (4.111) zastosujemy do zbudowania równania rekurencyjnego, wykorzystującego elementy trójkątne. Weźmy na początek dwa uzupełniające się trójkąty, przedstawione na rys. 5.12. Zasada prac wirtualnych (4.112) pozwala napisać równanie:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{N}^*)^T \rho A \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial (\mathbf{N}^*)^T}{\partial x} EA \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{t_0}^t v dt \right] d\Omega = 0 . \quad (5.63)$$

\mathbf{N}^* jest macierzą wirtualnych funkcji kształtu, v jest prędkością w punkcie (x, t) , Ω obszarem trójkąta A lub B, a E , ρ i A są odpowiednio modułem Younga, gęstością masy i polem przekroju poprzecznego pręta. W elemencie A prędkość rzeczywistą opisuje formuła

$$v_A(x, y) = \mathbf{N}_A(x, t) \mathbf{v} = \left[1 - \frac{t}{h}, \frac{x}{b}, -\frac{x}{b} + \frac{t}{h} \right] \mathbf{v} , \quad (5.64)$$



Rysunek 5.12: Układ elementów trójkątnych opisanych prędkościami.

a funkcje wirtualne węzłów 3 i 4 mają postać:

$$\mathbf{N}_A^*(x, t) = \left[-\frac{x}{b} + \frac{t}{h}, \frac{x}{b} \right]. \quad (5.65)$$

Macierz bezwładności wyznacza się wówczas ze związku:

$$\mathbf{M}_A = \int_0^b \int_{\frac{hx}{b}}^h (\mathbf{N}_A)^T \rho A \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N}_A dt dx = \rho A \frac{b}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

W elemencie B rzeczywiste funkcje kształtu i wirtualna funkcja kształtu węzła 4 mają postać:

$$\mathbf{N}_B = \left[1 - \frac{x}{b}, \frac{x}{b} - \frac{t}{h}, \frac{t}{h} \right], \quad \mathbf{N}_B^* = \frac{t}{h}. \quad (5.67)$$

Macierz mas ma więc postać

$$\mathbf{M}_B = \rho A \frac{b}{6} [0, -1, 1]. \quad (5.68)$$

Macierze sztywności opisane drugim członem równania (5.63) mają postać następującą:

$$\mathbf{K}_A = \int_0^b \int_{\frac{hx}{b}}^h \frac{\partial(\mathbf{N}_A^*)^T}{\partial x} EA \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^t \mathbf{N}_A dt \right] dt dx = EA \frac{h^2}{3b} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{0}. \quad (5.69)$$

Wektor sił początkowych w elemencie A ma postać:

$$\mathbf{s} = EA \int_0^b \int_{\frac{hx}{b}}^h \frac{\partial(\mathbf{N}_A^*)^T}{\partial x} \frac{\partial u(t_0)}{\partial x} dt dx = EA \varepsilon_0 \frac{h}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Można posłużyć się przekształconą formą (5.63):

$$\frac{1}{4\Delta} (x_m t_n - x_n t_m) \sum_i x_{kj} v_i + \frac{t_{mn}}{2} \varepsilon_0 - \frac{1}{4\Delta} t_{mn} t_0 \sum_i x_{jk} v_i = 0, \quad (5.71)$$

gdzie Δ jest polem powierzchni trójkąta, $t_{mn} = t_m - t_n$, $x_{kj} = x_k - x_j$, a t_0 jest położeniem w czasie węzła o najmniejszej współrzędnej t_i , w układzie o początku w środku ciężkości trójkąta.

Zsumowane macierze układu pozwalają napisać równanie rekurencyjne w następującej postaci:

$$\left(\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c^2 h^2}{3b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{v} + \frac{h}{2b} c^2 \varepsilon_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.72)$$

Jeśli ograniczymy prawy stopień swobody, otrzymamy układ drgający o jednym stopniu swobody, opisany układem równań:

$$\begin{cases} v_{i+1} = \frac{(1-2\kappa^2)v_i + 3\varepsilon_i}{1+\kappa^2} , & \kappa = \frac{ch}{b} , \\ \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - \left(\frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v_{i+1}\right)\frac{h}{b} . \end{cases} \quad (5.73)$$

Okres drgań oscylatora modelowanego układem (5.73) (przy jednostkowych wartościach E, S, ρ, b) wynosi 3,628, wobec wartości ścisłej $2\pi/\sqrt{3} \approx 3,6276$.

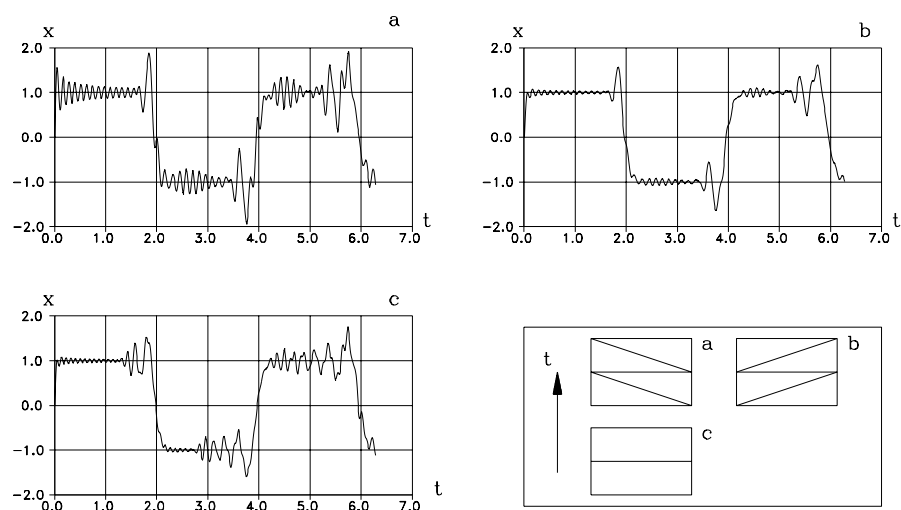
Wyprowadzone zależności sprawdzono na przykładach. Zadaniem testowym był pręt drgający osiowo, podzielony na 20 elementów przestrzennych. Przyjęto siatki typu a i b pokazane na rys. 5.13. W celu dokonania porównania zadanie rozwiązano z użyciem siatki elementów czworokątnych, przy parametrze $\alpha = 1/2$. We wszystkich przypadkach przyjęto krok czasowy $h = 0,01$. Przemieszczenia swobodnego końca pręta w czasie, jako odpowiedzi układu, również przedstawiono na rys. 5.13. Porównując wykresy można stwierdzić poprawne zachowanie się przyjętego układu. Amplitudy odpowiadające częstościom pasożytniczym są niewielkie. Różnica w tym zakresie ilustrowana na rys. 5.13a i 5.13b wynika ze sposobu wprowadzenia warunku początkowego. W przypadku a prędkość początkową $v_0 = 1$ nadano skrajnemu węzłowi, który należał do jednego tylko trójkąta. W przypadku b węzeł skrajny przy $t = 0$ łączył dwa elementy trójkątne. Ostatecznie w tym konkretnym przypadku, przy zadanym sposobie obciążenia, siatka b nieco lepiej modeluje propagację impulsów. Macierze sztywności w przypadku siatki złożonej z 2 trójkątów (jak np. na rys. 5.12) można też wyprowadzić w prostszy sposób. Należy obliczyć pracę sił wewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach, w obszarze $0 \leq x \leq b, 0 \leq t \leq h$. Przykładowo, w przypadku układu z rys. 5.13a przyrost odkształcenia w przedziale $[0, h]$, liczonego w $x = b/3$, a więc w środku ciężkości lewego trójkąta, wynosi:

$$\Delta\varepsilon = \frac{2}{3}h\frac{v_2 - v_1}{b} + \frac{1}{3}h\frac{v_4 - v_3}{b} \quad (5.74)$$

Ostatecznie otrzymujemy macierz

$$\frac{EAh^2}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (5.75)$$

Przemieszczenia na końcu przedziału $[0, h]$ wyznaczamy formułą $x_1 = x_0 + hv_0$. Odpowiedź układu nie zależy od tego, w którym miejscu obliczamy przyrost odkształcenia oraz wzdłuż jak położonego przedziału czasu o długości h dokonujemy całkowania. Przykładowe schematy wraz z odpowiednimi macierzami sztywności ujęto w tablicy 5.3. Pierwszy z przedstawio-



Rysunek 5.13: Przesunięcia w czasie swobodnego końca pręta przy siatkach trójkątnych i czworokątnej (20 elementów przestrzennych).

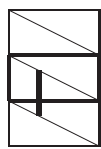
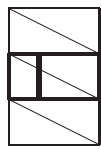
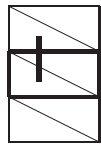
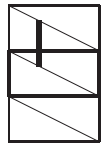
nych tam wariantów jest warunkowo stabilny. Pozostałe są bezwarunkowo stabilne ze względu na krok czasowy. Przyjmując macierze bezwładności podane w (5.66) i (5.68), zsumowane w (5.72) oraz macierz sztywności według pierwszego układu z tab. 5.3, otrzymujemy trójkątne macierze współczynników (prawa podmacierz, związana z \mathbf{v}_{i+1}).

Elementy trójkątne doskonale nadają się do zagęszczania i rozrzedzania siatki węzłów w czasie. Można też jednocześnie modyfikować krok czasowy (rys. 5.14).

5.4.1. Ruch układu mas po strunie

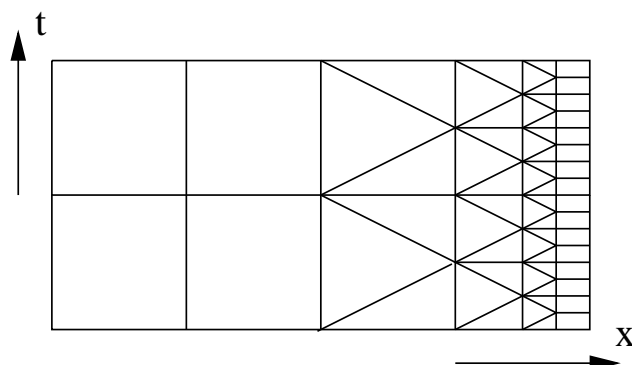
Klasyczne dyskretne metody modelowania zadań dynamicznych, polegające na całkowaniu równania różniczkowego ruchu, mają własność przekazywania informacji między węzłami siatki dyskretnej z nieskończenie dużą prędkością. Własność ta nie odbija się na wynikach, jeśli rozpatruje się zadania dotyczące drgań ustalonych lub przypadków, gdy czas obserwacji zjawiska jest długi w porównaniu z okresem drgań. Postępowanie matematyczne polega na wstępnej dyskretyzacji przestrzennej obiektu jedną ze znanych metod dyskretnych i sprowadzeniu problemu do macierzowego równania róż-

Tablica 5.3: Macierze sztywności w różnych schematach.

schemat	macierz sztywności
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[\begin{array}{cc cc} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right]$
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[\begin{array}{cc cc} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right]$
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[\begin{array}{cc cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right]$
	$\frac{EAh^2}{6b} \left[\begin{array}{cc cc} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right]$

niczowego ruchu, a następnie na zastosowaniu schematu jego całkowania. Daje to krokowy proces obliczeniowy o pełnych (zwykle pasmowych i symetrycznych) macierzach w uzyskiwanych ostatecznie układach algebraicznych równań liniowych. Ten ostatni fakt powoduje, że jakiegokolwiek zaburzenie w dowolnym punkcie przestrzennym chwili t_i wywołuje zmianę wszystkich elementów wektora rozwiązania w chwili t_{i+1} . Tak działają popularne metody: różnic centralnych, Newmarka, Wilsona itp. Próby obserwacji zjawisk falowych, w których istotne jest czoło fali i zjawiska zachodzące w tej strefie, są wówczas zwykle kłopotliwe. Fala fizyczna w procesie symulacji będzie zawsze poprzedzana przez falę zaburzeń numerycznych.

Druga trudność dotyczy odbić fal od fizycznych brzegów analizowanego numerycznie obszaru, w przypadku kiedy analiza odnosi się do obiektu fizycznego o nieskończonych brzegach. Konieczność taka pojawia się przy roz-



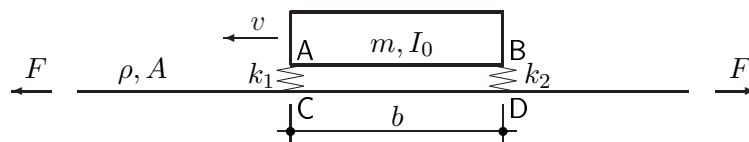
Rysunek 5.14: Przykład zagęszczania siatki w czasie i w przestrzeni przy zastosowaniu elementów trójkątnych.

patrywaniu przypadków obciążenia szybko poruszającego się po nieskończonych obszarach (tor kolejowy, półprzestrzeń sprężysta). Stosowane niekiedy w celu uniknięcia odbić lepkie tłumiki wraz z nieskończonymi elementami dają poprawne rezultaty jedynie w przypadku szczególnie prostych zadań i kiedy daje się przewidzieć kształt odbijanej fali.

W tych też szczególnych przypadkach wygodna wydaje się być metoda elementów czasoprzestrzennych. Pozwala wykorzystać własność skończonej prędkości rozprzestrzeniania się informacji między węzłami siatki dyskretnej. Trzeba zaznaczyć, że odnosi się to do jednego uprzywilejowanego kierunku. W kierunku przeciwnym prędkość pozostaje nieskończona (rys. 3.11a). Stosując odpowiedni kształt siatki czasoprzestrzennej można uzyskać jednakową ograniczoną prędkość w obu kierunkach (rys. 3.11b).

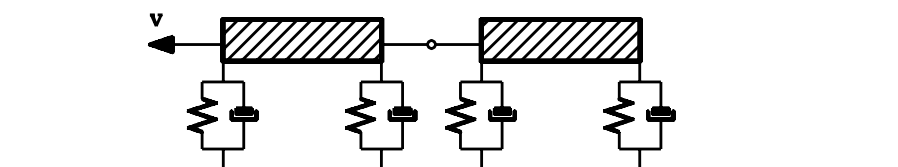
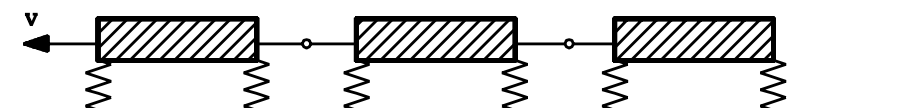
Powyższa cecha daje się wykorzystać przy badaniu problemu stateczności ruchu układu pantografowego poruszającego się z dużą prędkością wzdłuż struny. Poprzez sprzężenie masowe amplitudy drgań w pewnych zakresach prędkości mogą rosnąć nieskończenie.

Stateczność ruchu względnego układu mas sprężyste opartych na podłożu i układu ciągłego stanowiącego to podłoże poruszano w wielu pracach. Rozpatrywano je zwykle w sposób analityczny [36, 39]. W takim przypadku uwzględnienie dodatkowych parametrów jak np. tłumienie albo przyjęcie dowolnych wartości mas i sztywności staje się kłopotliwe. Pokazane poniżej rozwiązanie numeryczne, aczkolwiek nie pozwala uzyskać rozwiązań zamknię-



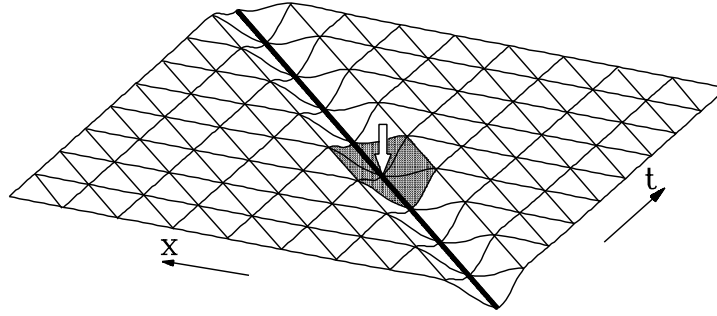
Rysunek 5.15: Schemat zadania.

tych, ułatwia analizę nawet skomplikowanych układów dyskretnych, poruszających się po ośrodku ciągłym. Szczegółowo omówiony zostanie układ pokazany na rys. 5.15. Identyfikować można przypadki bardziej złożone, jak np. pokazane na rys. 5.16. Jeśli wykorzystamy się elementy trójkątne



Rysunek 5.16: Układy złożone o wielu punktach kontaktu.

i przyjmie ukośne ich boki zgodnie z kierunkiem ruchu obciążenia, to obszar wpływu zaburzeń wywoływanych przez to obciążenie da się ograniczyć do strefy położonej w bezpośrednim sąsiedztwie punktu przyłożenia siły (rys. 5.17). Wyseparowanie odpowiedniego podukładu elementów pozwala na powiązanie układu odniesienia z poruszającym się obciążeniem. W ten sposób doprowadzić można łatwo do zadania stacjonarnego, o ile w układzie fizycznym stacjonarność zachodzi.



Rysunek 5.17: Poruszająca się siła i ograniczone zaangażowanie węzłów siatki w rozwiązaniu.

Sformułowanie równowagi układu

Rozpatrujemy równanie ruchu struny

$$F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x \in \Omega = [0, l], \quad t \in [0, \infty). \quad (5.76)$$

Masa m o bezwładności obrotowej I_0 , z dwoma stopniami swobody q^C i q^D , porusza się po strunie z prędkością v . Jej ruch względem punktów kontaktu C i D z podłożem opisuje równanie

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^A \\ q^B \\ q^C \\ q^D \end{Bmatrix} + \frac{m}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}^A \\ \ddot{q}^B \\ \ddot{q}^C \\ \ddot{q}^D \end{Bmatrix} + \frac{I_0}{b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}^A \\ \ddot{q}^B \\ \ddot{q}^C \\ \ddot{q}^D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.77)$$

lub w skrócie

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.78)$$

Warunki kontaktu w punktach C i D mają postać następującą:

$$u(l - vt, t) = q^C(t), \quad u(l - vt + b, t) = q^D(t) \quad (5.79)$$

Wariacja funkcji przemieszczeń struny oznaczona jest przez $\delta \hat{u}(x, t)$ a wariacja przemieszczeń dyskretnego układu masowego przez $\delta \hat{\mathbf{q}}$. Równanie prac

wirtualnych ma wobec tego postać:

$$\int_{\Omega} \delta \hat{u} \left(F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) d\Omega + \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \ddot{\mathbf{q}}) = 0 . \quad (5.80)$$

Równanie (5.80) jest całkowane w przedziale czasowym $[t_a, t_p]$:

$$\int_{t_a}^{t_p} \int_{\Omega} \delta \hat{u} \left(F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) d\Omega dt + \int_{t_a}^{t_p} \delta \hat{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \ddot{\mathbf{q}}) dt = 0 . \quad (5.81)$$

W ten sposób otrzymujemy bilans pracy wirtualnej w przedziale czasu (czasopracę). Równanie (5.81) jest całkowane przez części względem x i t . Przemieszczenia \hat{u} i $\hat{\mathbf{q}}$ na krańcach przedziału $t_a \leq t \leq t_p$ przyjmowane są jako znane [10]. Wobec tego

$$\delta \hat{u}(x, t_a) = 0, \quad \delta \hat{u}(x, t_p) = 0 \quad (5.82)$$

i

$$\delta \hat{\mathbf{q}}(t_a) = 0, \quad \delta \hat{\mathbf{q}}(t_p) = 0 . \quad (5.83)$$

Macierze czasoprzestrzenne poruszającej się masy

Funkcja interpolująca przemieszczenia wirtualne modyfikowana jest przez dodanie wyrazu trzeciego stopnia [98]

$$\hat{N}_i^t = \frac{1}{2} (1 + \tau \tau_i) + \alpha \tau_i (\tau^3 - \tau) , \quad (5.84)$$

gdzie α jest parametrem, który wpływa na własności rozwiązania numerycznego. Przy $\alpha \geq 1,25$ otrzymujemy macierze dające bezwarunkowo stabilny schemat całkowania równania ruchu. Wówczas można wyznaczyć macierze sztywności i bezwładności

$$\mathcal{K}^M = \begin{bmatrix} \left(\frac{h}{3} - \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} & \left(\frac{h}{6} + \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} \\ \left(\frac{h}{6} + \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} & \left(\frac{h}{3} - \alpha \frac{h}{15} \right) \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

$$\mathcal{M}^M = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

$$\mathcal{R}^M = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R} \\ -\mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} . \quad (5.87)$$

Ostatecznie zsumowanie $\mathbf{K}^{S*} = \mathcal{K}^M + \mathcal{M}^M + \mathcal{R}^M$ daje w wyniku czasoprzestrzenną macierz sztywności masy.

Czasoprzestrzenna dyskretyzacja struny

Stosujemy liniową interpolację przemieszczeń u w obszarze elementu trójkątnego:

$$u(x, t) = ax + bt + c = \sum_{i=1}^3 N_i u(x_i, t_i) . \quad (5.88)$$

Możemy zapisać elementy macierzy współczynników w sposób jawny [24]:

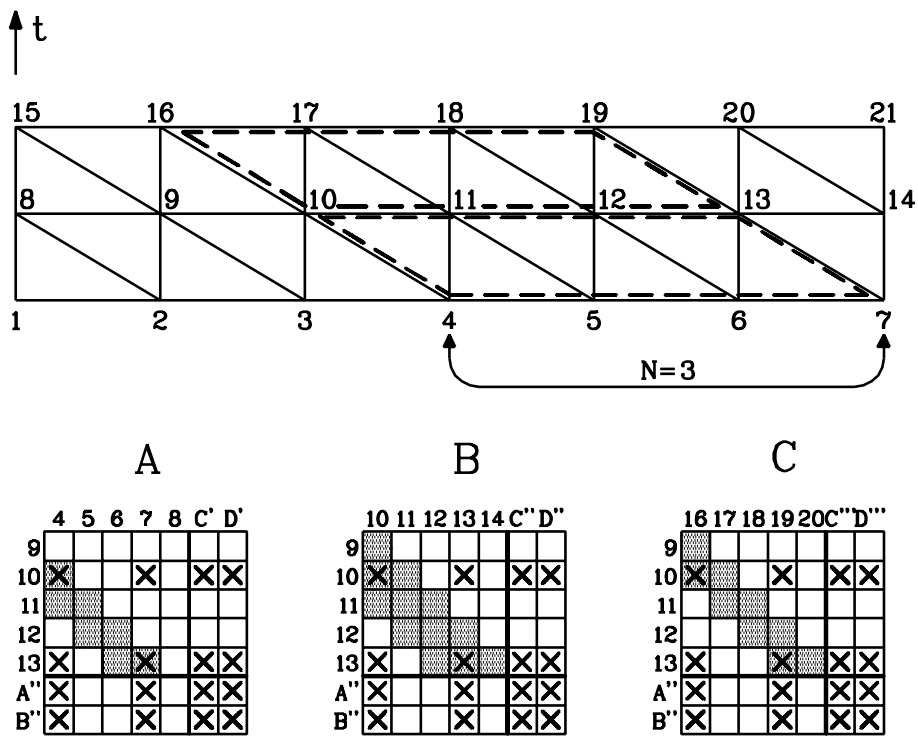
$$\mathcal{K}_{ij}^S = \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} F \frac{\partial N_j}{\partial x} dV . \quad (5.89)$$

$$\mathcal{M}_{ij}^S = - \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} \rho A \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \quad (5.90)$$

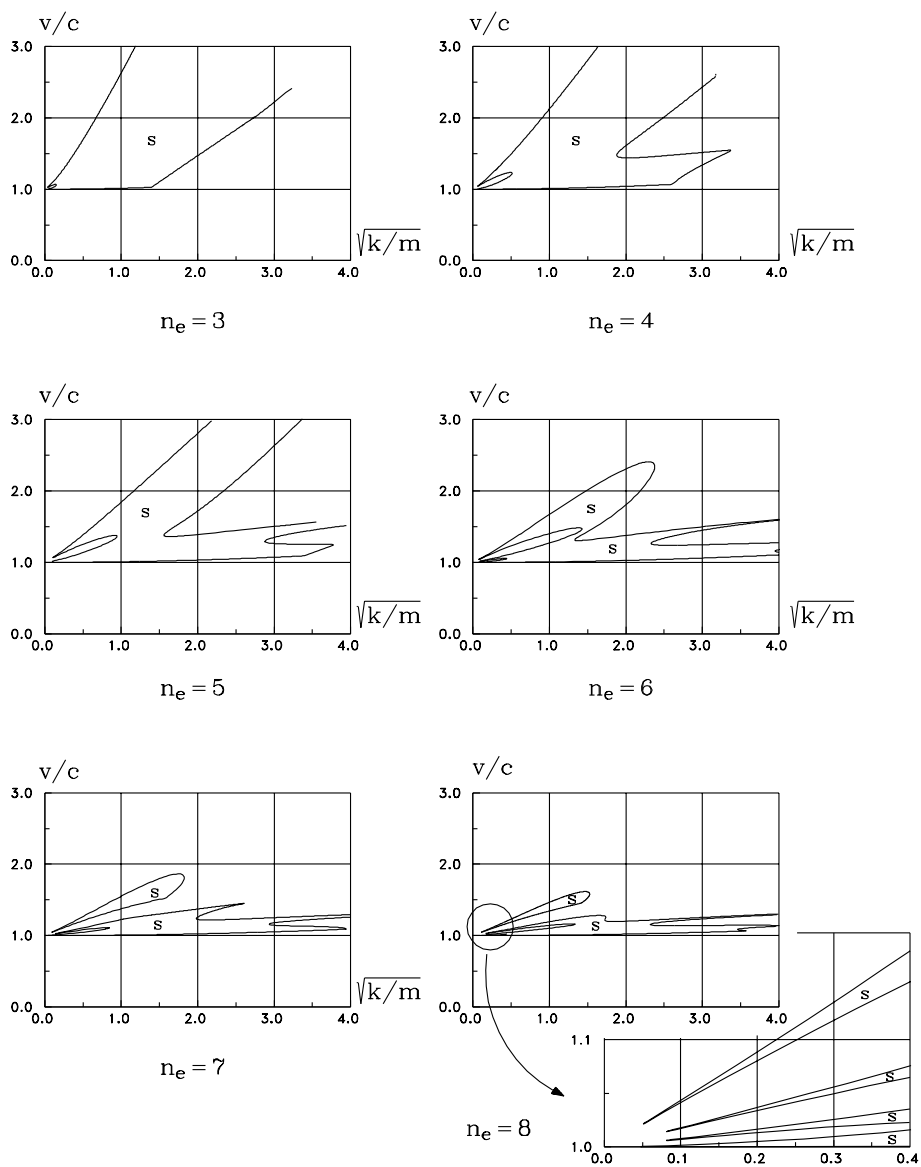
lub wyznaczyć je w sposób jawny, całkując w obszarze trójkątnym V . Ostateczna macierz współczynników otrzymywana jest przez proste dodanie $\mathbf{K}^{S*} = \mathcal{K}^S + \mathcal{M}^S$.

Separacja podukładu elementów czasoprzestrzennych

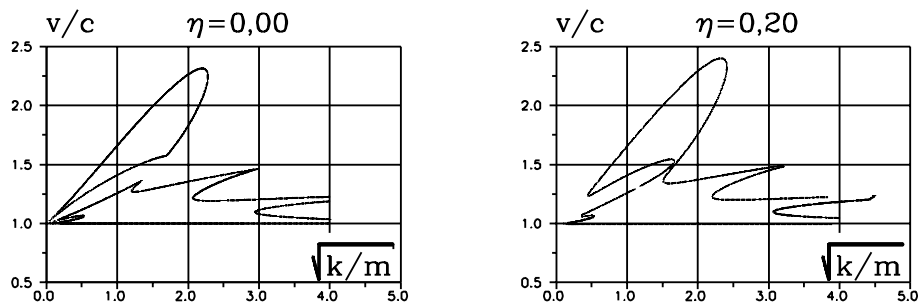
W rozdziale 5.1 pokazano, że własnością trójkątnej siatki elementów czasoprzestrzennych jest ograniczenie prędkości przekazywania informacji między węzłami siatki. Prędkość ta jest równa stosunkowi długości elementu czasoprzestrzennego do wielkości kroku czasowego. Stąd też jakiegokolwiek zaburzenie fizyczne może się rozprzestrzeniać w kierunku ukośnych boków trójkątów także z prędkością ograniczoną. Fakt ten posłuży do wydzielenia z nieograniczenie wielkiej siatki jedynie podukładu węzłów wraz z wpisanymi węź elementami, do których ogranicza się zasięg zaburzenia (rys. 5.18). Przy następujących danych: $m = 1$, $I_0 = 0,001$, $E = 1$, $A = 1$, $\rho = 1$, oraz przy przy zwiększającej się liczbie elementów w obrębie punktów kontaktu uzyskano obszary stabilności pokazane na rys. 5.19. Wprowadzenie tłumienia nieznacznie tylko zmienia obraz (rys. 5.20).



Rysunek 5.18: Podukład elementów czasoprzestrzennych z współdziałającym układem



Rysunek 5.19: Obszary stabilności przy zwiększającej się liczbie elementów w obrębie punktów kontaktu.



Rysunek 5.20: Obszary stabilności przy 6 elementach między punktami kontaktu — przypadek bez tłumienia oraz z tłumieniem 0,2.

5.5. Adaptacja siatki podziału

Zanim przejdziemy do opisu metod pozwalających na skuteczną adaptację przestrzennej siatki podziału (dyskretyzacji), spróbujemy zastanowić się, jakie czynniki skłaniają do ponoszenia tego dodatkowego trudu obliczeniowego. Zadania dynamiki wskutek dyskretyzacji procesu w czasie stają się w istocie ciągiem wielu następujących po sobie zadań statyki. Wybór najkorzystniejszych parametrów obliczeń początkowej fazy procesu staje się nieaktualny na dalszym etapie obliczeń. Takie czynniki jak np. przemieszczające się obciążenie, rozwój stref plastycznych, przemieszczające się strefy kontaktu nakładają konieczność aktualizowania tych parametrów.

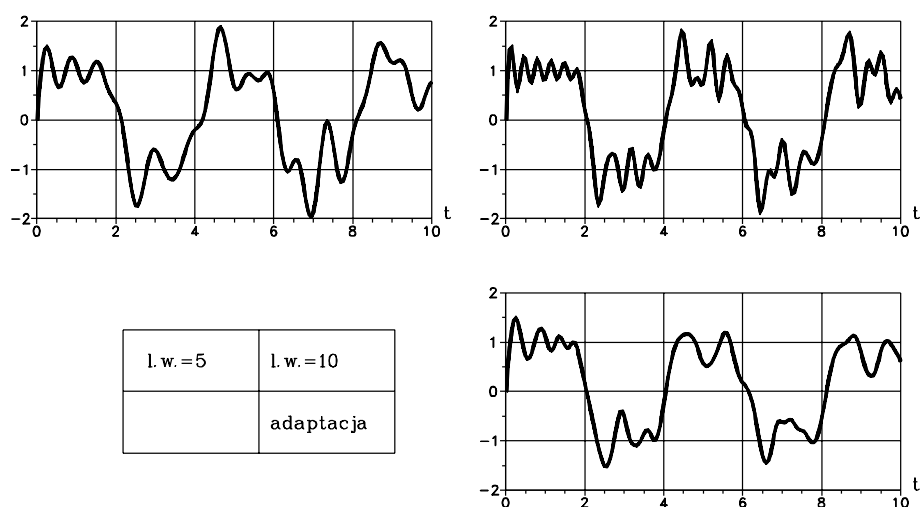
Można napotkać wiele prac na temat adaptacji siatki dyskretyzacji przestrzennej. Głównym celem, jaki stawiają sobie badacze, jest zmniejszenie błędu dyskretyzacji poprzez odpowiedni dobór wymiarów siatki w pewnych strefach. Pierwsza grupa prac to teoretyczne oszacowania błędu dyskretyzacji w odniesieniu do znanego rozwiązania ścisłego [9, 54]. W praktyce, gdy rozwiązanie ścisłe nie jest znane, oszacowania trzeba dokonać na podstawie znanego charakteru rozwiązania danego równania różniczkowego. Dokonuje się tego znając jedynie rozwiązanie przybliżone [160, 184, 185, 186, 188, 189]. Można poprawić siatkę i ponownie przeanalizować rozwiązanie. W przypadku zadań statyki konstrukcji technika taka jest skuteczna, gdyż dodatkowy nakład pracy nie jest duży. Nieco inaczej ma się sytuacja w przypadku zadań typu parabolicznego (transport ciepła itp.), z pierwszą pochodną względem czasu [2, 3, 45, 46, 74, 125]. Są to zadania przedstawiające ewolucję procesu w czasie. Jeśli na danym etapie obliczeń zachodzi konieczność zmiany siatki, należy przenieść do nowej już bazy wszystkie zmienne zadania. Jest to możliwe, ponieważ ze względu na własności tej grupy problemów, a konkretnie ze względu na dużą relaksację rozwiązania, wszelkie zaburzenia wprowadzane zmianą siatki przenoszą się do następnych kroków z malejącą amplitudą. Tu można wymienić prace na temat tzw. ruchomych elementów skończonych [11, 33, 91, 181]. W tej grupie zadań zwykle stosowane są metody różnicowe. W pracy [142] czasowy krok obliczeniowy składa się z dwóch kroków obliczeniowych: przesunięcia Lagrange'a (wymagającego rozwiązania sztywnego równania różniczkowego), a następnie etapu redystrybucji siatki. Węzły nie zawsze przesuwać się do rejonów o dużych gradientach rozwiązania i druga faza obliczeń ma za zadanie usunąć ten mankament. Praca [59] proponuje wygładzanie ruchu węzłów zarówno w kierunku x jak i t . Pierwsze zapobiega zbieganiu się lub zbyt niemu oddalaniu węzłów. Drugie zapobiega zbyt szybkiej odpowiedzi punktów na gradienty bieżącego rozwiązania, gdyż geometria węzłów dana jest w sposób niejawni.

W często cytowanych pracach [128, 129] stosowana jest metoda elementów skończonych, a ruch węzłów regularyzowany jest funkcją kary.

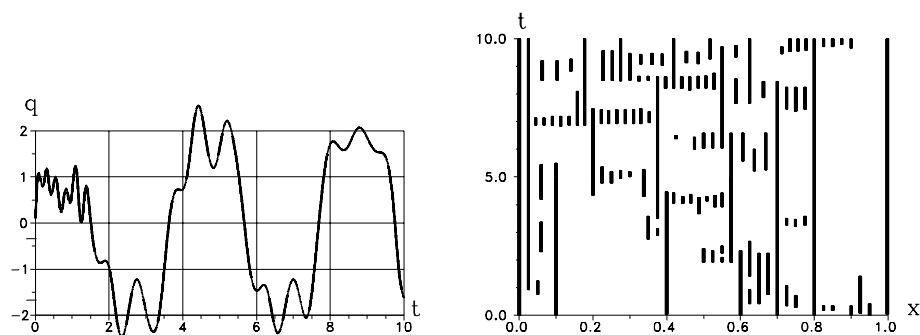
Najtrudniej jest w przypadku zadań hiperbolicznych drugiego rzędu (drżania konstrukcji). Próby nieciągłej zmiany siatki podjęto w pracach [86, 89]. Nie uzyskano jednak skutecznych sposobów rozwiązywania praktycznych zadań. Jeszcze inną grupę stanowią prace [94, 172, 182, 183]. Wykorzystano w nich oszacowania błędu a -posteriori, opracowane w zadaniach statyki.

W zagadnieniach drgań konstrukcji zaburzenia propagują się ze stałą amplitudą. Jakakolwiek zmiana parametrów zadania (np. liczby elementów skończonych, ich wielkości, rozmieszczenia węzłów) powoduje, że mamy do czynienia już ze zmienionym zadaniem fizycznym. Zwykła zmiana siatki jest w istocie przejściem w sposób nieciągły od jednego zadania do drugiego. Przeniesienie do nowego zadania przemieszczeń, prędkości czy przyspieszeń z zadania poprzedniego wprowadza uderzenie we wszystkich węzłach, którym przypisano zmodyfikowane (np. wyinterpolowane) wartości funkcji zadania poprzedniego. W praktyce dalsze rozwiązanie zaczyna odbiegać nie tylko wartościami liczbowymi ale również jakościowo różni się od oczekiwanego. Gdy procesy wolnozmiennie znacząco dominują nad procesami falowymi, opisana sytuacja występuje w nieco mniejszym zakresie i w krótkim czasie obserwacji może nie zostać dostrzeżona (co nie znaczy, że taka metodologia adaptacji jest poprawna). Mimo to w niektórych pracach dotyczących zastosowań h -adaptacji w dynamice można taką technikę napotkać (np. [172, 182, 183]). rys. 5.21 pokazuje drżania pręta zamocowanego w lewym końcu, przy podziale na 5 i 10 elementów przestrzennych, oraz z h -adaptacją, polegającą na cyklicznej zamianie siatek 5 i 10 węzłowej. Zamian dokonywano co 20 kroków ($e = 1$, $\rho = 1$, $L = 1$, $\Delta t = 0,05$). Wymuszenie drgań następowało przez nadanie prędkości początkowej skrajnemu swobodnemu węzłowi. Obliczeń dokonano całkując równanie różniczkowe metodą trapezów. Interpolowano wykorzystywane w procedurze wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Jak widać z rysunku, wynikowy wykres przemieszczeń wygląda raczej poprawnie. Tłumienie, sztuczne (numeryczne) lub fizyczne, wygładza nieco wykres i usuwa drżania pasożytnicze we wszystkich trzech przypadkach. Pewne zastrzeżenia można mieć do zmniejszenia się przemieszczeń. Ścisła wartość powinna wynosić ± 1 . W przypadku adaptacji dostrzec można stopniowe odchodzenie od tych wartości.

Jednak już modyfikacja siatki prowadzona w nieco mniej regularny sposób daje wynik odbiegający znacznie od oczekiwanego (rys. 5.22). W takim przypadku cała idea adaptacyjnej poprawy dokładności rozwiązania staje się



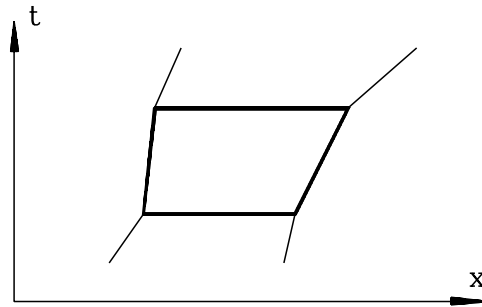
Rysunek 5.21: Drgania swobodne pręta modelowanego siatką 5 i 10 węzłową, oraz przy adaptacji (przemieszczenia w czasie swobodnego końca).



Rysunek 5.22: Rozbieżność drgań swobodnych pręta przy zastosowaniu interpolacji w h -adaptacji: przemieszczenia oraz lokalizacja węzłów siatki.

chybiona. Musi więc być zastosowana inna technika niż wzmiankowane dotąd w literaturze.

W zadaniach hiperbolicznych pierwszego rzędu udaje się sprowadzić problem do zadania eliptycznego drugiego rzędu [8, 141]. Warstwę czasoprzestrzenną dyskretyzuje się wówczas w dowolny sposób a następnie rozwiązuje zadanie jak zadanie statyczne. Niestety, techniki tej, ze względu na warunki brzegowe, nie da się zastosować do równania drugiego rzędu.



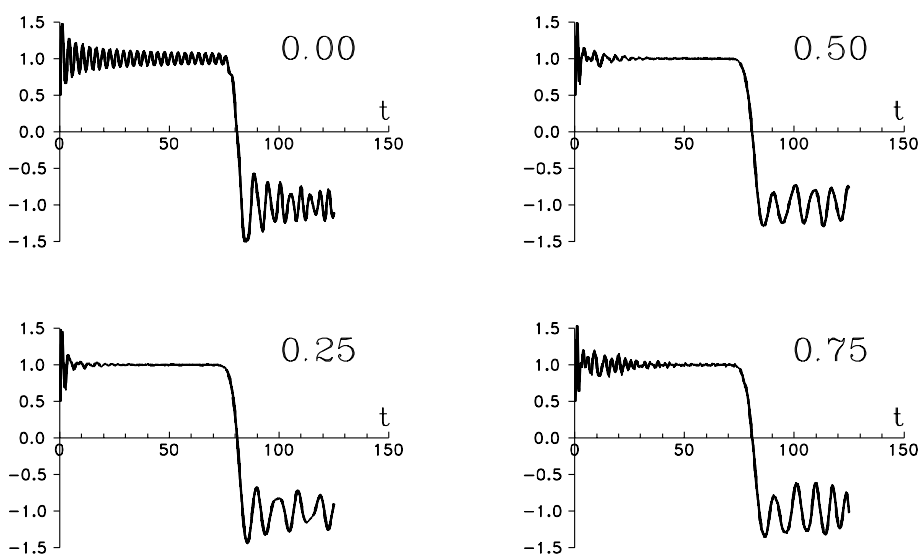
Rysunek 5.23: Przykład modyfikacji siatki konstrukcji jednowymiarowej.

Własności ciągłej w czasie aproksymacji dają kolejne, nowe możliwości podejścia do problemu. Uzyskano pewne obiecujące rozwiązania drgań podłużnych pręta z ograniczoną adaptacją siatki w czasie (r -adaptacja). Oszacowano parametry ograniczające prędkość adaptacji. Pokazano przykłady zastosowania w obliczeniach zadania kontaktowego. Podjęto też próbę nieciągłego przejścia do nowej siatki podziału przez dobór warunków początkowych etapu po modyfikacji.

5.5.1. Adaptacja typu r

Zaletą metody elementów czasoprzestrzennych jest możliwość modyfikacji siatki podziału przestrzennego w trakcie procesu (stosowanie niestacjonarnego podziału konstrukcji). Dokonuje się tego bądź w celu dostosowania kształtu siatki i położenia węzłów do potrzeb modelowania zadania bądź w celu minimalizacji błędu aproksymacji. Jak wspomniano już we wstępie do rozdziału, zmiana siatki w trakcie całkowania równania różniczkowego w czasie jest trudna. Powstają bowiem i propagują się zaburzenia wywołane właśnie zmianą siatki. Zaburzenia te nie mogą przesłaniać uzyskiwanych korzyści. Spróbujmy zbadać prostą modyfikację siatki jednowymiarowej w przestrzeni rzeczywistej (jak np. na rys. 5.23). Funkcje interpolujące \mathbf{N} (4.1) czy (4.12) opisane są teraz nie na prostokącie $\{x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$, a na czworokącie. Dalsza część postępowania jest podobna jak w najprostszych zadaniach o regularnej siatce. Kompletuje się czasoprzestrzenne macierze struktury i rozwiązuje krokowo układy równań, znajdując przemieszczenia w kolejnych chwilach. Węzły przesuwają się zależnie od potrzeb, zagęszczając lub rozrzedzając lokalnie siatkę. Uwidacznia to następujący przykład. Pręt

drgający osiowo, z zamocowanym lewym końcem, podzielono na 40 elementów przestrzennych. Prawy, swobodny koniec obciążono siłą stałą. Z uwagi na oszacowanie błędu umożliwiono zmiany położenia węzłów z maksymalną prędkością tej zmiany wynoszącą 0,25, 0,50 i 0,75 b_{sr}/h (średnia długość elementu przestrzennego b_{sr} do kroku czasowego h). Obserwowano przemieszczenia w czasie obciążonego końca pręta (rys. 5.24). Ścisłym rozwiązaniem jest prostoliniowy kształt prostokątny. W pokazanym przykładzie adaptacja



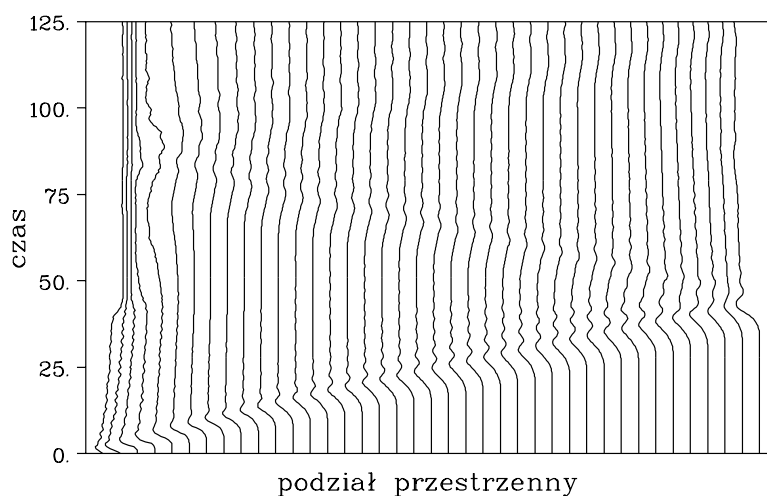
Rysunek 5.24: Przemieszczenia końca pręta przy współczynniku adaptacji: 0,0, 0,25, 0,50 i 0,75.

siatki usuwa wyższe częstotliwości drgań, powstałe w wyniku odbić fali od węzłów siatki.

Obserwację położenia węzłów siatki ukazuje rys. 5.25. Można zauważyć, że węzły najpierw przemieszczają się w kierunku czoła fali, a następnie, po jego przejściu, podążają za nim.

5.5.2. Nieciągła w czasie adaptacja siatki typu h

Proste sposoby zmiany siatki w zadaniu dynamiki konstrukcji nie dają pozytywnych rezultatów. Podkreśliliśmy tam też, że jakakolwiek zmiana siatki podziału w trakcie prowadzenia procesu czasowego jest przejściem do rozwiązania innego już zadania. Zmiana liczby węzłów lub ich rozmieszczenia wprowadza w istocie zmianę ogólnej sztywności układu, a to w konsekwencji zmianę całej odpowiedzi układu. Wobec tego zmiana układu dyskretnego

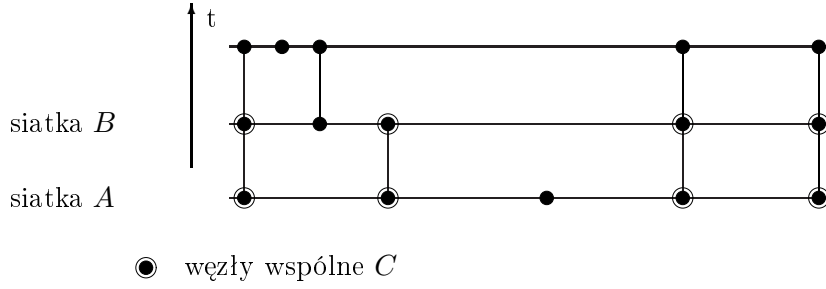


Rysunek 5.25: Przemieszczenia węzłów w czasie będące wynikiem adaptacji.

winna się wiązać z dopasowaniem wszystkich pozostałych poza geometrią parametrów: stałych materiałowych i wektorów przemieszczeń i prędkości, jako warunków początkowych nowego zadania. W dalszych rozważaniach dopuścimy zmianę warunków początkowych ruchu zadania po adaptacji.

Idea adaptacji polega na wyznaczeniu warunków początkowych nowego zadania (po adaptacji) tak, aby wyniki prowadzonych (kontynuowanych) obliczeń różniły się w możliwie najmniejszym stopniu od wyników obliczeń prowadzonych przy siatce pierwotnej. Sprawą otwartą pozostaje, co rozumie się pod pojęciem wyników obliczeń. Mogą to być przemieszczenia węzłów, ich prędkości, odkształcenia itd. W dalszej części za miarodajne przyjmiemy: (a) przemieszczenia węzłów, (b) odkształcenia. Okazuje się, że dopiero kombinacja liniowa obydwu tych przypadków daje pożądane rezultaty.

Zmiana siatki węzłów następuje przez dodanie lub usunięcie pewnej liczby węzłów, przy czym co najwyżej co drugi węzeł może zostać usunięty i co najwyżej jeden węzeł może być wprowadzony między dwa kolejne. Takie postępowanie zapewnia pozostawienie przynajmniej połowy węzłów wspólnych, oznaczonych przez C , w siatce pierwotnej A i zmodyfikowanej B (rys. 5.26).



Rysunek 5.26: Modyfikacja siatki: h -adaptacja.

Przejście przemieszczeniowe

Wektor przemieszczeń węzłów siatki pierwotnej A w chwili i oznacza się przez \mathbf{q}_i a siatki zmodyfikowanej B przez $\hat{\mathbf{q}}_i$. Aby wybrać z tych wektorów elementy opisujące przemieszczenia węzłów wspólnych C wektory te mnoży się przez zero-jedynkowe macierze przyporządkowania Π i $\hat{\Pi}$. Błąd przejścia do nowej siatki określa się jako różnicę przemieszczeń

$$\mathbf{R}_i = \Pi \mathbf{q}_i - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{q}}_i . \quad (5.91)$$

Miarę błędu w sensie najmniejszych kwadratów na przestrzeni n warstw czasowych określa wyrażenie

$$I_1 = \sum_{i=0}^n \mathbf{R}_{i+1}^T \mathbf{R}_{i+1} = \sum_{i=0}^n \left(\Pi \mathbf{q}_{i+1} - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{q}}_{i+1} \right)^T \left(\Pi \mathbf{q}_{i+1} - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{q}}_{i+1} \right) . \quad (5.92)$$

Proces rekurencyjny rozwiązania w kolejnych chwilach czasowych, prowadzony w bazie węzłów A , opisuje związek

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{A} \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{B} \mathbf{q}_i , \quad (5.93)$$

a w bazie węzłów B związek

$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{q}}_{i-1} + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{q}}_i . \quad (5.94)$$

Rekurencyjne związki (5.93) i (5.94) można zredukować do formuł, w których przemieszczenia w chwili $i + 1$ zależą od przemieszczeń w chwilach 1 i 2:

$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1} = \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 + \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 , \quad (5.95)$$

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 . \quad (5.96)$$

Macierze $\hat{\mathbf{P}}_i$ i $\hat{\mathbf{Q}}_i$ otrzymuje się według schematu:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{A}, & \hat{\mathbf{P}}_0 &= \mathbf{I}, \\ \hat{\mathbf{Q}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{P}}_i + \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{B}, & \hat{\mathbf{Q}}_0 &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (5.97)$$

Analogicznie tworzy się \mathbf{P}_i i \mathbf{Q}_i .

Podstawienie n razy (5.95) i (5.96) do (5.92) daje w efekcie wyrażenie

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{i=0}^n \left(\Pi \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \Pi \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right)^T \\ &\quad \cdot \left(\Pi \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \Pi \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right).\end{aligned}\quad (5.98)$$

Minimalną wartość I_1 uzyskuje się przy spełnieniu warunków:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \hat{\mathbf{q}}_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial I_1}{\partial \hat{\mathbf{q}}_2} = 0.\quad (5.99)$$

Prowadzi to do układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 = \\ \quad \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\Pi}^T \Pi (\mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2) \\ \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\Pi}^T \hat{\Pi} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 = \\ \quad \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\Pi}^T \Pi (\mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2) \end{array} \right. \quad (5.100)$$

Przejście odkształceniowe

Błąd wynikający ze zmiany siatki można opisać odkształceniami w poszczególnych podobszarach j siatki C

$$e_j = \varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j.\quad (5.101)$$

Odształcenia ε_j i $\hat{\varepsilon}_j$ wyznacza się poprzez działanie operatora różniczkowego $\hat{\mathbf{B}}_j$ na odpowiednie przemieszczenia

$$\varepsilon_j = \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{q}_i, \quad \hat{\varepsilon}_j = \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{q}}_i.\quad (5.102)$$

Trzeba tu zwrócić uwagę, że w obszarze jednego elementu siatki A mogą znajdować się 2 elementy siatki B lub odwrotnie. Miarą błędu jest wówczas funkcjonal

$$I_2 = \sum_{i=0}^n \sum_j \int_{V_j} (\varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j)^T D (\varepsilon_j - \hat{\varepsilon}_j) dV_j.\quad (5.103)$$

Podstawienie (5.102) do (5.103) oraz uwzględnienie schematów przejścia (5.95) i (5.96) daje w wyniku

$$I_2 = \sum_{i=0}^n \sum_j \int_{V_j} \left(\mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right)^T \left(\mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{P}_i \mathbf{q}_1 + \mathbf{B}_j \Pi_j \mathbf{Q}_i \mathbf{q}_2 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\mathbf{B}}_j \hat{\Pi}_j \hat{\mathbf{Q}}_i \hat{\mathbf{q}}_2 \right) dV_j \quad (5.104)$$

Warunki minimum I_2

$$\frac{\partial I_2}{\partial \hat{\mathbf{q}}_1} = 0 \quad i \quad \frac{\partial I_2}{\partial \hat{\mathbf{q}}_2} = 0 \quad (5.105)$$

prowadzą do układu równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{P}}_i^T \hat{\mathbf{F}}_{i+1} \\ \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{Q}}_i^T \hat{\mathbf{F}}_{i+1} \end{cases}, \quad (5.106)$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{K}} = \sum_j \hat{\Pi}_j^T \int_{V_j} \hat{\mathbf{B}}_j^T D \hat{\mathbf{B}}_j dV_j \hat{\Pi}_j, \quad (5.107)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+1} = \sum_j \hat{\Pi}_j^T \int_{V_j} \hat{\mathbf{B}}_j^T D \varepsilon_j^{i+1} dV_j. \quad (5.108)$$

$\hat{\mathbf{K}}$ jest macierzą sztywności układu B .

Przykład 5

Jako zadanie modelowe przyjęto osiowo drgający pręt podzielony na 20 elementów przestrzennych. Warunki początkowe stanowią: $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_2 = \{1, 0, \dots, 0\}^T$. Miarę błędu stanowi kombinacja I_1 (5.92) i I_2 (5.103)

$$I = (1 - a)I_1 + aI_2, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (5.109)$$

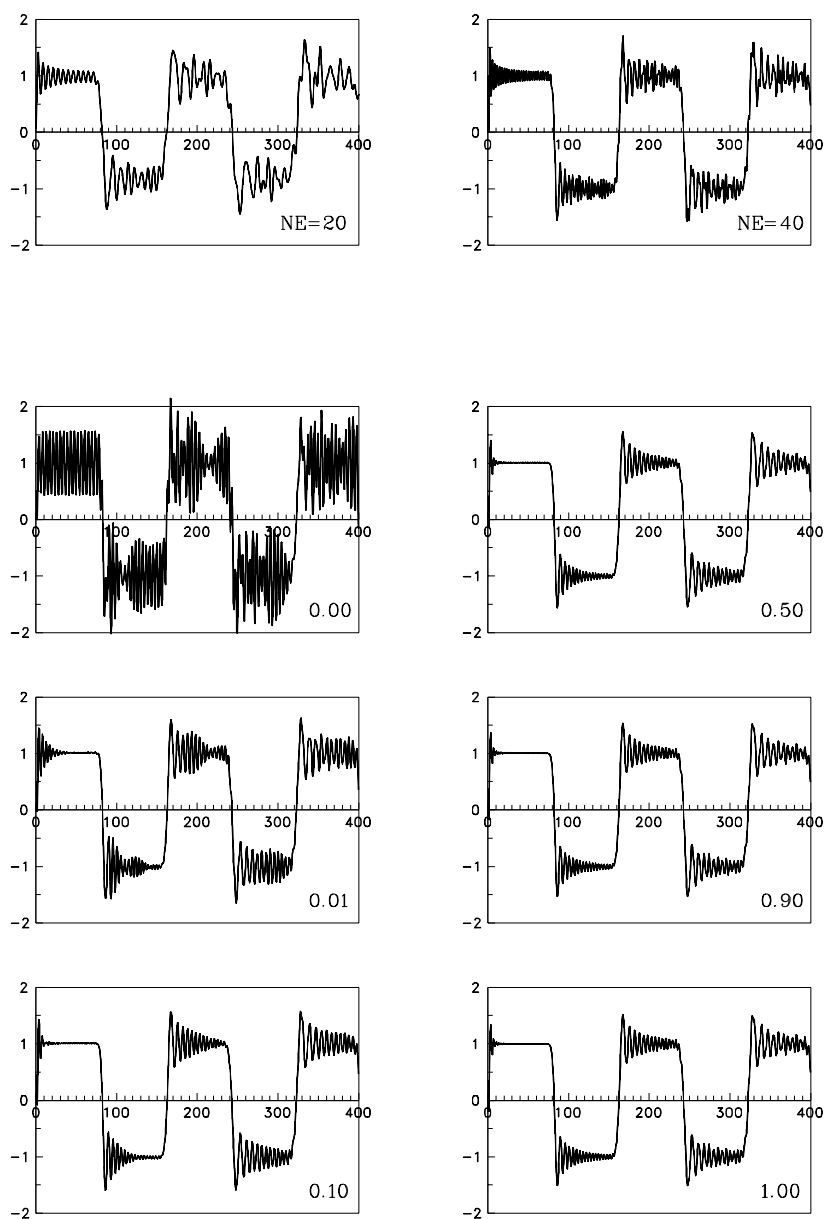
Rys. 5.27 pokazuje przemieszczenie w czasie swobodnego końca pręta. Pierwszy z wykresów dotyczy zadania pierwotnego, do którego należy dopasować zachowanie zmodyfikowanego układu. Następne wykresy otrzymano po dwukrotnym zagęszczeniu podziału, przy różnych wartościach parametru a . Przypadek $a = 0,0$ wytwarza pasożytnicze drgania o dużej częstotliwości. Przyczynę tego można odgadnąć z rys. 5.28, na którym pokazano wyliczone wektory przemieszczeń początkowych \mathbf{q}_2 przy wybranych wartości a . Przy

$a = 0, 0$ wynikowy wektor mocno odbiega od kształtu zadanego przemieszczenia w układzie pierwotnym. Z pozostałych wykresów widać, że nawet niewielki udział członu I_2 (a więc uwzględnienie odkształceń) skutecznie stabilizuje rozwiązanie.

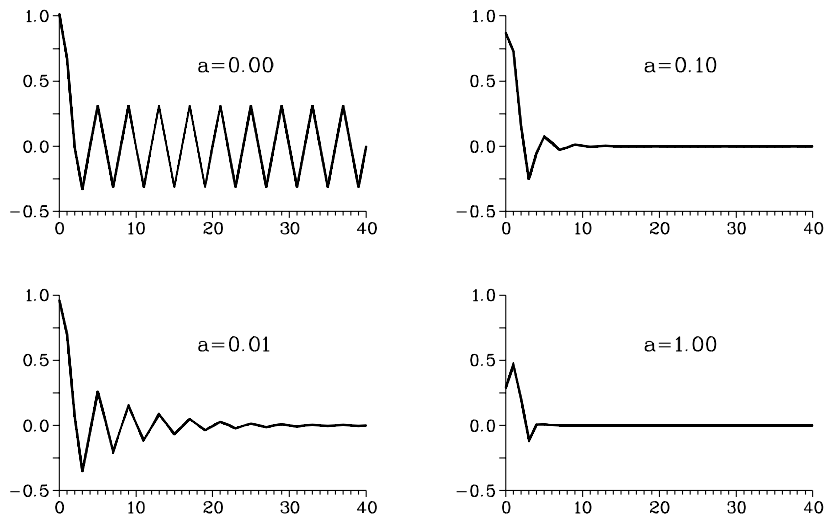
Adaptacja siatki przestrzennej jest przydatna lub wręcz konieczna w wielu przypadkach problemów technicznych. Oprócz zadań pokazanych na rys. 4.2 są to zadania kształtowania materiałów w procesie kucia lub tłoczenia. Stosowanie siatek niestacjonarnych jest stosunkowo łatwe, jeśli liczba węzłów w siatce przestrzennej w kolejnych chwilach nie ulega zmianie (np. rozdz. 4.3). Mamy do czynienia z r -adaptacją. Trudności pojawiają się w przypadku wprowadzania lokalnego zagęszczenia węzłów przez dodanie nowych, czyli h -adaptacji. W zadaniach opisujących np. transport ciepła można stosunkowo łatwo zmieniać siatkę, gdyż wprowadzanie w tym przypadku zaburzenie propaguje się z malejącą amplitudą. W zadaniach dynamiki konstrukcji zmiana zagęszczenia siatki podziału zmienia własności zadania. Przykładowo drgania pręta opisanego gęstą i rzadką siatką węzłów mają różne częstotliwości. Jest to wynikiem błędów fazowych. Z fizycznego punktu widzenia oba zadania obrazują nieco inne zadania, różniące się sztywnością lub masą. W związku z tym zmiana siatki podziału przestrzennego zadania jest niczym innym jak zmianą sztywności lub gęstości materiału badanego obiektu. Zmieniając siatkę wprowadzamy impulsy sił. Dokonując zmian w odpowiednio dobrany sposób można drgania wytlumić bądź wzbudzić. Biorąc to pod uwagę, trudność z realizacją algorytmów h -adaptacji jest znaczna.

5.5.3. Ciągła w czasie h -adaptacja w opisie prędkościowym

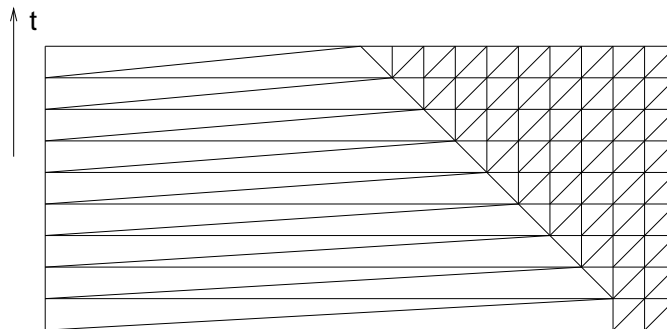
Poniżej omówimy metodę zagęszczania siatki z wykorzystaniem trójkątnych elementów czasoprzestrzennych (rys. 5.29) [1]. Elementarnym przypadkiem będzie wstawienie węzła między dwa istniejące, jak na rys. 5.30. Przechodzimy z siatki o dwóch węzłach do siatki o trzech węzłach. w układzie równań algebraicznych opisujących warstwę elementów brakuje równań odpowiadających stopniom swobody dodatkowego węzła δ . w dalszej części omówimy sposób postępowania na przykładzie drgań osiowych pręta. Należy skonstruować równanie określające przemieszczenie i prędkość węzła δ jako pewną średnią wartość z wartości parametrów węzłów otaczających. W równaniu różniczkowym drgań pręta zastosujemy funkcję wirtualną N_8^* , kawałkami liniową w obszarze elementów e_1, e_2, e_3 i e_4 . Funkcja ta spełnia warunki $N_8(x_8, t_8) = 1$ oraz $N_8(x_k, t_k) = 0$, przy $k=2, 3, 4, 6$ (rys. 5.31).



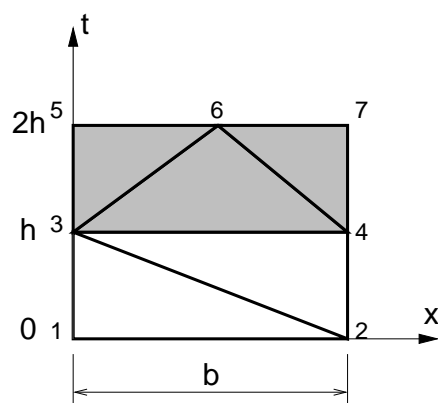
Rysunek 5.27: Przemieszczenia w czasie końca pręta przy podziale na 20 elementów oraz po dwukrotnym zagęszczeniu podziału przy różnych współczynnikach a ($n = 5$).



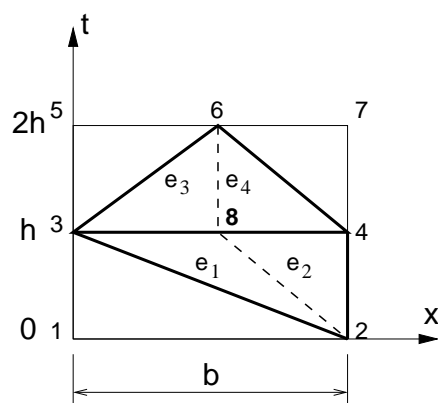
Rysunek 5.28: Przemieszczenia początkowe q_2 (podział wtórny na 40 elementów) przy różnych wartościach a .



Rysunek 5.29: Zagęszczanie siatki podziału w zadaniu jednowymiarowym.



Rysunek 5.30: Zagęszczenie siatki podziału w zadaniu jednowymiarowym.



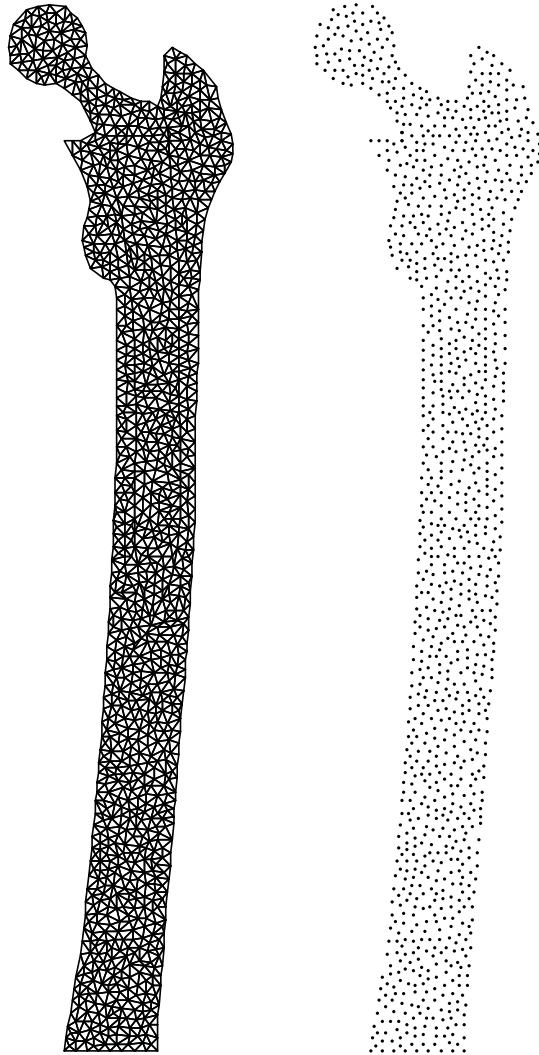
Rysunek 5.31: Obszar funkcji interpolującej N_8 .

Rozdział 6

Metody bezsiatkowe

Wszystkie dotychczas stosowane metody obliczeniowe opierały się na precyzyjnej dyskretyzacji obszaru konstrukcji lub obszaru, w którym opisane jest badane zjawisko. Dyskretyzacja obszaru jest procesem skomplikowanym. O ile w obszarach jedno i dwuwymiarowych podział odpowiednio na odcinki i trójkąty jest stosunkowo łatwy, to wypełnienie obszarów trójwymiarowych elementami czworościennymi lub sześciściennymi jest trudny. Nawet skomplikowane algorytmy tworzą siatki trójwymiarowe z błędami w okolicach pustek, otworów lub wycięć. Co więcej, zagęszczenie dyskretyzacji często nie jest zadawalające. W strefach opisanych dużymi krzywiznami oczka siatki są bardzo drobne i w wielu przypadkach wydłużone. Takie rozdrobnienie podnosi koszt obliczeniowy, a nie poprawia dokładności obliczeń. W okolicy nieobciążonych, choć zakrzywionych krawędzi, gromadzona energia potencjalna jest niewielka. Do opisanie energii kinetycznej wystarcza z kolei zgrubne przybliżenie krawędzi obszaru. Możliwa ręczna poprawa jakości siatki może poprawić wprawdzie uwarunkowanie wynikowego układu równań algebraicznych i w konsekwencji dokładność obliczeń, jednak najczęściej użytkownik pozostawia pełną inicjatywę automatycznym generatorom siatek.

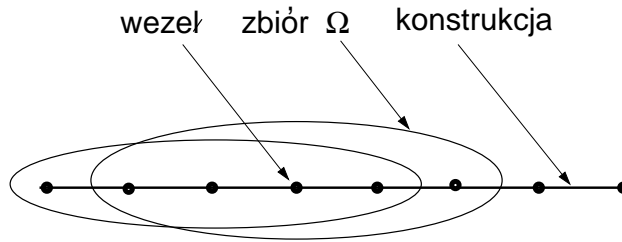
Alternatywą metod siatkowych pozornie stały się metody bezsiatkowe [34, 35, 58, 128, 129]. Najkrócej można je scharakteryzować ukazując rys. 6.1. Badany obszar opisywany jest chmurą punktów. W każdym punkcie definiujemy rozwiązanie przybliżone. Pustki pozbawione są punktów. Funkcje interpolujące (odpowiednik funkcji kształtu metody elementów skończonych) opisywane są nie w elementarnych podobszarach, a w dowolnie rozmieszczonych punktach węzłowych.



Rysunek 6.1: Obszar metody siatkowej i jego odpowiednik w metodzie bezsiatkowej.

6.1. Sformułowanie metody

Poniżej przedstawimy szczególną metodę tworzenia funkcji kształtu w metodzie bezsiatkowej, zwaną metodą ruchomych najmniejszych kwadratów („moving least square method”, MLS) [34]. Funkcje kształtu są rozpostarte na



Rysunek 6.2: Obszar Ω przesuwany się wzdłuż konstrukcji.

węzłach znajdujących się w sąsiedztwie danego węzła w przesuującym się podobzdarze Ω . Błąd interpolacji w metodzie ruchomych najmniejszych kwadratów określa zależność

$$J = \sum_{i=1}^n W(x - x_i) \left[u^h(x, x_i) - u_i \right]^2, \quad (6.1)$$

gdzie $W(x - x_i)$ jest funkcją wagową, $u^h(x, x_i)$ jest wielomianem aproksymacyjnym, a u_i są wartościami węzłowymi. Zakładamy funkcję kształtu w postaci wykładniczej:

$$W(x - x_i) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-x_i}{\alpha}\right)^2} & \text{jeżeli } (x - x_i) \leq 1 \\ 0 & \text{jeżeli } (x - x_i) > 1 \end{cases}. \quad (6.2)$$

Współczynnik α zależy od wymiaru obszaru Ω oraz liczby punktów w obszarze. W zadaniu jednowymiarowym

$$u^h(x, x_i) = \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}(x). \quad (6.3)$$

Jednomiany w wielomianach interpolacyjnych mają postać

$$\mathbf{p}^T = (1, x, x^2, \dots), \quad (6.4)$$

ze współczynnikami aproksymacji

$$\mathbf{a}^T(x) = (a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots). \quad (6.5)$$

Minimalizujemy błąd aproksymacji. J jest minimalizowane ze względu na współczynniki \mathbf{a} :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0}. \quad (6.6)$$

Po zróżniczkowaniu (6.1) otrzymujemy:

$$a(x) = A_1^{-1}(x) A_2(x) u_i, \quad (6.7)$$

gdzie:

$$A_1 = P^T W(x - x_i) P \quad A_2 = P^T W(x - x_i) \quad (6.8)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_n) \\ p_1(x_1) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Równania (6.3) i (6.7) prowadzą do równania:

$$u^h(x, x_i) = \mathbf{p}^T(x_i) A_1^{-1}(x) A_2(x) u_i = \sum_{i=1}^n \phi_i^k(x) u_i, \quad (6.10)$$

gdzie $\phi_i^k(x)$ jest funkcją kształtu, a k jest stopniem wielomianu aproksymującego

$$\phi_i^k = \mathbf{p}^T(x_i) A_1^{-1}(x) A_2(x) = [\phi_1^k(x), \phi_2^k(x), \dots, \phi_n^k(x)]. \quad (6.11)$$

Macierz \mathbf{A} w pełnej postaci nie może być w prosty sposób odwrócona. Z tego względu w praktyce ograniczamy stopień wielomianu do członu zerowego stopnia $\mathbf{p}^T = 1$. W ten sposób otrzymujemy tzw. funkcję Sheparda:

$$\phi_i^0 = \frac{W(x - x_i)}{\sum_{i=1}^n W(x - x_i)}. \quad (6.12)$$

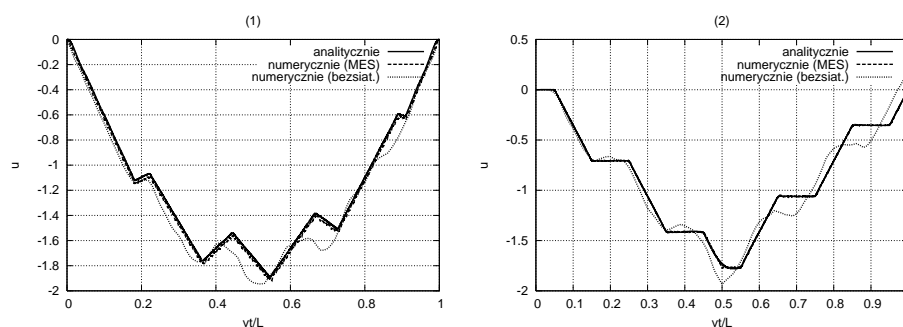
Równanie (6.12) oraz równanie różniczkowe ruchu

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (6.13)$$

pozwalą wyznaczyć macierz sztywności i bezwładności:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_{\Omega} B_i^T N B_j d\Omega \\ m_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i^T \rho A \phi_j d\Omega, \end{aligned} \quad (6.14)$$

gdzie $B = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, N jest rozciągającą siłą osiową, a ρ – gęstością masy. Macierze węzłowe \mathbf{k} i \mathbf{m} obliczone w obszarze Ω są następnie składane w macierze globalne \mathbf{K} i \mathbf{M} . Problematycznym pozostaje dobór parametru α . W obszarze o jednakowym przestrzennym rozproszeniu węzłów można ten parametr dobrać stosunkowo łatwo. W przypadku zmian zagęszczenia wynik zależy od skorelowania α z odległościami między punktami. Precyzyjny dobór α jest podstawowym problemem w równaniu (6.2).



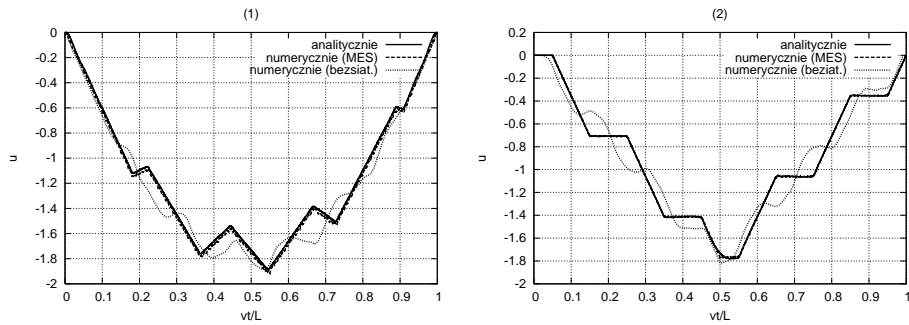
Rysunek 6.3: Przemieszczenia przy obciążeniu ruchomą siłą: (1) pod ruchomą siłą, (2) w środku pręśła (10 punktów w zbiorze Ω).

6.2. Wyniki

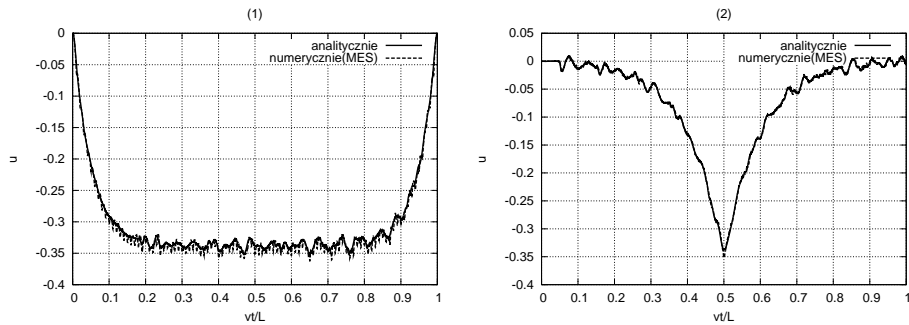
Wyniki obliczeń porównano z wynikami analitycznymi. Na rys. 6.3 przedstawiono przemieszczenia punktu pod poruszającą się siłą oraz w środku pręśła. Wyniki analityczne pokrywają się z wynikami metody elementów skończonych lub metody różnic skończonych. Wyniki metody bezsiatkowej dość dobrze odpowiadają wynikom analitycznym. Możemy zaobserwować pewien błąd fazowy, widoczny zwłaszcza w drugiej fazie obliczeń. Wskazuje to na nieco wyższą sztywność lub niższą bezwładność. Widoczny jest efekt wyoblenia wykresu i to głównie różni wyniki metody bezsiatkowej od wyników teoretycznych. Zmniejszenie liczby węzłów w oczku z 10 do 2 daje podobne wyniki (rys. 6.4). Można zaakceptować zarówno amplitudę jak i okres drgań. Należy jednak pamiętać, że węzły rozmieszczono w sposób regularny, równoodległy. W przypadku nieregularnego rozmieszczenia węzłów wyniki są zdecydowanie gorsze.

Można przytoczyć przykładowe wyniki analizy numerycznej struny umieszczonej na podłożu Winklera. Obliczenia nie różnią się zasadniczo od rozwiązania analitycznego. Obciążenie w postaci poruszającej się siły skupionej w obliczeniach komputerowych zastępowane jest przykładaną do węzłów parą sił. Wyniki pokazano na rys. 6.5.

Doświadczenia autorów pracy [61] wykazują umiarkowaną przydatność metod bezsiatkowych w obliczeniach dynamiki. Problemy z dokładnością ujawniają się już na etapie pojedynczego rozwiązania statycznego. W ciągu zadań statycznych niedokładność narasta. W przypadku zadań rzeczywistych, dwu lun trójwymiarowych o nieregularnym rozproszeniu węzłów, gru-



Rysunek 6.4: Przemieszczenia przy obciążeniu ruchomą siłą: (1) pod ruchomą siłą, (2) w środku przęsła (2 punkty w zbiorze Ω).



Rysunek 6.5: Przemieszczenia przy obciążeniu ruchomą siłą struny położonej na podłożu sprężystym Winklera: (1) pod ruchomą siłą, (2) w środku przęsła.

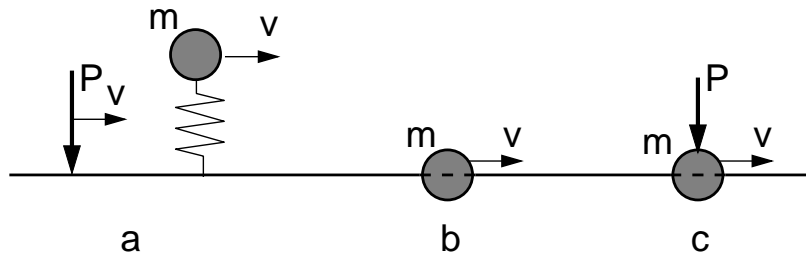
powanych w wybranych obszarach stosowanie metody bezsiatkowej w statyce i dynamice wymaga jeszcze badań.

Obciążenia ruchome

Konstrukcje poddane obciążeniom ruchomym często spotykamy w praktyce inżynierskiej. Są to mosty i wiadukty obciążone pojazdami [116, 180], estakady kolei tradycyjnej lub unoszonej magnetycznie, płyty dróg lub lotnisk, suwające się manipulatory robotów, obrabiarki, lufy broni w chwili wystrzału, systemy transpostu linowego, odbieraki prądu w systemach zasilania pojazdów szynowych (rys. 7.1). Narażone są one na znacznie większe przemieszczenia niż poddane odpowiednim obciążeniom statycznym lub wolno przesuwanym się. Staje się to oczywiste, jeśli spojrzymy na konstrukcję nieobciążoną w stanie spoczynku, którą obciążymy nagle układem sił. Konstrukcja taka zaczyna drgać od położenia równowagi w stanie nieobciążonym, poprzez stan równowagi statycznej pod obciążeniem, do uzyskania amplitudy równej podwójnej wartości ugięcia statycznego pod obciążeniem. W związku z tym szybki wjazd siły obciążającej wywołuje podobny efekt. Przejazd obciążenia odbywający się w sposób cykliczny z określoną częstością powoduje powiększenie się ugięcia. Jeśli częstość najazdu obciążenia powiążemy z prędkością przejazdu w taki sposób, że w chwili zjazdu jednego obciążenia nastąpi wjazd następnego, to możemy uzyskać zależność maksymalnego ugięcia konstrukcji pod obciążeniem od prędkości przejazdu tego obciążenia $u_{max}(v)$. Maksymalne ugięcie występuje z reguły w punkcie zlokalizowanym w okolicy 0,5–0,7 rozpiętości przęsła, zależnie od prędkości przejazdu. Postępując dalej, możemy zbadać, przy jakiej prędkości przejazdu maksymalne ugięcie będzie największe. Prędkość ta nazywana jest prędkością krytyczną. W przypadku struny prędkość krytyczna odpowiada prędkości rozchodzenia się fali c . Prędkość krytyczna jest wielkością ważną z praktycznego punktu widzenia. Określa bowiem najniekorzystniejszą war-



Rysunek 7.1: Przykłady zagadnień z ruchoma masą.



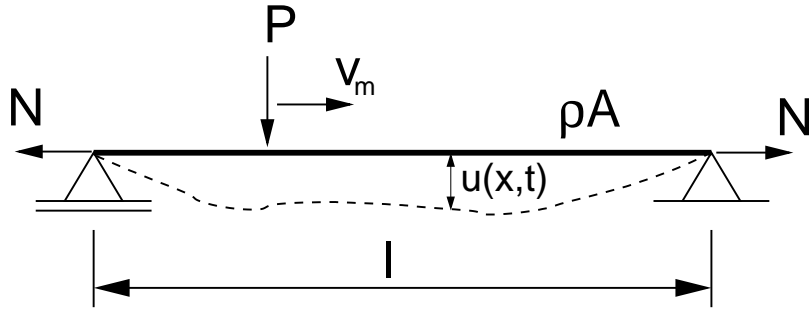
Rysunek 7.2: Obciążenie: a) bezmasowe, b) inercyjne, c) inercyjne i grawitacyjny.

tość ugięcia, jaką konstrukcja powinna wytrzymać. Z tego względu badanie konstrukcji pod obciążeniem ruchomym jest ważnym problemem inżynierskim. Mimo to istniejące na rynku komercyjne pakiety obliczeniowe nie umożliwiają symulacji tego typu zadań. Jak się dalej przekonamy, problem jest trudny i w tym można upatrywać braku odpowiednich procedur komputerowych.

Tu należy poświęcić uwagę klasyfikacji obciążenia. Najprostszy przypadek bezmasowej siły pokazuje rys. 7.2a. Bez znaczenia jest tu fakt, że siłę przyłożoną wprost do konstrukcji zastąpimy oscylatorem, którego masa będzie niezerowa. Wprowadzie wpływ masy widoczny będzie w wynikach, to nie będzie to wynik zadania z obciążeniem masowym. Co więcej, mimo że wpływ masy oscylatora będzie rósł wraz ze zwiększającą się sztywnością sprężyny, to rozwiązanie nie będzie jednostajnie zmierzać do rozwiązania z obciążeniem masowym. Oscylacje dodatkowego stopnia swobody wprowadzają dodatkowe sztuczne efekty w postaci rezonansów, wzrostu lub spadku amplitud przy określonych prędkościach. Obciążenie masowe pokazuje przypadek rys. 7.2b. Ruch masy wpływa na wynik przy niezerowych przemieszczeniach $u(x, t)$ w chwili $0 \leq t < L/v$. W przeciwnym wypadku wymagany jest udział czynników wywołujących przemieszczenia, np. impulsu siły (rys. 7.2).

W dalszej części zajmiemy się opisem analitycznym drgań poprzecznych struny obciążonej poruszającą się ze stałą prędkością siłą (rys. 7.3). Częściowe rozwiązanie znaleźć można w literaturze (np. [71]). Tutaj posłużymy nam do porównania i oceny wyników numerycznych otrzymanych metodą elementów czasoprzestrzennych. Bogaty materiał przeglądowy dotyczący dynamiki konstrukcji pod obciążeniem ruchomym ukazują prace Szcześniaka [166, 167]. Są to bez wątpienia najobszerniejsze prace w tym zakresie.

W następnych rozdziałach podamy rozwiązania analityczne i półanalityczne drgań poprzecznych belki poddanej obciążeniu ruchomemu nieiner-



Rysunek 7.3: Stała poruszająca się siła.

cyjnemu i inercyjnemu. Rozwiązanie zadania dotyczącego wpływu poruszającej się masy na drgania struny wraz z obszerną analizą przedstawił Dyniewicz w pracach [60, 64]. Po raz pierwszy pokazał w nich osobliwość rozwiązania w otoczeniu końcowej podpory. Efekt ten wpływa mocno na skuteczność stosowanych przez różnych badaczy metod numerycznych. Z reguły nie pokazują oni poprawnych rozwiązań. Opisywane podejścia stosowane są najczęściej do opisu dynamiki belek [68], przy małej prędkości ruchu masy oraz małej wartości stosunku masy poruszającej się do masy belki. W takim przypadku wartość błędu nie jest duża i mimo niepoprawnych rozwiązań uznawana jest za dopuszczalną. Podobnie jak w przypadku struny obciążonej nieinercyjnie, posłuży ono do porównań z rozwiązaniami numerycznymi. Modelowanie numeryczne tego problemu ukazuje praca [30].

Przykładem badanego obiektu obciążonego poruszającym się obciążeniem inercyjnym może być struna. Jej ruch opisuje równanie różniczkowe

$$-N \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x-vt) P - \delta(x-vt) m \frac{\partial^2 u(vt,t)}{\partial t^2} \quad (7.1)$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (7.2)$$

i warunkami początkowymi

$$u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7.3)$$

7.1. Stała poruszająca się siła – rozwiązanie analityczne

Punktową siłę poruszającą się po strunie można wprowadzić jako iloczyn siły P i funkcji Diraca $\delta(x)$. Równanie różniczkowe ruchu możemy napisać następująco:

$$-N \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x-vt)P. \quad (7.4)$$

N jest siłą rozciągającą, a ρA – gęstością masy przypadającą na jednostkę długości. Dołączamy warunki brzegowe

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (7.5)$$

i warunki początkowe

$$u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7.6)$$

Posłużymy się sinusową transformacją Fouriera w skończonym przedziale $\langle 0, l \rangle$.

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j,t) \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (7.7)$$

$$V(j,t) = \int_0^l u(x,t) \sin \frac{j\pi x}{l} dx, \quad (7.8)$$

Zwięźle przedstawimy najważniejsze etapy rozwiązania oraz wynik końcowy. Pełny opis wraz z dowodami zbieżności rozwiązań zawiera praca [60]. Transformata równania (7.4) przyjmie postać następującą:

$$\ddot{V}(j,t) + \omega_j^2 V(j,t) = \frac{P}{\rho A} \sin \omega t, \quad (7.9)$$

gdzie:

$$\omega = \frac{j\pi c}{l}, \quad \omega_j^2 = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \frac{N}{\rho A}. \quad (7.10)$$

Do rozwiązania równania różniczkowego (7.9) posłużymy się transformacją Laplace'a–Carsona (L–C). Przechodzimy do dziediny zespolonej. Rozwiązanie staje się prostsze:

$$V^*(j,p) = \frac{P\omega}{\rho A} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^2 + \omega_j^2}. \quad (7.11)$$

Odwrotna transformacja L-C umożliwiła powrót równania (7.11) do przestrzeni rzeczywistej

$$V(j, t) = \frac{P}{\rho A} \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_j} \sin \omega_j t \right). \quad (7.12)$$

Na podstawie (7.7) przechodzimy ze współrzędnych uogólnionych $V(j, t)$ do przemieszczeń rzeczywistych struny

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P}{\rho A l} \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (7.13)$$

Na marginesie powyższych przekształceń możemy powiedzieć, że w podobny sposób możemy potraktować przypadek struny położonej na podłożu sprężystym typu Winklera. Równanie różniczkowe ruchu struny ułożonej na podłożu Winklera o stałej sztywności k ma z lewej strony dodatkowy człon $k u(x, t)$:

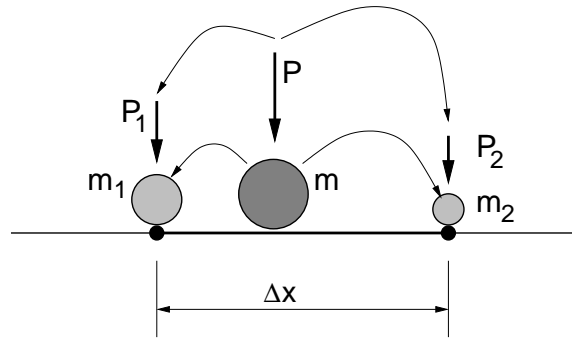
$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + k u(x, t) = \delta(x - vt) P. \quad (7.14)$$

Rozwiązanie wygląda wówczas podobnie do rozwiązania równania (7.4), z następującą różnicą w 7.11:

$$\omega_j^2 = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \frac{N}{\rho A} + \frac{k}{\rho A}. \quad (7.15)$$

7.1.1. Poruszające się obciążenie inercyjne – rozwiązanie analityczne

Wpływ masy stowarzyszonej z poruszającym się obciążeniem jest znaczny i nie może zostać pominięty w obliczeniach. Obciążenie bezmasowe poruszające się po konstrukcji sprężystej dotąd nie może być w prosty sposób wprowadzone do obliczeń pakietami komercyjnymi przeznaczonymi do symulacji komputerowych. Można wprowadzić w niektórych pakietach przedstawiać wektory sił do nowych pozycji, jednak jest to sposób mało skuteczny w praktycznym zastosowaniu. Obciążenie inercyjne z kolei w ogóle nie może być wprowadzone do modeli numerycznych w programach komercyjnych. Mimo pewnych zabiegów polegających na przestawianiu obciążenia, a więc i masy, w kolejnych etapach czy krokach obliczeniowych do nowego położenia, wyniki nie są poprawne, gdyż nie uwzględniają efektów wynikających z matematycznych sformułowań. Rozmieszczenie masy w węzłach w sposób ważony (rys. 7.4) również nie jest poprawne.



Rysunek 7.4: Granulacja masy *ad hoc* w węzłach elementu.

Zadania z poruszającą się masą są ważne w wielu problemach inżynierskich. Może to być masa pantografowego odbieraka prądu, sunącego po kablu trakcji elektrycznej w kolejnictwie (rys. 7.6). Innym przykładem jest sprzężenie 500 kg masy koła kolejowego z szyną. Masa koła, lub nawet tylko jego części, jest porównywalna z masą odcinka szyny, po której jedzie. Wpływ masy na przemieszczenia w punkcie śledzącym na strunie pokazuje rys. 7.5. Przemieszczenia przy różnym stosunku jadącej masy do masy struny przedstawiono przy prędkości $v=0,2c$.

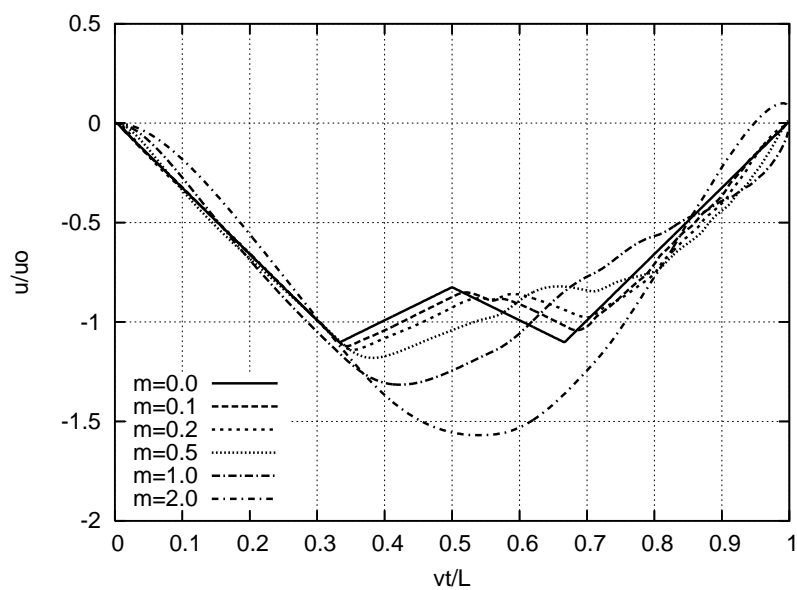
Obciążenie inercyjne analizowane jest w wielu publikacjach. Niestety, dotąd nie udało się znaleźć rozwiązania zamkniętego w przypadku ogólnym. Częściowe rozwiązanie zadania drgań struny bezmasowej obciążonej ruchomą masą znajduje się np. w pracach [71, 164]. W pracy [71] końcowe wyniki są jednak błędne. Poprawną końcową postać rozwiązania prezentuje praca [64]. Poniżej przedstawimy w skrócie opisany tam tok postępowania.

Przypadek struny nieinercyjnej

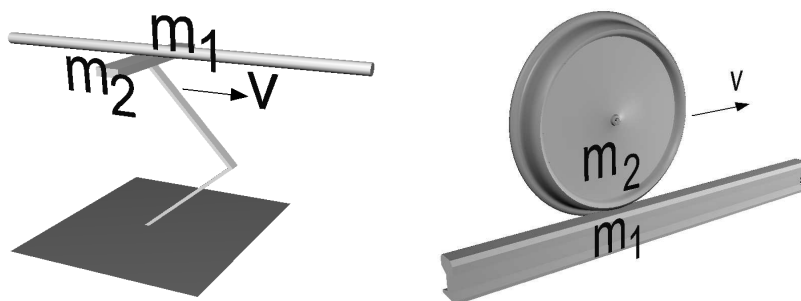
Przytoczymy podstawowe fakty wynikające z analizy struny bezmasowej obciążonej jadącą masą. Będzie to przydatne przy omówieniu własności rozwiązań analitycznych. Tych samych efektów oczekiwać będziemy w rozwiązaniach numerycznych.

Równanie ruchu struny bezmasowej ($\rho = 0$) pod ruchomym obciążeniem inercyjnym opisuje następujące równanie

$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \delta(x - vt) P - \delta(x - vt) m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2}. \quad (7.16)$$



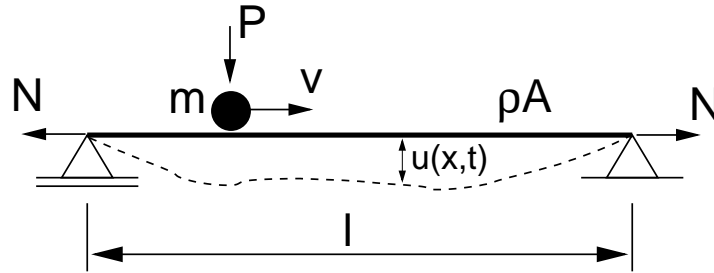
Rysunek 7.5: Przeszyczenia struny pod masą przy różnej wielkości masy i przy prędkości $v=0,2c$.



Rysunek 7.6: Przykłady obciążeń inercyjnych.

Aby je rozwiązać korzystamy z własności splotu

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, s) p(s, t) ds, \quad (7.17)$$



Rysunek 7.7: Ruchome obciążenie inercyjne.

gdzie $p(x, t)$ jest niejednorodnością (7.16) daną wzorem

$$p(x, t) = \delta(x - vt) \left(P - m \frac{d^2 u(vt, t)}{dt^2} \right). \quad (7.18)$$

$G(x, s)$ jest funkcją Greena, którą otrzymujemy rozwiązując tzw. równanie podstawowe, zastępując prawą stronę (7.16) deltą Diraca $\delta(x - s)$

$$-N \frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2} = \delta(x - s). \quad (7.19)$$

W wyniku całkowania względem x otrzymujemy

$$G(x, s) = -\frac{1}{N} [H(x - s)x - H(x - s)s] + C_1 x + C_2. \quad (7.20)$$

Na podstawie warunków brzegowych (3.2) obliczamy stałe C_1 i C_2

$$C_1 = \frac{l - s}{Nl}, \quad C_2 = 0. \quad (7.21)$$

Funkcja Greena przyjmuje zatem postać

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(1 - \frac{x}{l}\right) s & \text{dla } x \geq s, \\ \frac{1}{N} \left(1 - \frac{s}{l}\right) x & \text{dla } x \leq s. \end{cases} \quad (7.22)$$

Na podstawie (7.18) i (7.22) obliczamy całkę (7.17). Otrzymujemy dwa równania

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right] \left(1 - \frac{x}{l}\right) vt, \\ \frac{1}{N} \left[P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right] \left(1 - \frac{vt}{l}\right) x. \end{cases} \quad (7.23)$$

W tym momencie zakładamy uproszczenie rozważanego zadania ograniczając się tylko do przypadku szczególnego. Przyjmujemy $x = vt$, a więc rozpatrujemy tylko przypadek przemieszczeń pod ruchomym obciążeniem. Oznaczając $u_1(t) = u(vt, t)$ otrzymujemy różniczkowe równanie ruchu struny bezmasowej pod ruchomym obciążeniem inercyjnym

$$u_1(t) = \left(P - m \frac{\partial^2 u_1(t)}{\partial t^2} \right) \left[\frac{1}{N} \left(1 - \frac{vt}{l} \right) vt \right]. \quad (7.24)$$

Przyjmujemy bezwymiarowe przemieszczenia struny y oraz bezwymiarowy czas τ

$$y(\tau) = \frac{u_1(t)}{u_0} \quad i \quad \tau = \frac{vt}{l}, \quad (7.25)$$

gdzie

$$u_0 = \frac{Pl}{4N} \neq 0 \quad (7.26)$$

jest ugięciem statycznym w środku struny. Podstawiając (7.25) do (7.24) otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne, niejednorodne o zmiennych współczynnikach

$$\tau(1-\tau)\ddot{y}(\tau) + 2\alpha y(\tau) = 8\alpha\tau(1-\tau), \quad (7.27)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{Nl}{2mv^2}. \quad (7.28)$$

Dalsze postępowanie uzależnione jest od wartości parametru α . Rozpatruje się przypadek $\alpha \neq 0$ i $\alpha = 0$.

Przypadek $\alpha \neq 1$ Jako rozwiązanie (7.27) zakładamy następującą funkcję $y(\tau)$

$$y(\tau) = \tau(1-\tau)\nu(\tau). \quad (7.29)$$

Podstawiając ją oraz jej pochodną do (7.27) otrzymujemy niejednorodne równanie hipergeometryczne [163]. Dzięki założonym warunkom początkowym (7.6) rozwiązanie równania (7.27) przy $\alpha \neq 1$ znacznie się upraszcza. Ostatecznie przemieszczenia struny w przypadku $\alpha \neq 1$ opisuje związek

$$y(\tau) = \frac{4\alpha}{\alpha-1} \tau(1-\tau) [1 - F(a, b, c, \tau)], \quad (7.30)$$

gdzie szereg hipergeometryczny $F(a, b, c, \tau)$ opisany jest wzorem

$$F(a, b, c, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{\tau^k}{k!}. \quad (7.31)$$

Oznaczono w min symbolicznie następujące iloczyny

$$(a_k) = a(a+1)\dots(a+k-1),$$

$$(b_k) = b(b+1)\dots(b+k-1),$$

$$(c_k) = c(c+1)\dots(c+k-1).$$

Szczegóły powyższego rozwiązania zostały przedstawione m. in. w [71].

Przypadek $\alpha = 1$ W przypadku $\alpha = 1$ równanie (7.27) przyjmuje prostszą postać:

$$\tau(1-\tau)\ddot{y}(\tau) + 2y(\tau) = 8\tau(1-\tau). \quad (7.32)$$

Warto zauważyć, że równanie (7.32) ma pełne rozwiązanie analityczne w zamkniętej formie

$$y(\tau) = \frac{4}{3}\tau(\tau-1) + \frac{4}{3}\tau(1+2\tau\ln(1-\tau) - 2\ln(1-\tau)). \quad (7.33)$$

Rozwiązanie analityczne przy strunie inercyjnej

Rozwiązanie przedstawione poniżej zostało uzyskane przez Dyniewicza [63]. Różne jego aspekty opisano w pracach [62, 64].

Rozpatrzmy strunę o długości l , polu przekroju poprzecznego A , gęstości masy ρ , z siłą rozciągającą N , obciążoną masą m stowarzyszoną z siłą skupioną P (rys. 7.7), poruszającą się ze stałą prędkością v . Równanie różniczkowe ruchu struny pod obciążeniem inercyjnym poruszającym się ze stałą prędkością v ma postać następującą:

$$-N \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x-vt)P - \delta(x-vt)m \frac{\partial^2 u(vt,t)}{\partial t^2}. \quad (7.34)$$

Uwzględniamy warunki brzegowe

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (7.35)$$

i warunki początkowe

$$u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7.36)$$

Redukujemy równanie różniczkowe cząstkowe do równania zwyczajnego. Stosujemy sinusową transformację Fouriera w skończonym obszarze, odpowiadającym długości struny. Przedstawiamy każdą z funkcji jako nieskończony szereg sinusowych funkcji

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j, t) \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (7.37)$$

o współczynnikach

$$V(j, t) = \int_0^l u(x, t) \sin \frac{j\pi x}{l} dx . \quad (7.38)$$

Wówczas rozwinięcie członu przyspieszenia poruszającej się masy w szereg ma następującą formę:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} &= \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} + \right. \\ &+ \left. \frac{2k\pi v}{l} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} - \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2} V(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \right] . \end{aligned} \quad (7.39)$$

Można teraz przeprowadzić transformację całkową (7.38) równania (7.34) z uwzględnieniem

$$\begin{aligned} N \frac{j^2 \pi^2}{l^2} V(j, t) + \rho A \ddot{V}(j, t) &= \\ &= P \sin \frac{j\pi vt}{l} - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \int_0^l \delta(x - vt) \sin \frac{j\pi x}{l} dx . \end{aligned} \quad (7.40)$$

Obliczamy całkę zawierającą w powyższym równaniu deltę Diraca

$$\int_0^l \delta(x - vt) \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \sin \frac{j\pi vt}{l} . \quad (7.41)$$

Rozpatrzmy teraz rozwinięcie przyspieszenia (7.40) z uwzględnieniem (7.41).

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
N \frac{j^2 \pi^2}{l^2} V(j, t) + \rho A \ddot{V}(j, t) &= \\
&= P \sin \frac{j\pi vt}{l} - \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} - \\
&\quad - \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi v}{l} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} + \\
&\quad + \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2} V(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} .
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Ostatecznie równanie ruchu po transformacji Fouriera można przedstawić następująco

$$\begin{aligned}
\rho A \ddot{V}(j, t) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(k, t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \dot{V}(k, t) \cos \omega_k t \sin \omega_j t + \\
+ \Omega^2 V(j, t) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 V(k, t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t = P \sin \omega_j t ,
\end{aligned} \tag{7.43}$$

gdzie

$$\omega_k = \frac{k\pi v}{l} , \quad \omega_j = \frac{j\pi v}{l} , \quad \Omega^2 = N \frac{j^2 \pi^2}{l^2} , \quad \alpha = \frac{2m}{l} . \tag{7.44}$$

Analityczne rozwiązanie powyższego układu równań praktycznie jest nie do uzyskania. Dalsze obliczenia wykonujemy numerycznie. Równanie (7.43) można zapisać w postaci macierzowej. Macierze \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} są macierzami kwadratowymi ($j, k = 1 \dots n$)

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{V}(1, t) \\ \ddot{V}(2, t) \\ \vdots \\ \ddot{V}(n, t) \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{V}(1, t) \\ \dot{V}(2, t) \\ \vdots \\ \dot{V}(n, t) \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} V(1, t) \\ V(2, t) \\ \vdots \\ V(n, t) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \tag{7.45}$$

lub

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P} , \tag{7.46}$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho A \end{bmatrix} + \quad (7.47)$$

$$+ \alpha \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix},$$

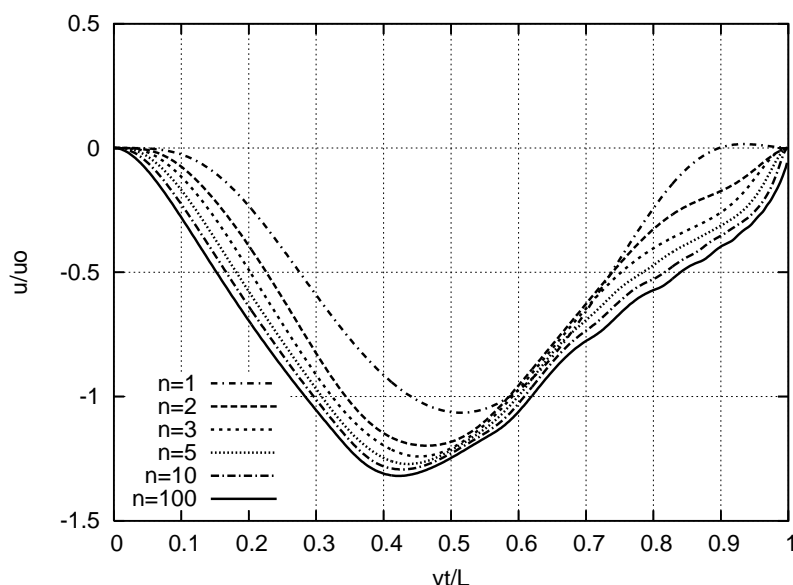
$$\mathbf{C} = 2\alpha \begin{bmatrix} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1^2\pi^2}{l^2} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2^2\pi^2}{l^2} N & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n^2\pi^2}{l^2} N \end{bmatrix} - \quad (7.49)$$

$$- \alpha \begin{bmatrix} \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = P \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} \\ \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}. \quad (7.50)$$

Po obliczeniu współczynników $V(j, t)$ wyznaczamy przemieszczenia struny (7.37), będące rozwiązaniem równania (7.34). Uzyskujemy rozwiązanie ważne w pełnym zakresie prędkości $v > 0$, również $v > c$. Można wyznaczyć przemieszczenia w funkcji czasu w dowolnym punkcie przestrzeni. Zerując gęstość masy $\rho = 0$ w (7.48) otrzymujemy rozwiązanie drgań struny bezmasowej.

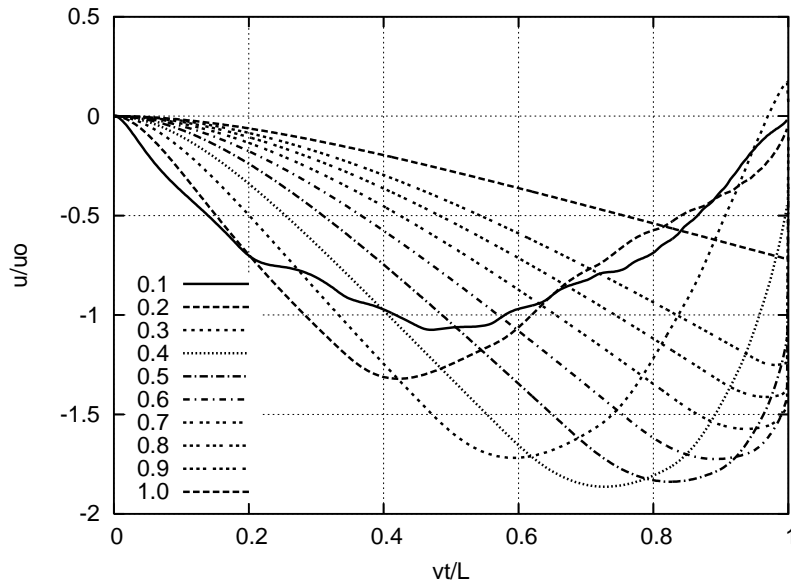


Rysunek 7.8: Zbieżność szeregu trygonometrycznego przy $v = 0.2c$.

7.1.2. Wyniki obliczeń

Rozwiązanie półanalityczne uzyskuje się przy umiarkowanej zbieżności szeregu stanowiącego rozwiązanie (rys. 7.8). Oznaczmy przez c prędkość propagacji fali w nieobciążonej masie strunie: $c^2 = N/\rho A$. Następne wykresy pokazują pionowe przemieszczenia struny u odniesione do ugięcia statycznego u_0 punktu w środku rozpiętości. Zauważamy, że już pierwszy wyraz daje stosunkowo dokładne rozwiązanie. Trzy do pięciu wyrazów wystarcza do uzyskania dużej dokładności do celów inżynierskich. Należy jednocześnie podkreślić, że wyższa prędkość masy, np. $0,9c$ lub $1,0c$ wymaga nawet stu i więcej wyrazów szeregu, przy jednocześnie krótkim kroku całkowania równania różniczkowego. Powodem jest nieciągłość rozwiązania i skok wartości w pobliżu końcowej podpory. Rys. 7.9 przedstawia wykresy przy różnych wartościach prędkości v .

Bardziej szczegółowo wyniki obliczeń uwidoczniono na rys. 7.10. Dostrzec można ostre linie obrazujące czoło fali oraz trajektorię masy. Widoczne są też linie stanowiące czoło fali odbitej od podpory oraz od samej masy. Dokładniej zjawiska falowe pokazano na wycinkach wykresów, ukazujących ostatnią fazę przejazdu masy (rys. 7.11). Zobrazowany ruch masy



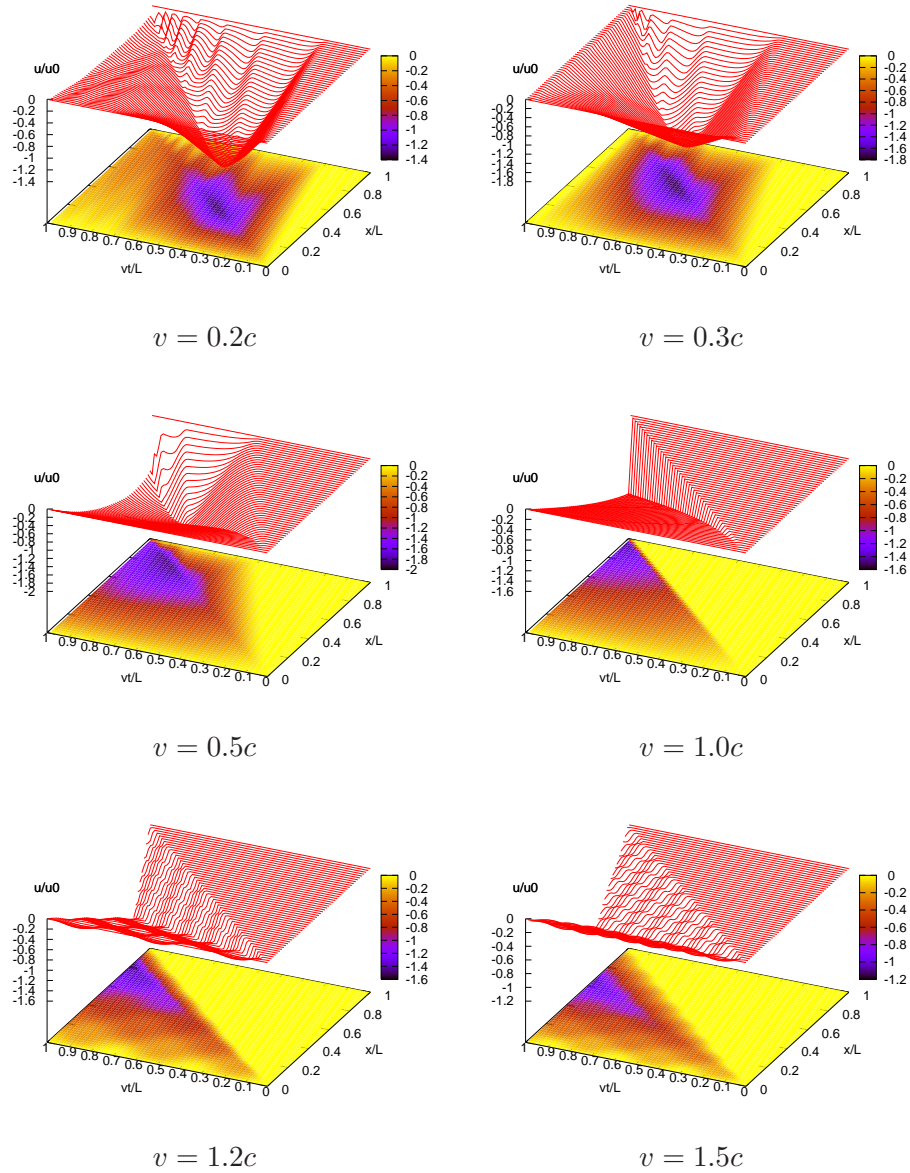
Rysunek 7.9: Przeszczenia masowej struny wyznaczone półanalitycznie.

z prędkością naddźwiękową odbywa się zgodnie ze zjawiskiem fizycznym. Przeszczenia pionowe masy są zerowe. Na rys. 7.12 przedstawiono wykres przeszczenia struny w punkcie pod masą przy prędkości $v = 1,05c$. Pokazano zbieżność rozwiązania półanalitycznego do wartości zerowej wraz ze wzrostem liczby wyrazów szeregu.

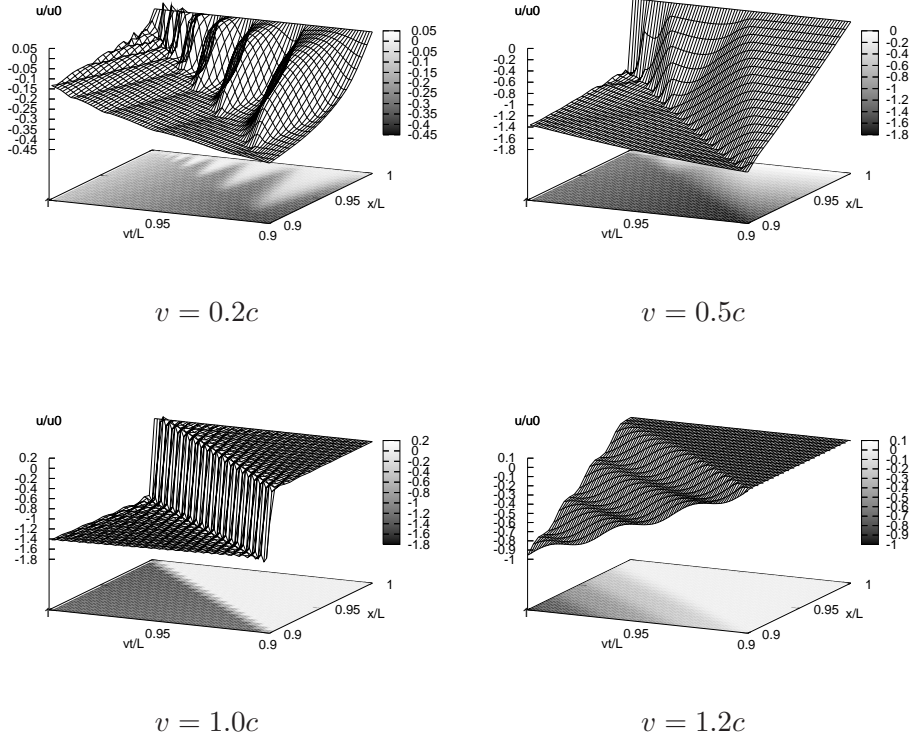
Wyniki rozwiązań półanalitycznych posłużą w rozdziałach 7.2 i 7.3 do porównań wyników uzyskanych w pełni numerycznie, z wykorzystaniem dyskretyzacji przestrzennej struny.

7.1.3. Nieciągłość rozwiązania

Nieciągłości rozwiązania poświęcimy tu nieco uwagi. Przeanalizujemy fizyczną naturę skoków rozwiązania w okolicy końcowej podpory. Najprostsze wytłumaczenie opiera się na analizie równowagi sił (rys. 7.13). Pamiętamy, że podstawowym założeniem poczynionym przy tworzeniu równania różniczkowego jest stała wartość siły naciągu struny N . Co więcej, pozioma siła działająca na punkt masowy i utrzymująca stałą prędkość jazdy v musi zostać uwzględniona w równaniach równowagi sił. Ostatni odcinek pokonywanej drogi d przebywany jest w czasie d/v . W tym czasie masa m musi zostać



Rysunek 7.10: Symulacja drgań struny obciążonej inercyjnie, przy prędkości $v=0,2c$, $0,3c$, $0,5c$, $1,0c$, $1,2c$ i $1,5c$.



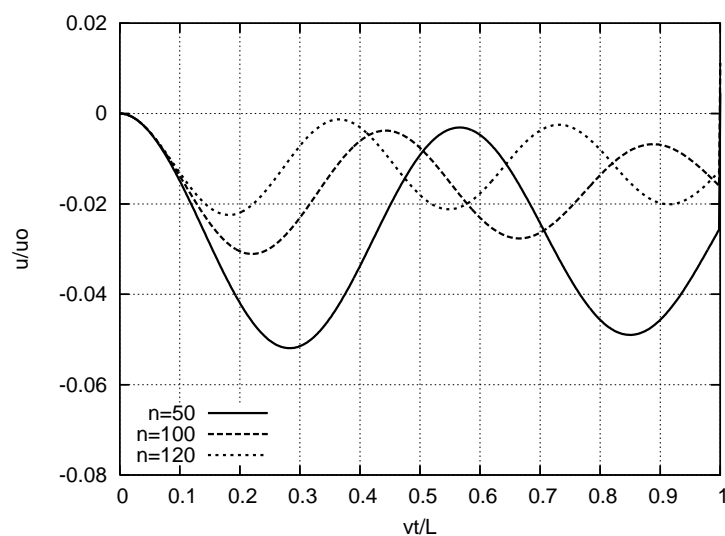
Rysunek 7.11: Końcowa faza przejścia masy przy prędkości $v=0,2c$, $0,5c$, $1,0c$ i $1,2c$.

uniesiona z wysokości $-u_B$ do wysokości 0. Jeśli u_B jest znaczne, punkt masowy winien doznać znacznego przyspieszenia. W efekcie pojawia się siła $F \sim umv^2/d^2$. Może ona przewyższać wartość naciągu N , a to jest sprzeczne z założeniami o małych przemieszczeniach $(\partial u/\partial x)^2 \ll 1$.

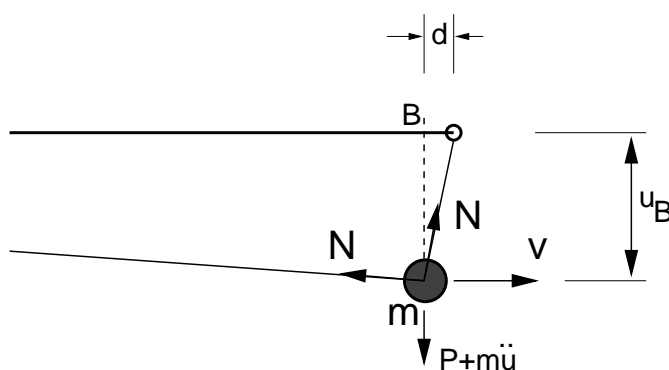
Niezależnie od powyższej argumentacji możemy dowieść nieciągłości rozwiązania drogą matematyczną. W tym przypadku rozważymy przypadek struny bezmasowej oraz masowej.

Zajmijmy się najpierw przypadkiem struny bezmasowej. Rozwiązanie przedstawione jest w postaci sumy (7.30)

$$y(\tau) = \frac{4\alpha}{\alpha-1} \tau(\tau-1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{(a+i-1)(b+i-1)}{c+i-1} \frac{\tau^k}{k!}, \quad (7.51)$$



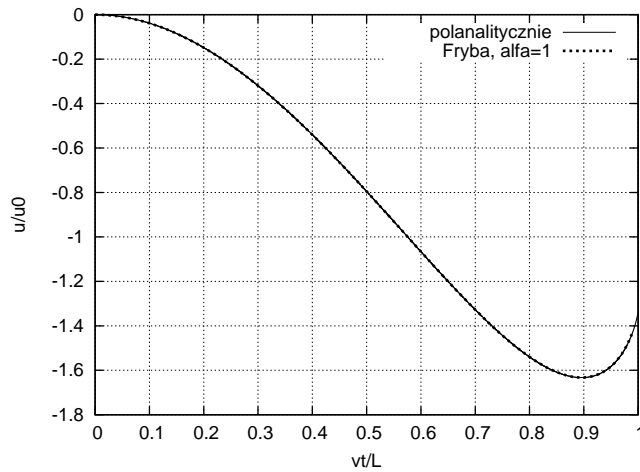
Rysunek 7.12: Zbieżność przemieszczeń pod masą przy prędkości $v=1,05c$.



Rysunek 7.13: Końcowy etap ruchu masy.

gdzie $\tau = vt/l > 0$ jest parametrem czasu, a $\alpha = Nl/(2mv^2) > 0$ określa parametr bezwymiarowy. Parametry a , b i c zapisane są poniżej:

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 8\alpha}}{2} \quad b_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{1 + 8\alpha}}{2} \quad c = 2. \quad (7.52)$$



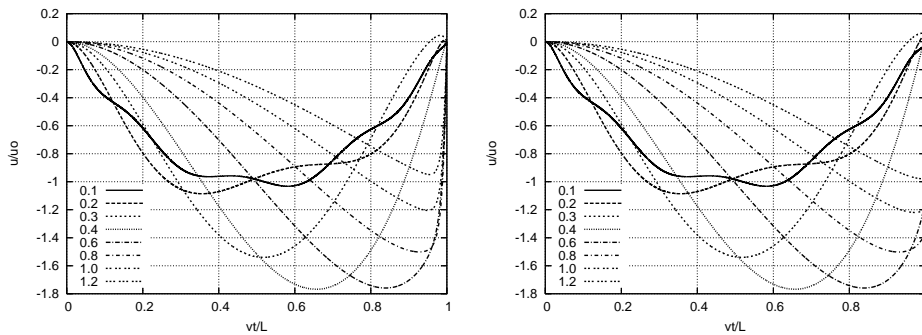
Rysunek 7.14: Wykres trajektorii masy poruszającej się po strunie bezmasowej (7.53).

Przy $\alpha = 1$ rozwiązanie ma zamkniętą postać:

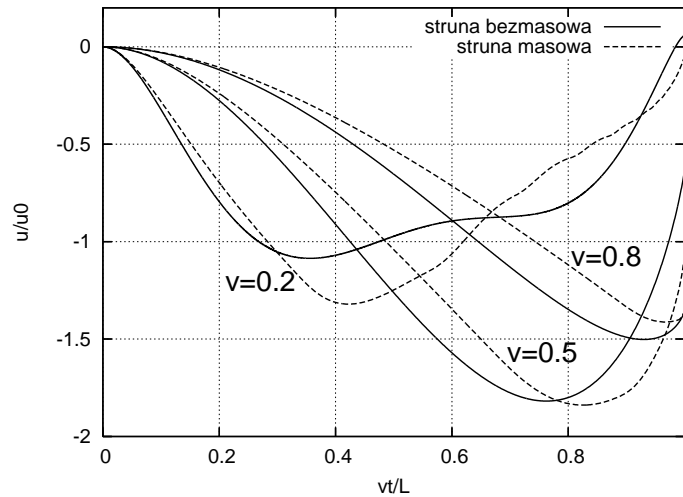
$$u(\tau) = \left[\frac{4}{3}\tau(1-\tau) - \frac{4}{3}\tau(1+2\tau\ln(1-\tau) + 2\ln(1-\tau)) \right]. \quad (7.53)$$

Na rys. 7.14 przedstawiono wykres funkcji (7.53) wraz z krzywą uzyskaną z rozwiązania półanalitycznego przy odpowiednio dobranych parametrach. Przy $x = l$ widzimy nieciągłość trajektorii masy. Spójrzmy na przypadek $\alpha = 1$. Na rys. 7.15 widzimy wpływ liczby wyrazów w rozwiązaniu na dokładność wyniku w pobliżu końcowej podpory. Możemy zbadać rozwiązanie opisane równaniem (7.51). Korzystając z kryterium Rabbego i postępując w sposób opisany w [64] dowodzimy, że rozwiązanie przy $\tau \rightarrow 1$ jest skończone i większe od zera (przy $P > 0$). Co więcej, pochodna rozwiązania $\lim_{\tau \rightarrow 1^-} dy/d\tau = \infty$.

Te same własności obserwujemy w przypadku struny masowej. Niestety, nie potrafimy tego udowodnić matematycznie. Porównanie przypadku bezmasowej i masowej struny przedstawia rys. 7.16. Wyniki struny masowej uzyskano przy $m/\rho Al = 1$. W przypadku małych wartości $m/\rho Al$ pary krzywych niemal się pokrywają. Zbieżność do rozwiązania nieciągłego wraz ze zwiększaniem dokładności rozwiązania równania różniczkowego obrazuje rys. 7.17.



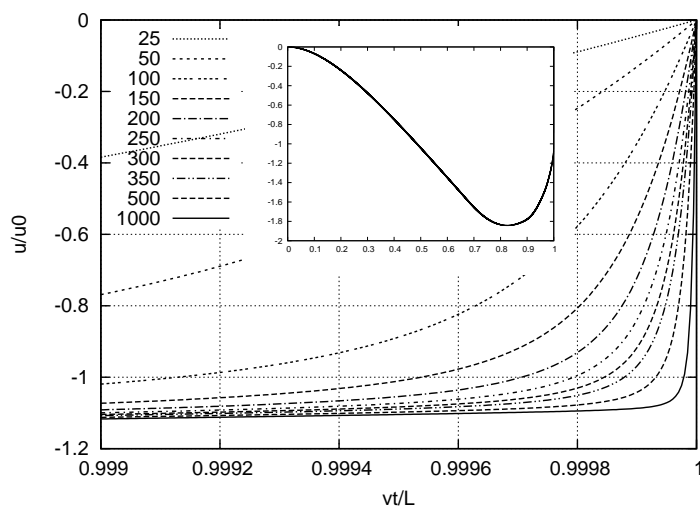
Rysunek 7.15: Trajektorie masy na bezmasowej strunie przy małej liczbie wyrazów w sumie (lewy wykres) i dużej liczbie wyrazów (prawy wykres).



Rysunek 7.16: Porównanie trajektorii cząstki masowej poruszającej się po strunie bezmasowej i masowej.

7.1.4. Uwagi końcowe

Rozważania dotyczące nieciągłości trajektorii masy nie pozwalają dowieść nieciągłości struny. Kształtu struny, zarówno bezmasowej jak i masowej, nie możemy wyznaczyć analitycznie. Możemy jedynie spodziewać się takiej nieciągłości na podstawie wyników numerycznych. Na ich podstawie jednoznacznie można powiedzieć, że w okolicy podpory końcowej, w chwili zbli-



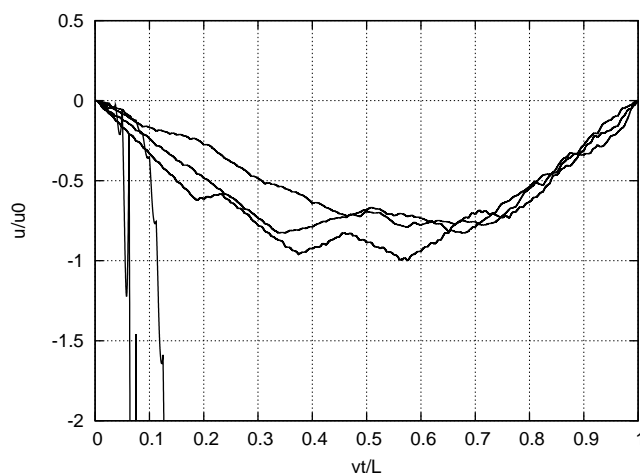
Rysunek 7.17: Zbieżność trajektorii ruchu masy do rozwiązania nieciągłego przy rosnącej liczbie wyrazów szeregu.

żania się do niej masy, linia ugięcia przyjmuje kształt o dużym nachyleniu. Nachylenie to rośnie do nieskończoności wraz ze zwiększaniem dokładności obliczeń. Rozwiązania ciągłe uzyskuje się jedynie w przypadku trywialnym $m = 0$.

Rozpatrzyliśmy drgania w zakresie małych przemieszczeń. Dowodzenie nieciągłości trajektorii masy w zastosowaniach inżynierskich ma małe znaczenie, choć w praktyce obserwuje się efekt dużych skoków położenia obciążenia inercyjnego. Ma to miejsce na końcach płyt drogowych oraz przy słupach podtrzymujących trakcję elektryczną na kolei. Pokazane zjawisko jest jednak fundamentalne, kiedy opracowujemy poprawne schematy numeryczne. W takim przypadku oczekujemy, by rozwiązanie numeryczne w pełnym zakresie prędkości pokrywało się z rozwiązaniem analitycznym.

7.2. Klasyczny opis numeryczny ruchomej masy

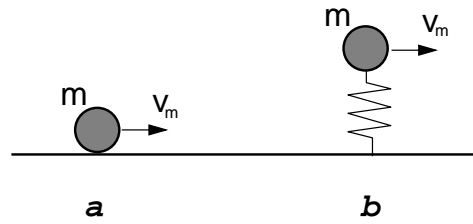
Jak już wspomnieliśmy wcześniej, numeryczne rozwiązania problemów z ruchomą masą spotykane w literaturze są niepoprawne. W przypadku dynamiki belek błędne sformułowania numeryczne objawiają się w postaci linii ugięcia i trajektorii masy znacznie odbiegających od poprawnych. Wynika to częściowo z parabolicznego charakteru równania drgań belki. W przypadku



Rysunek 7.18: Rozbieżność rozwiązania metodą elementów skończonych.

równania drgań struny, czysto hiperbolicznego, najczęściej rozwiązania są rozbieżne. Przykładem błędnego, rozbieżnego rozwiązania może być zastosowanie opisanej w pracy [68] metody do analizy drgań struny obciążonej jadącą masą (rys. 7.18). Zastosowano w obliczeniach metodę elementów skończonych wraz z metodą Newmarka do całkowania w czasie. Uwzględniono człony wynikające z dwukrotnego różniczkowania przemieszczenia w układzie związanym z poruszającą się masą. Podejście to figuruje w literaturze jako rozwiązanie Renaudot. Odpowiednie człony mają charakter przyspieszenia liniowego, przyspieszenia Coriolisa oraz przyspieszenia odśrodkowego. Trudności w numerycznym modelowaniu zadań z ruchomą masą potwierdzają komercyjne pakiety do symulacji komputerowych. Jak dotąd nie można z ich pomocą dokonać odpowiedniej analizy numerycznej.

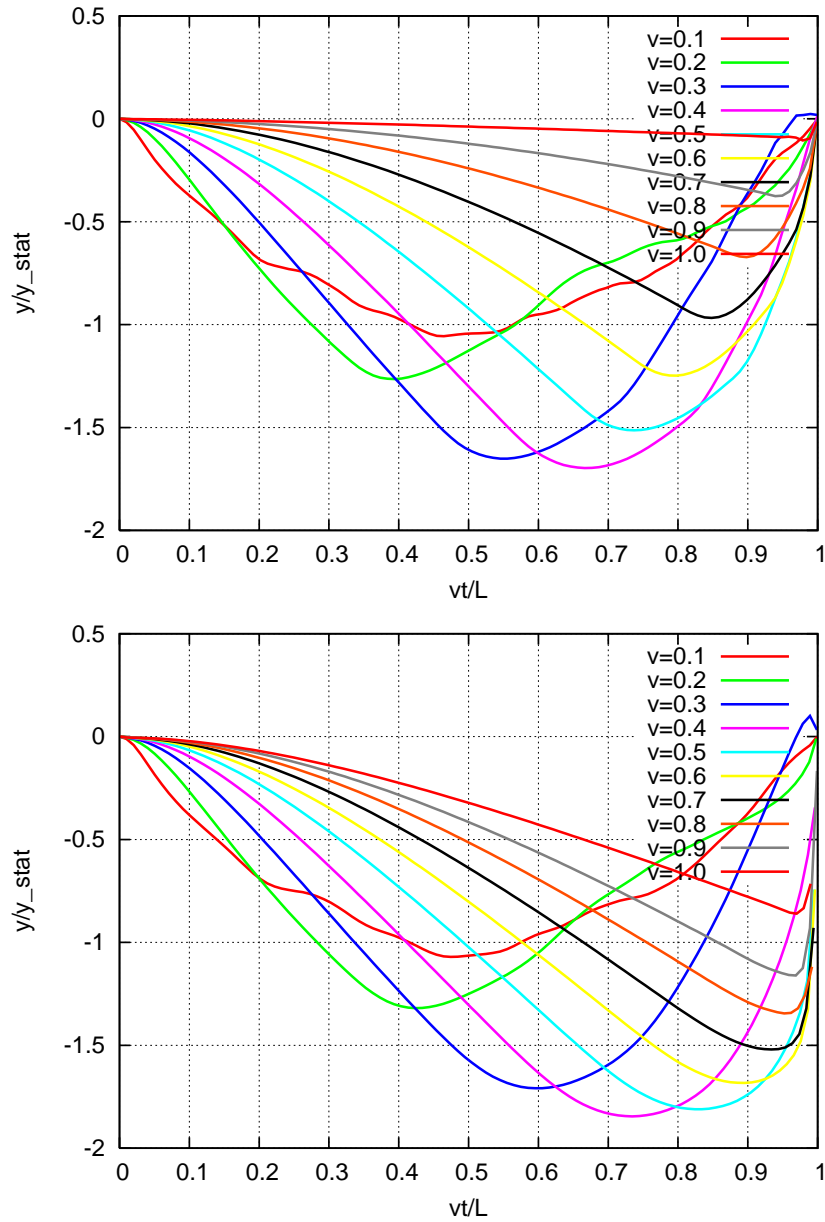
Zdecydowanie bezpieczniejsze jest zastąpienie stałego co do wartości obciążenia inercyjnego (rys. 7.19a) układem dwóch ustrojów: ważkiej struny oraz poruszającego się po niej oscylatora (rys. 7.19b). Zwiększając sztywność sprężyny zbliżamy nasz układ do układu podstawowego. Analizę numeryczną można wykonać jedną z wielu metod dyskretyzacji równań różniczkowych. Tu do zmiennej przestrzennej zastosowano metodę elementów skończonych, a do czasu metodę Newmarka oraz metodę różnic centralnych. Podstawowy algorytm polega na krokowym całkowaniu równania różniczkowego ruchu każdego z układów oddzielnie. W każdym kroku czasowym najpierw uzyskuje się przemieszczenia i prędkości węzłów struny. Następ-



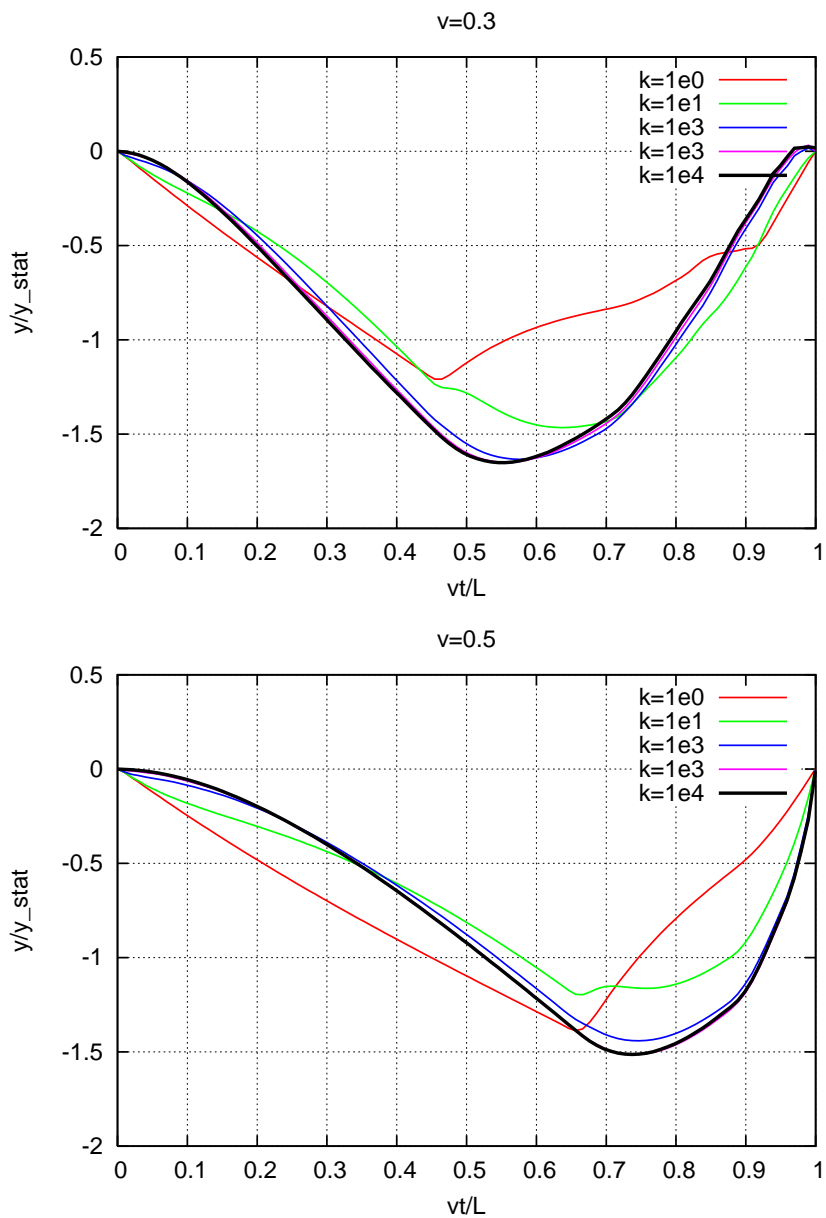
Rysunek 7.19: Schemat układu podstawowego (a) i układu zastępczego (b).

nie wartość przemieszczenia lub prędkości w punkcie kontaktu oscylatora i struny staje się warunkiem brzegowym rozwiązania równania ruchu oscylatora, przyjętego jako układ o dwóch stopniach swobody. Reakcja układu w punkcie kontaktu jest z kolei siłą obciążającą strunę. Iteracyjna poprawa wyników pozwala uzyskać końcowe rozwiązanie w danym kroku czasowym.

Możliwe są dwa podejścia: prędkościowe i przemieszczeniowe. W pierwszym przypadku prędkość punktu struny pod oscylatorem obciąża oscylator poprzez warunek brzegowy. Zgodność przemieszczeń w tym przypadku jest spełniona jako suma przyrostów przemieszczeń wynikających z krokowo zmiennej prędkości. W drugim przypadku zgodność ta wynika bezpośrednio ze zgodności zadawanych przemieszczeń, jako warunków brzegowych. Wyniki obu podejść pokazano na rysunkach 7.20. Podstawową sprawą jest zadanie odpowiednio wysokiej sztywności oscylatora. Przy niskiej wartości układ zastępczy mocno odbiega od układu podstawowego. Przy wysokiej wartości współczynnika k_0 układ jest źle uwarunkowany i iteracyjne równoważenie siły kontaktowej może nie być zbieżne. Rys. 7.21 pokazuje zmiany trajektorii przy rosnącej wartości k_0 . Należy tu podkreślić konieczność wielokrotnego rozwiązywania zadania w pojedynczym kroku czasowym. Niepewna jest też zbieżność rozwiązania iteracyjnego. Z tego względu taka droga postępowania nie jest zalecana.



Rysunek 7.20: Trajektorie ruchu masy przy różnej prędkości przejazdu: sprzężenie prędkościowe (górny wykres) i sprzężenie przemieszczeniowe (dolny wykres).



Rysunek 7.21: Zmiana trajektorii ruchu punktu struny przy rosnącej sztywności oscylatora, przy prędkości $0,3c$ i $0,5c$.

7.3. Element czasoprzestrzenny struny niosący masę

Ostatni człon $\delta(x - vt) m d^2 u(vt, t)/dt^2$ w równaniu (7.1) opisuje ruchome obciążenie inercyjne. Wyrażenie $d^2 u(vt, t)/dt^2$ jest pionowym przyspieszeniem masy oraz jednocześnie przyspieszeniem struny w punkcie styku masy ze struną (tj. $x = x_0 + vt$). Przyspieszenie masy $\partial^2 u(vt, t)/\partial t^2$ poruszającej się ze stałą prędkością v , zgodnie ze wzorem Renaudota (przedstawiającego w zasadzie pochodną zupełną), daje w wyniku trzy człony:

$$\frac{d^2 u(vt, t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=vt} + 2v \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=vt} + v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=vt}. \quad (7.54)$$

W ten sposób możemy wydzielić człon odpowiadający formą przyspieszeniu poprzecznemu, przyspieszeniu Coriolisa oraz przyspieszeniu odśrodkowemu.

W metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych tworzymy równania zależne od prędkości. Przyspieszenie masy $d^2 u(vt, t)/dt^2$ również jest uzależniane od prędkości:

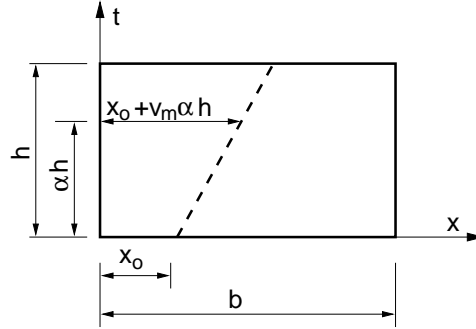
$$\frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=vt} + v \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=vt} + v \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=vt} \right]. \quad (7.55)$$

Pierwszy człon po prawej stronie, po pomnożeniu przez m , określa rzeczywiste siły bezwładności, a drugi wyraża siły podobne do sił tłumienia. W końcowej fazie analizy uzyskujemy trzy wynikowe macierze odpowiedzialne za siły poprzeczne (macierz ma postać macierzy bezwładności), siły tłumienia (macierz po pomnożeniu przez wektor prędkości odpowiada sile Coriolisa). Ostatnia, trzecia macierz, po pomnożeniu przez wektor prędkości określa siły potencjalne, odpowiadające sile odśrodkowej oraz siły węzłowe na początku kroku całkowania h .

Wykorzystajmy powyższe rozważania do numerycznej analizy członu określającego bezwładność masy w równaniu (7.1). Przy wyznaczaniu macierzy elementu przenoszącego masę skupioną wykorzystujemy identyczne kroki jak w przypadku samej struny. Całkujemy człon bezwładności

$$\int_0^h \int_0^b \mathbf{N}^* m \delta(x - vt) \frac{d^2 u(x_0 + v_m t, t)}{dt^2} dx dt. \quad (7.56)$$

Wykorzystujemy liniową interpolację prędkości (4.114). Prędkość wirtualną



Rysunek 7.22: Trajektoria masy w elemencie czasoprzestrzennym.

v^* przyjmujemy w następującej postaci:

$$v^*(x, t) = \mathbf{N}^* \dot{\mathbf{q}}_p = \delta(t - \alpha h) \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_p. \quad (7.57)$$

W wyniku konsekwentnego całkowania uzyskujemy dwie macierze: macierz bezwładności poprzecznej poruszającej się masy \mathbf{M}_m

$$\mathbf{M}_m = \frac{m}{h} \left[\begin{array}{cc|cc} -(1-\kappa)^2 & -\kappa(1-\kappa) & (1-\kappa)^2 & \kappa(1-\kappa) \\ -\kappa(1-\kappa) & -\kappa^2 & \kappa(1-\kappa) & \kappa^2 \end{array} \right], \quad (7.58)$$

w której $\kappa = (x_0 + v\alpha h)/b$, x_0 jest położeniem początkowym masy w elemencie czasoprzestrzennym w chwili $t = t_0$ (rys. 7.22) i macierz ruchomej masy w postaci macierzy tłumienia \mathbf{C}_m

$$\mathbf{C}_m = \frac{mv}{b} \left[\begin{array}{cc|cc} -(1-\kappa)(1-\beta) & (1-\kappa)(1-\beta) & -(1-\kappa)\beta & (1-\kappa)\beta \\ -\kappa(1-\beta) & \kappa(1-\beta) & -\kappa\beta & \kappa\beta \end{array} \right] \quad (7.59)$$

Rozpatrzmy teraz wkład przemieszczeń początkowych na kroku h . Całkujemy przez części pracę wirtualną

$$v^2 \int_0^h \int_0^b v^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dx dt = -v^2 \int_0^h \int_0^b \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} dx dt. \quad (7.60)$$

Przemieszczenia lewego i prawego końca wyrażone są przez prędkości $u_L = u_L^0 + h[\beta v_1 + (1-\beta)v_3]$ i $u_R = u_R^0 + h[\beta v_2 + (1-\beta)v_4]$. Możemy więc wyznaczyć potrzebne odkształcenia du_0/dx

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{u_R - u_L}{b} = \frac{u_R^0 - u_L^0}{b} + \frac{h}{b} [-\beta v_1 + \beta v_2 - (1-\beta)v_3 + (1-\beta)v_4]. \quad (7.61)$$

Macierz \mathbf{K}_m będzie więc macierzą sztywności

$$\mathbf{K}_m = \frac{hmv_m^2}{b^2} \left[\begin{array}{cc|cc} \beta & -\beta & 1-\beta & -(1-\beta) \\ -\beta & \beta & -(1-\beta) & 1-\beta \end{array} \right]. \quad (7.62)$$

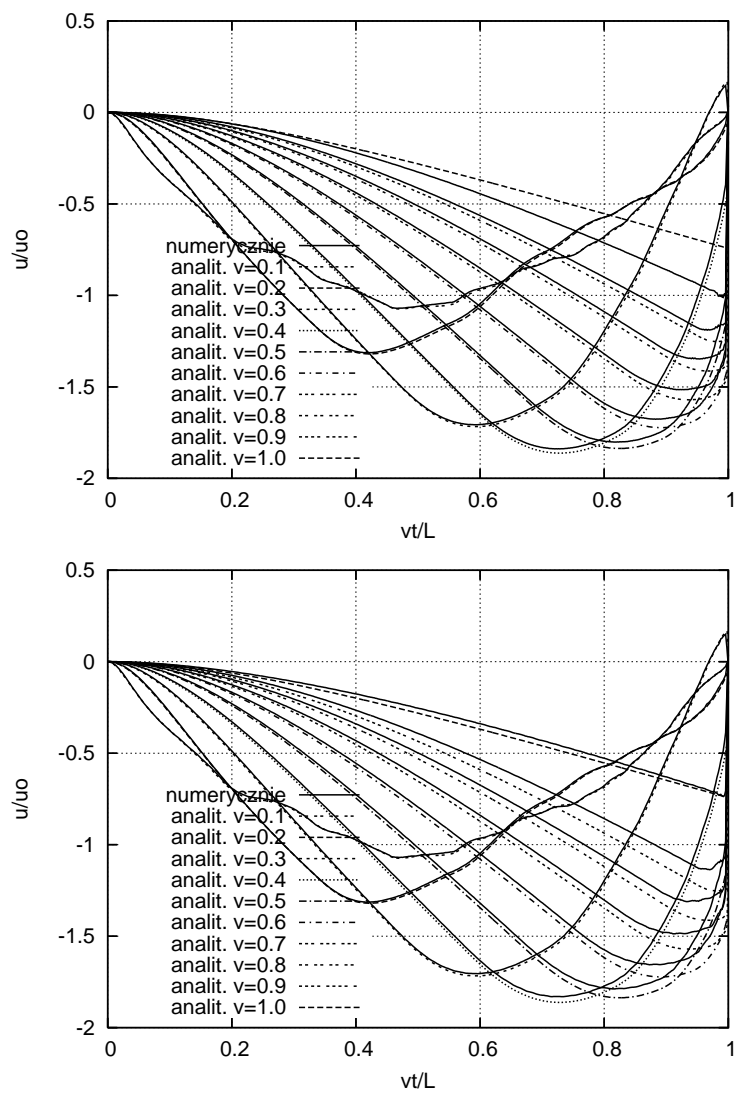
Człon $(u_R^0 - u_L^0)/b$ w równaniu (7.61) daje w wyniku siły węzłowe \mathbf{e} w warstwie czasoprzestrzennej.

7.3.1. Wyniki obliczeń numerycznych

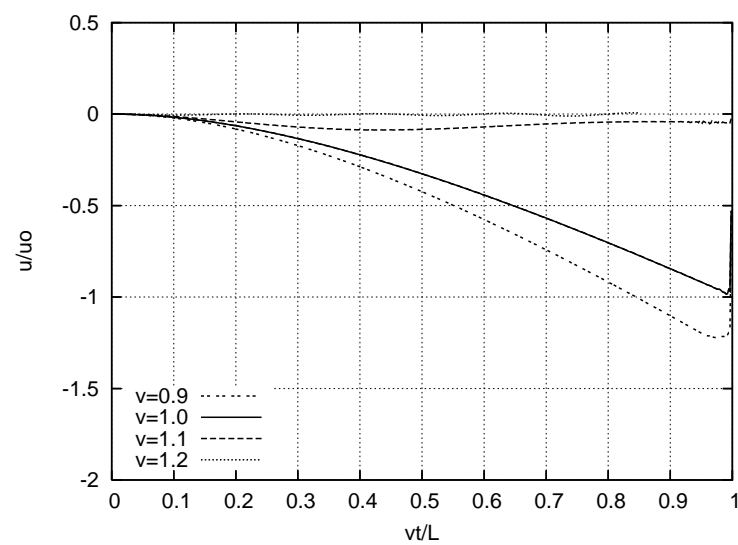
Wyniki przykładowych obliczeń, uzyskane metodą elementów czasoprzestrzennych mogą być porównane z wynikami półanalitycznymi. Wcześniejsze rozważania (rozdz. 7.1.1) pokazały nam specyfikę równania różniczkowego wykorzystywanego do opisu małych przemieszczeń konstrukcji pod ruchomym obciążeniem inercyjnym oraz jego charakterystyczne własności. W dalszych testach struna została podzielona na 200 odcinków przestrzennych. Przyjęto krok czasowy równy $b/40v_m$. Oznacza to, że przejazd odcinka między dwoma kolejnymi węzłami odbywa się w czasie 40 kroków czasowych. Wyniki otrzymane metodą elementów czasoprzestrzennych pokazują rysunki 7.23.

Możemy również przeprowadzić obliczenia przy większej prędkości jazdy v . Rys. 7.24 przedstawia przemieszczenia przy $0,9 \leq v/c \leq 1,2$. Zauważamy dobrą zbieżność trajektorii ruchu masy do wartości zerowej przy $v > c$. Również inne przykłady obliczeniowe dowodzą skuteczności metody numerycznej. Porównania przemieszczeń wybranych, ustalonych punktów struny w czasie wykazują jeszcze lepszą zbieżność z wynikami analitycznymi.

Na podstawie obserwacji wyników numerycznych możemy stwierdzić, że przy małych prędkościach przejazdu do celów inżynierskich poruszający się punkt masowy możemy zastąpić oscylatorem. Nie możemy natomiast stosować uproszczonego rozkładu masy na sąsiednie węzły siatki metody elementów skończonych lub czasoprzestrzennych elementów skończonych, według rys. 7.4. Przy wyższych prędkościach ruchu możemy stosować jedynie schematy numeryczne wyprowadzone poprawnie z równań różniczkowych ruchu. Nie można w prosty sposób wyrazić przyspieszenia d^2u/dt^2 w punkcie $x = vt$ odpowiednimi pochodnymi i w ten sposób zmodyfikować opis krokowy schemat całkowania równania ruchu.



Rysunek 7.23: Przemieszczenia punktu struny pod jadącą masą uzyskane metodą elementów czasoprzestrzennych przy $\alpha=0,5$ (rysunek górny) oraz przy $\alpha=1,0$ (rysunek dolny) porównane z wynikami metody półanalitycznej.



Rysunek 7.24: Przesunięcia punktu struny pod masą przy prędkości v równej 0,9, 1,0, 1,1 i 1,2 c .

7.4. Belka pod obciążeniem ruchym - metoda półanalityczna

Ruch belki Bernoulliego-Eulera obciążonej ruchomą masą opisuje równanie

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x-vt)P - \delta(x-vt)m \frac{\partial^2 u(vt,t)}{\partial t^2}, \quad (7.63)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 \quad (7.64)$$

i warunkami początkowymi

$$u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7.65)$$

Stosujemy transformację Fouriera podobnie jak w przypadku równania struny i otrzymujemy następującą postać końcową

$$\begin{aligned} \ddot{V}(j,t) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(k,t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \dot{V}(k,t) \cos \omega_k t \sin \omega_j t + \\ + \Omega^2 V(j,t) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 V(k,t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t = \frac{P}{\rho A} \sin \omega_j t, \end{aligned} \quad (7.66)$$

gdzie

$$\omega_k = \frac{k\pi v}{l}, \quad \omega_j = \frac{j\pi v}{l}, \quad \Omega^2 = \frac{EI j^4 \pi^4}{\rho A l^4}, \quad \alpha = \frac{2m}{\rho A l}. \quad (7.67)$$

Równanie (7.66) nie daje się rozwiązać analitycznie. Tu również posłużymy się numerycznym całkowaniem wynikowego macierzowego równania różniczkowego

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{V}(1,t) \\ \ddot{V}(2,t) \\ \vdots \\ \ddot{V}(n,t) \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{V}(1,t) \\ \dot{V}(2,t) \\ \vdots \\ \dot{V}(n,t) \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} V(1,t) \\ V(2,t) \\ \vdots \\ V(n,t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}. \quad (7.68)$$

W skróconej formie można to zapisać następująco:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P}. \quad (7.69)$$

W przypadku belki Timoshenki postępujemy podobnie jak w przypadku belki Bernoulliego-Eulera. Równanie różniczkowe doprowadzamy do macierzowego równania

$$\mathbf{\Gamma}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{U}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P} \quad . \quad (7.70)$$

Również w tym przypadku etap końcowy obliczeń jesteśmy zmuszeni realizować numerycznie. Na rys. 7.25 i 7.26 przedstawiono przemieszczenia belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem, w przypadku dwóch różnych zestawów danych materiałowych.

7.4.1. Klasyczny model numeryczny belki

Belka jest drugim typem konstrukcji poddanej obciążeniu ruchomemu. Niemal wszystkie obliczenia numeryczne wykonywane obecnie wykorzystują macierze metody sztywności (obecnie zaliczanej do metody elementów sztywności). Model numeryczny belki Eulera jest stosunkowo prosty. Belka Timoshenki ulega dodatkowo odkształceniom postaciowym i jej opis jest nieco bardziej złożony. Oba opisy, w zależności od potrzeb, wykorzystuje się skutecznie w obliczeniach symulacyjnych.

Belka Eulera

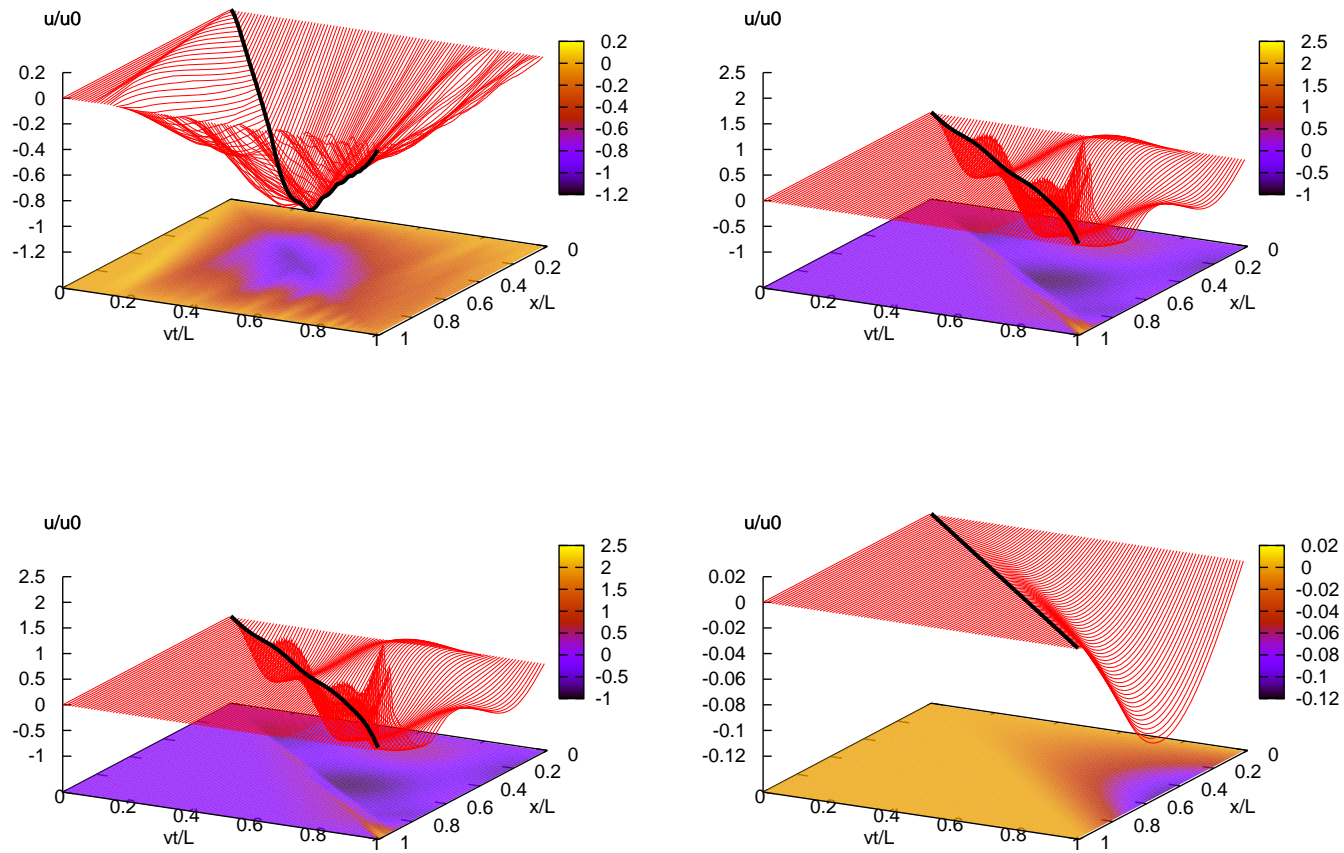
W przypadku obciążenia bezmasowego bez trudu można wykorzystać klasyczny opis metody elementów skończonych. W celach porządkowych podajemy macierz sztywności elementu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ (sym.) & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}, \quad (7.71)$$

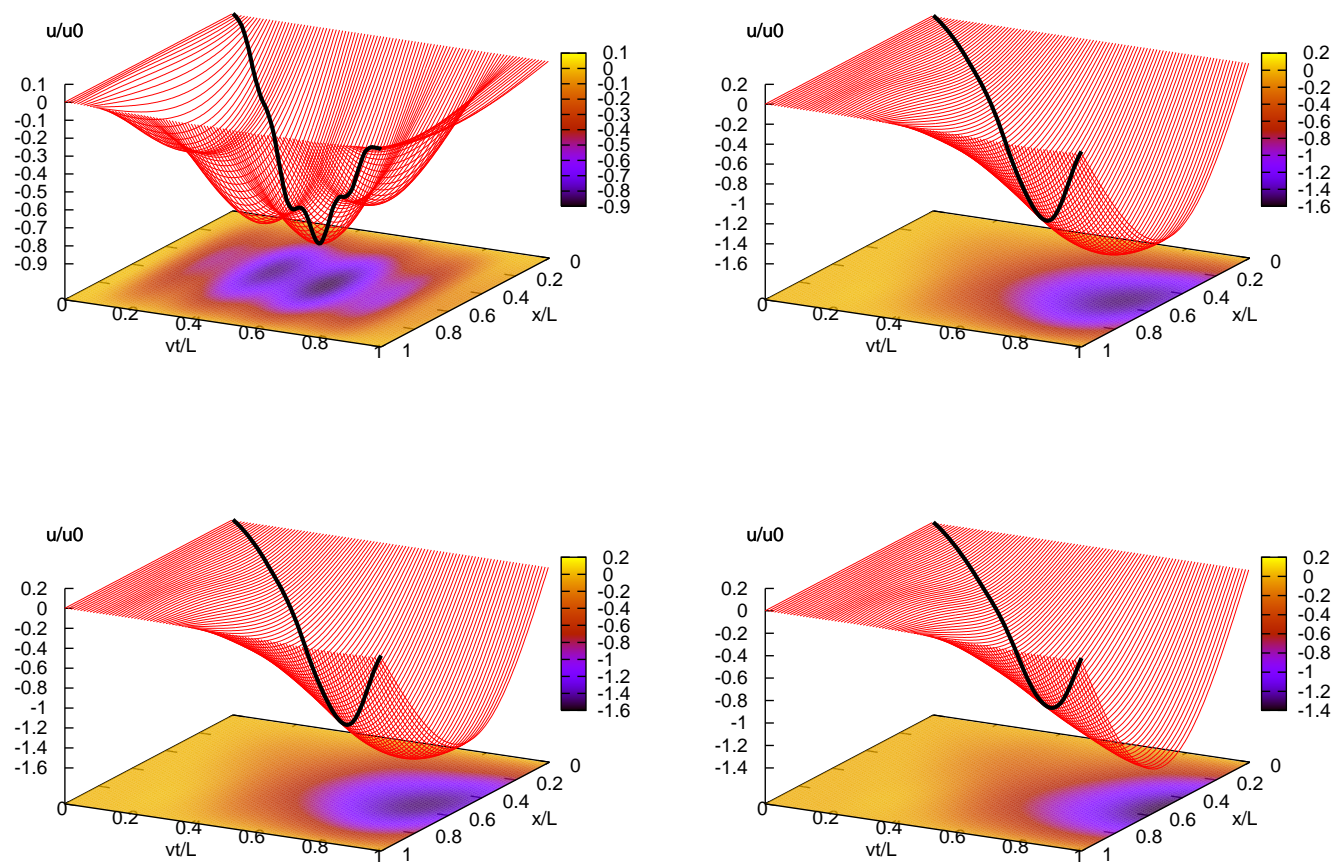
oraz macierz bezwładności

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ (sym.) & & & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (7.72)$$

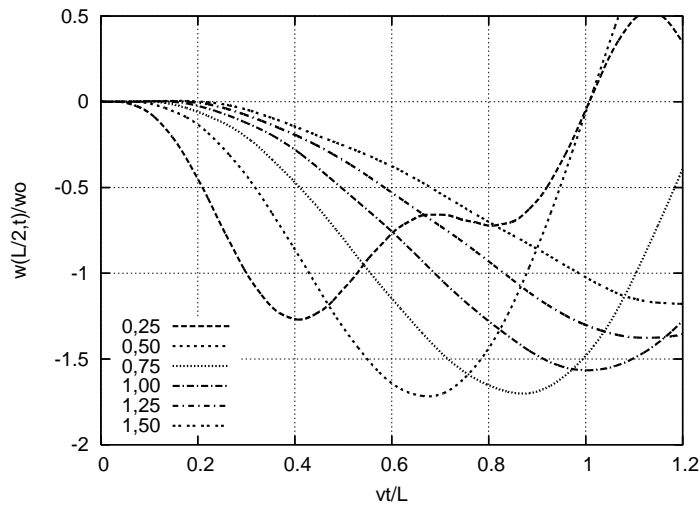
Przykładowe obliczenia wykonano przy prostym rozwinięciu przyspieszenia poprzecznego masy względem zmiennej $x = vt$. Rys. 7.27 przedstawia wykres



Rysunek 7.25: Symulacja przemieszczeń belki Timoshenki obciążonej ruchomą masą przy prędkości $v=0,1, 0,4, 0,7$ i $1,0$ (prędkość fali ścinania $=0,63$, prędkość fali zginania $= 1,00$)



Rysunek 7.26: Symulacja przemieszczeń belki Timoshenki obciążonej ruchomą masą przy prędkości $v=0,1, 0,4, 0,7$ i $1,0$.



Rysunek 7.27: Przemieszczenia pionowe środka przęsła odniesione do ugięcia statycznego w_0 .

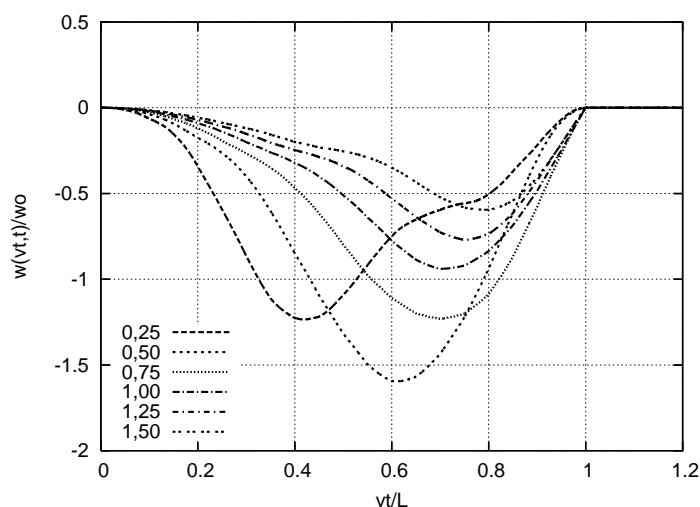
ugięcia środka belki pod obciążeniem inercyjnym, poruszającym się z prędkością v . Prędkość wyrażona jest przez parametr $\alpha_m = vL/\pi \cdot \sqrt{\rho A/EI}$. Rys. 7.28 ukazuje ugięcia pod jadącą masą. Wyniki te nie odpowiadają ściśle rozwiązaniom analitycznym.

Belka Timoshenki

Model Timoshenki dopuszcza udział sił poprzecznych w deformacji przekroju poprzecznego belki. Powodują one obrót powierzchni normalnej do osi belki. W modelu Timoshenki uśrednia się wpływ sił ścinających w przekroju poprzecznym. Odształcenie postaciowe ma wartość $\gamma = \theta - w_{,x}$ i jest różnicą między kątem obrotu powierzchni normalnej i nachylenia osi obojętnej. Całkowita energia odkształcenia wyrażana jest dwoma niezależnymi funkcjami $w(x)$ i $\theta(x)$. Energię opisuje funkcjonal

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \theta_{,x}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} kGA(\theta - w_{,x})^2 dx - \int_0^L q w dx . \quad (7.73)$$

Współczynnik k uwzględnia poprawkę wynikającą z uśrednienia rozkładu odkształcenia postaciowego w grubości belki. W przypadku prostokątnego przekroju poprzecznego wynosi on $5/6$. Macierz sztywności, w rozbięciu na



Rysunek 7.28: Przeszyczenia pionowe punktu pod masą, odniesione do ugięcia statycznego w_0 .

część związaną ze zginaniem \mathbf{K}_b i ścinaniem \mathbf{K}_s , ma postać następującą:

$$\mathbf{K}_b = \frac{EI}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \frac{kGh}{L} \begin{bmatrix} 1 & L/2 & -1 & L/2 \\ L^3/3 & -L/2 & L^2/6 & \\ (sym.) & 1 & -L/2 & \\ & & L^2/3 & \end{bmatrix}. \quad (7.74)$$

Całkowanie wielomianów metodą Gaussa (kwadratura Gaussa) polega na zastąpieniu całki oznaczonej sumą iloczynów wartości funkcji podcałkowej w odpowiednio dobranych węzłach (punktach Gaussa) i wag odpowiadających tym punktom (całość mnożona przez długość przedziału całkowania). W zależności od stopnia całkowanego wielomianu n należy dobrać odpowiednią liczbę punktów Gaussa k :

$$k \geq 2n - 1. \quad (7.75)$$

Z uwagi na blokowanie przemieszczeń i przesztynianie modelu numerycznego stosowano zredukowane całkowanie. Polegało to na przyjęciu mniejszej liczby punktów całkowania kwadratury Gaussa. W literaturze można się z tym zapoznać np. w [154].

7.5. Element belki niosący masę

Dyskretny element belki, zarówno w klasycznej metodzie elementów skończonych, jak i metodzie elementów czasoprzestrzennych jest dużo bardziej złożony niż element struny. Wynika to choćby z dwukrotnie większej liczby stopni swobody elementu belki. Nie udało się dotąd uzyskać konsekwentnego przejścia od równań różniczkowych do numerycznego schematu całkowania równania różniczkowego metodą Newmarka. Sukces przyniosło sformułowanie czasoprzestrzenne. Przedstawimy je poniżej.

7.5.1. Elementy czasoprzestrzenne belki Bernoulliego–Eulera niosące masę

Pamiętamy, że kapeluszowa funkcja wirtualna jest stała w czasie i w przypadku belki Bernoulliego–Eulera (B-E) zapisuje się ją w następujący sposób

$$v_m^*(x, t) = \left(1 - 3\frac{x^2}{b^2} + 2\frac{x^3}{b^3}\right) v_3 + \dots \dot{\varphi}_3 + \dots v_4 + \dots \dot{\varphi}_4. \quad (7.76)$$

Rozpoznajemy tu użycie znanych funkcji kształtu do opis przemieszczeń (lub prędkości) za pomocą węzłowych prędkości liniowych oraz węzłowych prędkości obrotowych. Poniżej przedstawimy obliczenia prowadzące do wyznaczenia pierwszego elementu macierzy bezwładności ruchomej masy M_m w belce B-E:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_m)_{11} &= -\frac{m}{h} \int_0^h \int_0^b \delta(x - x_0 - vt) \left(1 - 3\frac{x^2}{b^2} + 2\frac{x^3}{b^3}\right)^2 dx dt = \\ &= -\frac{m}{h} \int_0^h \int_0^b \left[1 - 3\frac{(x_0 + vt)^2}{b^2} + 2\frac{(x_0 + vt)^3}{b^3}\right]^2 dx dt. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Po wprowadzeniu podstawienia

$$s = \frac{x_0 + vt}{b} \quad \text{i} \quad ds = \frac{v}{b} dt, \quad (7.78)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_m)_{11} &= -\frac{m}{h} \int_0^h (1 - 3s^2 + 2s^3)^2 ds = \\ &= -\frac{m}{h} \frac{b}{v} \left(\frac{4}{7}s^7 - 2s^6 + \frac{9}{5}s^5 + s^4 - 2s^3 + s \right) \Big|_0^h. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Po scałkowaniu powracamy do zmiennej t

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_m)_{11} = & -\frac{m}{h} \frac{b}{v} \left[\frac{4}{7} \left(\frac{x_0 + vt}{b} \right)^7 - 2 \left(\frac{x_0 + vt}{b} \right)^6 + \frac{9}{5} \left(\frac{x_0 + vt}{b} \right)^5 + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{x_0 + vt}{b} \right)^4 - 2 \left(\frac{x_0 + vt}{b} \right)^3 + \frac{x_0 + vt}{b} \right] \Bigg|_0^h.
 \end{aligned}
 \tag{7.80}$$

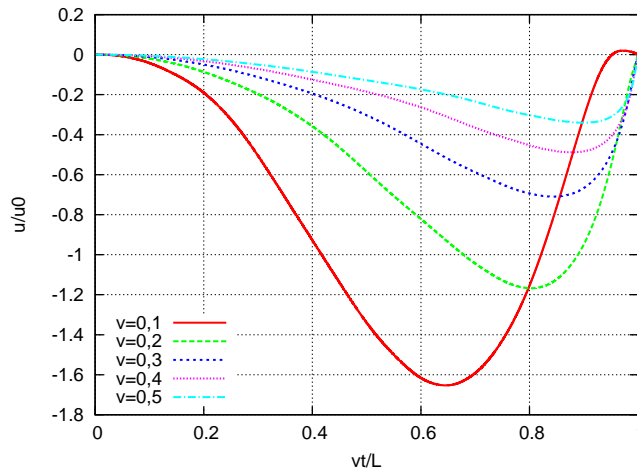
Uwzględniając granice całkowania, otrzymujemy jeden z elementów macierzy bezwładności ruchomej masy M_m

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_m)_{11} = & -\frac{m}{560b^6} [560b^6 (4\kappa^6 - 12\kappa^5 + 9\kappa^4 + 4\kappa^3 - 6\kappa^2 + 1) + \\
 & + 280b^4 v^2 h^2 (10\kappa^4 - 20\kappa^3 + 9\kappa^2 + 2\kappa - 1) + \\
 & + 21b^2 v^4 h^4 (20\kappa^2 - 20\kappa + 3) + 5v^6 h^6] ,
 \end{aligned}
 \tag{7.81}$$

gdzie

$$\kappa = \frac{x_0 + vh/2}{b} .
 \tag{7.82}$$

Postać macierzy \mathbf{M}_m , \mathbf{C}_m i \mathbf{K}_m odpowiedzialnych za opis ruchomej masy zostały zamieszczone w dodatku A. Musimy pamiętać, że trzy pierwsze macierze łączą wektory prędkości w dwóch następujących po sobie chwilach. Składają się one z dwóch kwadratowych podmacierzy: lewej i prawej. Łącznie mają one wymiar $s \times 2s$, gdzie s jest liczbą stopni swobody w węzle badanej struktury. Macierz E_m ma wymiar $s \times s$. Wszystkie macierze przedstawione w dodatku dotyczą masy $m = 1$, więc muszą być mnożone przez rzeczywistą masę m . Wprowadzono również oznaczenia $\xi = vh/b$ i κ dane wzorem (7.82). Otrzymane rozwiązania numeryczne (rys. 7.29) są identyczne z wynikami podejścia półanalitycznego z rozdziału 7.4.



Rysunek 7.29: Trajektorie ruchu masy poruszającej się po belce B–E przy różnych prędkościach v , uzyskane numerycznie z zastosowaniem kapeluszowych funkcji wirtualnych.

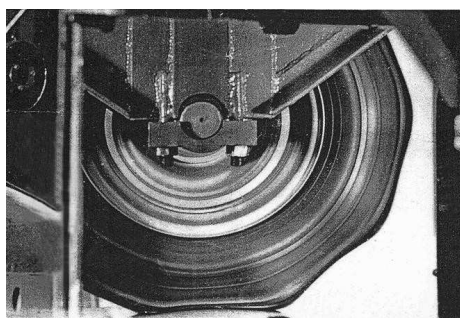
7.6. O rozwiązaniu numerycznym równań ruchu belki Timoshenki

Różniczkowe równanie ruchu belki Timoshenki w formie jednego równania (7.63) ma bardzo poważną wadę, ze względu na numeryczne podejście metodą czasoprzestrzenną. Wadą tą jest czwarta pochodna względem czasu t . Ponieważ czas w rzeczywistej funkcji kształtu ma rozkład liniowy, nie mamy możliwości dyskretnego przedstawienia tej pochodnej. Konieczne jest przeprowadzenie analizy belki Timoshenki w przypadku, gdy równanie ruchu przedstawione jest w postaci dwóch równań sprzężonych ze sobą względem przemieszczeń i kątów. Zagadnienie ruchomego obciążenia bezwładnościowego poruszającego się po belce Timoshenki jest problemem samym w sobie. Ze względu na swą złożoność nie zostanie przedstawiony w niniejszej pracy.

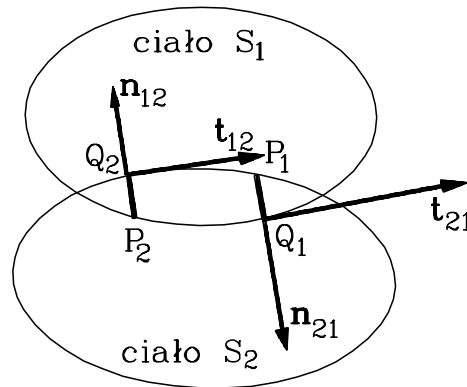
Zagadnienia kontaktowe

Kontakt toczny jest szczególnym przypadkiem mechaniki kontaktu i pojawia się w wielu zastosowaniach technicznych: kontakt koła kolejowego z szyną, opony w drogą (rys. 8.1), łożyska toczne, walcowanie. Znaczenie zagadnienia kontaktu tocznego podkreślano w pracach Johnsona [92, 93], Kalkera [99, 100, 101], Knothego [79, 119, 162] i wielu innych. Jednostronne warunki kontaktu mogą być wymuszone na wiele sposobów [115]. Spróbujemy w skrócie sklasyfikować podstawowe metody obliczeniowe, stosowane w analizie kontaktu ciał i podać ich najbardziej charakterystyczne cechy.

Metody więzów geometrycznych



Rysunek 8.1: Przykład stacjonarnej fali w oponie samochodowej.



Rysunek 8.2: Przybliżone modelowanie oddziaływania ciał przy przybliżonej konfiguracji w przedziale czasowym procesu deformacji.

- *Metoda jawna rzutowania.*

Metoda jest łatwa w zastosowaniu, lecz nie gwarantuje zachowania masy w procesie deformacji. Nie są znane bezpośrednio siły kontaktu.

Na koniec kroku czasowego punkt P_1 , który przeniknął brzeg ciała S_2 jest rzutowany na ciało S_2 w punkcie Q_1 i uzyskuje status kontaktu (rys. 8.2). Prędkość normalna ustalana jest jako równa zero. Prędkość styczna pozostaje nie zmieniona. Kontrolowany jest znak sił węzłowych. Należy stosować mały krok czasowy w celu uzyskania wymaganej dokładności.

- *Metoda niejawna rzutowania.*

Metoda zachowuje masę ciała. Siły kontaktu nie są bezpośrednio znane. Pozostawanie punktu w strefie kontaktu określa znak siły normalnej. Metoda ta może być udoskonalona poprzez wprowadzenie zmodyfikowanych ograniczeń na jednostronne więzy geometryczne [28]. Wówczas upodabnia się do metody funkcji kary przy więzach geometrycznych w sformułowaniu prędkościowym.

W kroku czasowym sprawdzany jest jednakowy status punktu kontaktu i punktów swobodnego brzegu. Punkt P_1 przenikający brzeg ciała S_2 w konfiguracji przybliżonej rzutowany jest na ciało S_2 na punkt należący do odcinka P_1Q_1 (rys. 8.2). Odcinek ten wynika z warunku kontaktu ciał S_1 i S_2 i jest ustalany w sposób przybliżony

w chwili t_0 . Punkt P_1 uzyskuje status kontaktu. Prędkość normalna na końcu kroku ustalana jest jako równa zero. Prędkość styczna może zmieniać się dowolnie. Można wyznaczyć nowe przybliżenie geometrii w chwili końcowej przedziału czasu t_1 . Znak siły normalnej pozwala określić punkt jako swobodny lub będący w kontakcie. Krok czasowy może być dłuższy niż w wariancie jawnym metody.

Metody funkcji kary

Siła normalna kontaktu wyraża się wartością

$$\mathbf{F}_{n_{ij}} = \zeta \mathbf{u}_{n_{ji}} H(-u_{n_{ji}}),$$

gdzie $H(\cdot)$ jest funkcją Heaviside'a, a $\zeta = 1/\kappa$ z małą wartością κ jest współczynnikiem kary.

Warunki kontaktu $\mathbf{B}\mathbf{u} \geq \boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{B} – macierz kinematyki warunków brzegowych, $\boldsymbol{\gamma}$ – wektor początkowych szczelin, spełnione są w sposób przybliżony. Dodawany jest fikcyjny człon energetyczny (człon funkcji kary) $\pi(\mathbf{u}) = \bar{\pi}(\mathbf{u}) + \kappa[(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma})^T (\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma})]$, $\bar{\pi} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}$, gdzie κ jest parametrem funkcji kary. Interpretacją fizyczną κ może być sztywność fikcyjnej sprężynki pomiędzy dwoma punktami kontaktu. Ostatecznie otrzymuje się $(\mathbf{K} + \kappa \mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{u} = \mathbf{f} + \kappa \mathbf{B} \boldsymbol{\gamma}$.

Dobór parametru κ omawiany jest np. w pracach [66, 67]. Za optymalną podano wartość [179] $\kappa = k_1/\sqrt{n\varepsilon}$, gdzie ε – dokładność maszyny cyfrowej (przy której $1 + \varepsilon > \varepsilon$), n – liczba niewiadomych, k_1 – najmniejsza sztywność elementów będących w kontakcie.

- *Funkcja kary nałożona na przemieszczenia normalne w sformułowaniu przemieszczeniowym [157].*
Metody te stosuje się do opisów przyrostowych, przy małych przyrostach odkształceń.
- *Funkcja kary nałożona na prędkości normalne w sformułowaniu prędkościowym.*
Znajduje zastosowanie w sytuacji, kiedy punkt utrzymuje się w kontakcie w wyniku numerycznej niestabilności, podczas zmiany statusu węzła.
- *Funkcja kary nałożona na przemieszczenia normalne w sformułowaniu prędkościowym.*

Przemieszczeń normalnych używa się jedynie do określenia statusu kontaktu. Oblicza się je całkując prędkość. Metoda nazywana jest dualną metodą miękkiej penetracji (*ang.* dual soft way method) z uwagi na fizyczną analogię zachowania się ciała, z możliwością małej penetracji, proporcjonalnej do siły normalnej, skierowanej w kierunku przeciwnym. Metoda jest wygodna pod warunkiem, że człon zawierający siły kontaktu nie dominuje w funkcjonałe energetycznym.

Metody mieszane [4, 51, 90]

- *Metoda mnożników Lagrange'a* [88, 48].

Jest ona sformułowana jako zadanie minimalizacji:

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n^*) < L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) < L(\mathbf{v}^*, \mathbf{F}_n) ,$$

gdzie

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) = \Phi(\mathbf{v}) + \langle \mathbf{F}_n, \mathbf{v} \rangle .$$

$\langle \mathbf{F}_n, \mathbf{v} \rangle$ jest formą liniową, $\Phi(\mathbf{v})$ jest wypukłym funkcjonałem pola prędkości, \mathbf{F}_n jest mnożnikiem Lagrange'a, będącym w praktyce siłą normalną.

Realizując metodę mnożników Lagrange'a w formie dyskretnej postępuje się następująco. Warunki kontaktu $\mathbf{B}\mathbf{u} \geq \boldsymbol{\gamma}$ dodaje się do zdyskretyzowanej postaci energii potencjalnej $\pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) = \bar{\pi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma})$, gdzie $\boldsymbol{\Lambda}$ jest wektorem mnożników Lagrange'a. Ostatecznie otrzymuje się układ równań

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}$$

o rozbudowanej macierzy współczynników w stosunku do liczby stopni swobody zadania. Jest on źle uwarunkowany. Nieodpowiednia kolejność niewiadomych w podmacierzy macierzy współczynników może prowadzić do osobliwości. Z tego względu utrudnione jest stosowanie tego podejścia do zadań 3-wymiarowych. Zbieżność metody jest zwykle słaba. Z tego względu stosuje się metody powiększonego lagrangianu (*ang.* augmented Lagrangian), których zbieżność jest zdecydowanie lepsza.

- *Metoda powiększonego lagrangianu.*

Metodę formułuje się poprzez dodanie do lagrangianu dodatkowego członu. Ostatecznie jest

$$L_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) = L(\mathbf{v}, \mathbf{F}_n) + \frac{\zeta}{2} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{d}\|^2 .$$

W trakcie realizacji dodanie do energii potencjalnej członu $-\frac{1}{2\kappa}\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{\Lambda}$ regularyzuje wynikowy układ równań metody mnożników Lagrange'a. Zerowa podmacierz zastępowana jest macierzą diagonalną $-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}$. Nie usuwa to wprawdzie trudności związanych z osobliwością podmacierzy w układzie równań, ale ułatwia jego rozwiązanie. Warunki kontaktu spełnione są w sposób przybliżony. Wówczas \mathbf{u} spełnia zmodyfikowany warunek $\mathbf{B}\mathbf{u} - \gamma - \frac{1}{\kappa}\mathbf{\Lambda} = 0$. W trakcie iteracyjnego rozwiązywania rozszerzonego układu równań zmienia się liczba aktywnych ograniczeń. Trudność tą można usunąć wprowadzając warunki kontaktu przy wszystkich węzłach mogących znaleźć się w kontakcie. Metoda powiększonego lagrangianu wraz z algorytmem Uzawa [65] prowadzi do iteracyjnego schematu rozwiązania dwóch odrębnych zadań: zadania opisanego prędkościami z klasycznym rozmiarem macierzy oraz zadania kontaktowego zawierającego siły, z prędkościami jako parametrem. Przybliżone siły normalne dają nowe pole prędkości, a następnie wyznaczane jest kolejne przybliżenie sił. W pracy [4] proponuje się wykorzystanie uogólnionej metody Newtona–Raphsona. W innych pracach iteracyjne rozwiązywanie zadania kontaktowego połączone jest z iteracyjną metodą Gaussa–Seidela rozwiązywania wynikowego układu równań (np. [123]).

W dalszej części rozdziału przedstawiony zostanie warunek kontaktu Signoriniego odniesiony do warstwy czasowej $[t_0, t_1]$. Do modelowania warunków kontaktu zastosowana zostanie zmienna w czasie siatka przestrzenna. Wprowadzenie dodatkowych węzłów w czasie (lokalnie gęstszy podział w czasie) pozwala zbudować wygodniejszy schemat obliczeniowy zadania kontaktowego. Nieokreśloności powstałe przy obliczaniu przemieszczeń poprzez całkowanie prędkości (nieciągłych w chwili kontaktu) można usunąć stosując technikę hamowania ruchu w kroku poprzedzającym kontakt. Wymienione podejścia wykorzystano do symulacji numerycznej kontaktu tocznego w układzie koło–szyna. Pokazano w tym zadaniu proces oscylacji siły kontaktu i powstające w efekcie nierównomierne zużycie powierzchni. W przypadku ciała o małej sztywności uwzględniono duże przemieszczenia i obroty. Przeprowadzono obliczenia drgań sprężystej obryczy usztywnionej cięgnami przy odbiciu od sztywnego podłoża.

8.1. Dynamiczne warunki kontaktu

Wprowadźmy ruch ciała odniesienia. $\delta \mathbf{x}$ będzie przemieszczeniem $P_0\vec{P}_1$ (rys. 8.3):

$$\delta \mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} dt \quad (8.1)$$

i

$$\mathbf{u}_n = \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d . \quad (8.2)$$

Szczelina d oznaczana przez QK na rys. 8.3 jest wyznaczana przez

$$d = (P_1\vec{P}_0 - P_1\vec{Q}) \cdot \mathbf{n} . \quad (8.3)$$

\mathbf{F} jest siłą kontaktu, złożoną z sił normalnych do powierzchni kontaktu i sił stycznych, zgodnych z prawem tarcia:

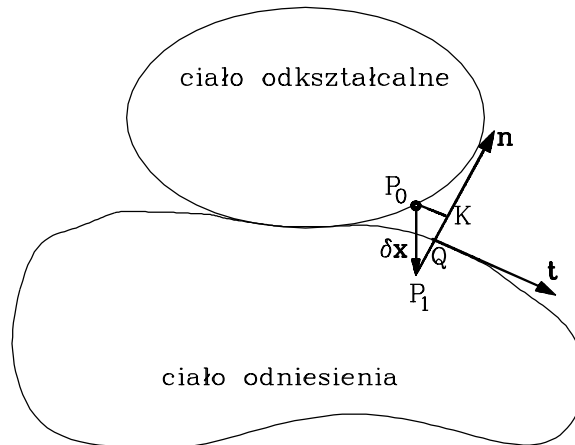
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t , \quad (8.4)$$

gdzie:

$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ jest siłą normalną, $\mathbf{F}_n = F_n \cdot \mathbf{n}$,

$\mathbf{F}_T = \mathbf{F} - \mathbf{F}_n$ jest siłą styczną. Przyjęte oznaczenia podano na rys. 8.2.

Należy tu podkreślić, że warunki kontaktu opisane są przemieszczeniami normalnymi. Jeśli używa się sformułowań prędkościowych, poprawne ujęcie



Rysunek 8.3: Konfiguracja przed procesem deformacji oraz przesunięcie punktu P .

warunku kontaktu (warunku niepenetrowania) uzyskuje się przy wykorzystaniu do wyznaczenia przemieszczenia związku (8.1).

Przyjmijmy, że ciało S_j będzie ciałem odniesienia. Normalna zewnętrzna siły n_{ij} (rzeczywista bądź założona) wyznaczana jest w punkcie kontaktu z innym ciałem, przy czym punkt ten może być rzeczywistym punktem kontaktu, bądź wstępnie założonym w procesie obliczeniowym. W szczególności może dojść do kontaktu między dwoma obszarami tego samego ciała. Płaszczyzna styczna w punkcie kontaktu pozwala wyznaczyć dwie pozostałe osie układu odniesienia. Indeksami i i j oznaczają będziemy numer ciała. n będzie kierunkiem normalnym, a T stycznym.

Względne przemieszczenie normalne punktu ciała S_i względem ciała S_j wynosi

$$u_{n_{ij}} = \mathbf{u}_{ij} \mathbf{n}_{ij} , \quad (8.5)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_{ij}(t) = \mathbf{u}_{ij}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_{ij} dt. \quad (8.6)$$

\mathbf{v}_{ij} jest względną prędkością punktów ciała S_i w układzie odniesienia związanym z ciałem S_j i ma składowe normalną $\mathbf{v}_{n_{ij}}$ i styczną $\mathbf{v}_{T_{ij}}$:

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_{n_{ij}} + \mathbf{v}_{T_{ij}}. \quad (8.7)$$

Siła normalna skierowana od ciała S_j do ciała S_i określana jest następująco:

$$F_{n_{ji}} = \mathbf{F}_{ji} \mathbf{n}_{ji}, \quad (8.8)$$

zaś styczną siłą kontaktu:

$$F_{T_{ji}} = \mathbf{F}_{ji} - F_{n_{ij}} \mathbf{n}_{ji}. \quad (8.9)$$

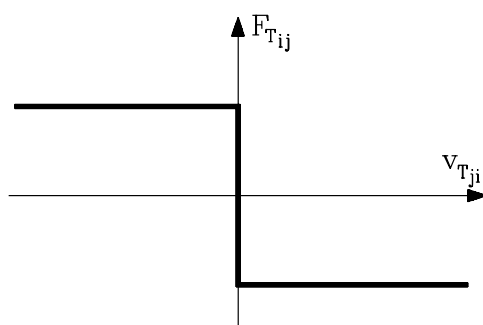
Ogólnie warunki tarcia opisane są przez warunki dyssypacji

$$\mathbf{F}_T \cdot \mathbf{v}_T \leq 0 \quad . \quad (8.10)$$

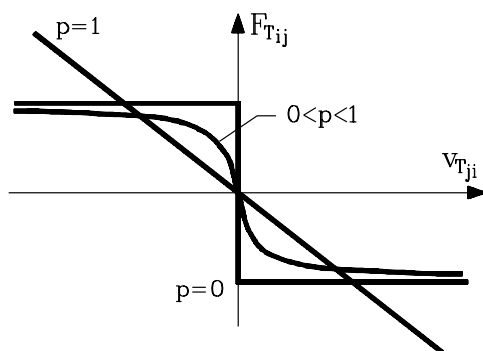
Prawo tarcia określa wyrażenie

$$\mathbf{F}_T = \mathcal{H}(\mathbf{v}) \quad (8.11)$$

gdzie $\mathcal{H}(\mathbf{v})$ jest funkcjonałem historii prędkości, spełniającym takie same warunki co równania reologiczne. Prawo tarcia jako prawo powierzchniowe winno uwzględniać własności ciała z wypełniającym je ośrodkiem ciągłym. Przykładem prawa tarcia może być:



Rysunek 8.4: Wykres (v_T, F_T) prawa tarcia Coulomba.



Rysunek 8.5: Wykres (v_T, F_T) prawa tarcia lepkiego: $F_{T_{ij}} = -\alpha |v_{T_{ij}}|^{p-1} v_{T_{ij}}$.

- prawo tarcia Coulomba — ([130], rys. 8.4), jeśli $|F_T| < f|\frac{u_n}{\kappa}H(u_n)|$, to $v_T = 0$ i $F_T = \mathcal{H}(u_n, v_T) = -f|\frac{u_n}{\kappa}H(u_n)|\text{sgn}(v_T)$.

$$\mathbf{F}_{T_{ji}} = -\mu F_{n_{ij}} \frac{\mathbf{v}_{T_{ij}}}{\|\mathbf{v}_{T_{ij}}\|} \quad (8.12)$$

- prawo tarcia lepkiego (Nortona–Hoffa) (rys. 8.5)

$$\mathbf{F}_{T_{ji}} = -\alpha \|\mathbf{v}_{T_{ij}}\|^{p-1} \mathbf{v}_{T_{ij}}. \quad (8.13)$$

- zregularyzowane prawo Nortona–Hoffa

$$\mathbf{F}_{T_{ji}} = -\alpha (\|\mathbf{v}_{T_{ij}}\| + \|\mathbf{v}_{T_{ij}}\|)^{p-1} \mathbf{v}_{T_{ij}}, \quad (8.14)$$

gdzie \mathbf{v}_0 jest pewnym małym wektorem, a $\|\mathbf{v}_0\|$ pewną małą liczbą dodatnią. P jest liczbą z przedziału $[0, 1]$.

Przypadkiem granicznym tarcia lepkiego przy $p = 0$ jest tarcie Tresci. Przy $p = 0$ i α zależnym od sił normalnych utrzymuje się prawo tarcia Coulomba.

Prawo tarcia można w związku z powyższym zapisać ogólnie jako

$$\mathbf{F}_{T_{ji}} = \mathbf{H}(\mathbf{v}_{T_{ij}}). \quad (8.15)$$

Warunki kontaktu Signoriniego spełnione są w chwilach t_0 i t_1 , jeśli

$$\begin{aligned} u_{n_{ij}} - d_0 &\leq 0, \\ F_{n_{ji}} &\leq 0, \\ F_{n_{ji}} (u_{n_{ij}} - d_0) &= 0, \end{aligned} \quad (8.16)$$

gdzie d_0 jest odległością pomiędzy i i j . Można więc określić moc siły normalnej w dowolnej chwili t na kroku czasowym jako równą zero:

$$F_{n_{ji}} v_{n_{ij}} = 0. \quad (8.17)$$

Wówczas praca w przedziale czasu $[t_0, t_1]$ będzie równa zero:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{n_{ji}} v_{n_{ij}} dt = 0. \quad (8.18)$$

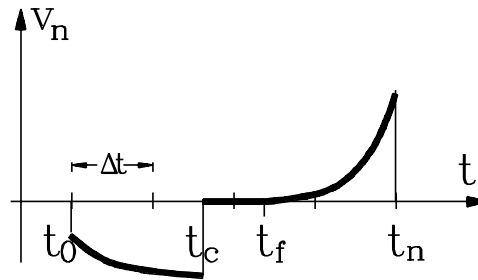
Powyższy związek wyraża dualność siły normalnej i normalnej prędkości względnej. Z tego też względu pole wirtualnych prędkości należy dobierać w sposób zgodny z warunkami kontaktu.

Możemy wykonać całkowanie (8.18) przez części:

$$[F_{n_{ji}} (u_{n_{ij}} - d_0)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF_{n_{ij}}}{dt} (u_{n_{ij}} - d_0) dt = 0. \quad (8.19)$$

Po uwzględnieniu warunków Signoriniego (8.16) otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dF_{n_{ij}}}{dt} (u_{n_{ij}} - d_0) dt = 0. \quad (8.20)$$



Rysunek 8.6: Prędkość względna normalna w przedziale czasu $[t_0, t_1]$.

8.1.1. Prędkość w strefie kontaktu

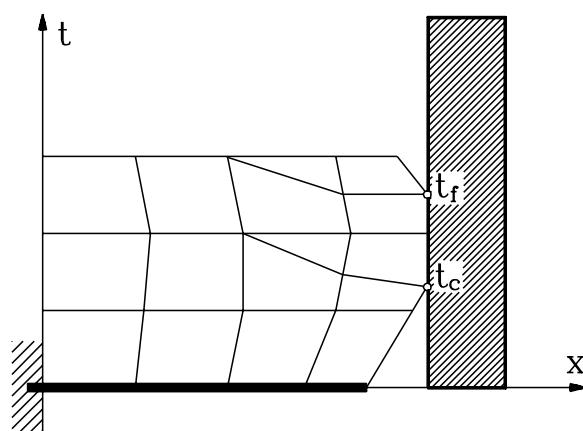
Prędkość punktu materialnego wchodzącego w kontakt z innym ciałem jest funkcją nieciągłą (rys. 8.6). Istotne są dwa punkty charakterystyczne procesu kontaktowego: osiągnięcie kontaktu t_c (punkt ten jest właśnie punktem nieciągłości) oraz oderwanie się t_f (ten punkt nieciągłości ma mniejsze znaczenie). Najczęściej długość przedziału czasu $\Delta t = t_1 - t_0$ jest mała na tyle, że punkty t_c i t_f nie zawierają się w nim jednocześnie.

Konsekwencją rozważań prowadzonych w p. 8.1.1, a zwłaszcza postulatu doboru pola prędkości wirtualnych zgodnie z warunkami kontaktu, jest taki dobór dyskretyzacji czasoprzestrzennej, który pozwala wyodrębnić w sposób naturalny punkty t_c i t_f . Konieczne jest zatem zagęszczenie podziału w czasie w strefie kontaktu poprzez wprowadzenie dodatkowych węzłów o współrzędnych właśnie t_c i t_f (rys. 8.7). Efektem wspomnianej nieciągłości prędkości są trudności z wyznaczaniem położenia punktu w sposób konsekwentny, tj. z pola prędkości, np. według związku

$$x_1 = x_0 + [(1 - \beta)v_0 + \beta v_1] h, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (8.21)$$

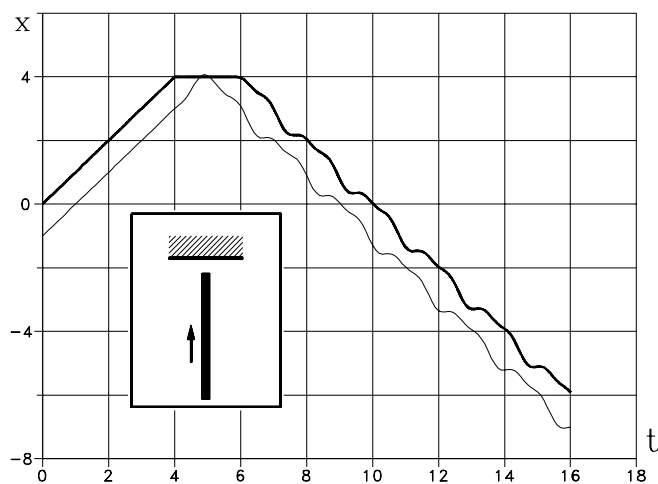
Ponieważ x_1 określone jest przez geometrię ciała, a v_1 winno być równe zeru przy t_c , wobec tego (8.21) może być spełnione tylko w sposób przybliżony.

Przedstawione poniżej przykładowe zadania rozwiązano przyjmując zagęszczoną w czasie siatkę elementów. W pierwszym, sprężysty pręt o długości $L=1$, module Younga $E=1$ i gęstości masy $\rho=1$, uderza w sztywną przeszkodę z prędkością $v=1$. Podziału przestrzennego dokonano na dwa elementy. W strefie kontaktu czworokątny element czasoprzestrzenny zastąpiono parą elementów: trapezowym i trójkątnym. Węzeł pośredni przypadł na chwilę wejścia swobodnego końca pręta w kontakt lub utraty kontaktu.



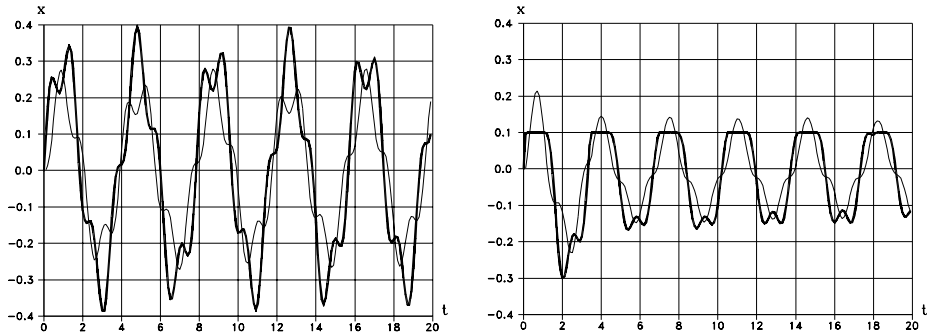
Rysunek 8.7: Drgania osiowe pręta — rozwój siatki czasoprzestrzennej w strefie kontaktu.

Rys. 8.8 przedstawia przemieszczenia obu końców pręta w czasie. Drugie za-



Rysunek 8.8: Zderzenie sprężystego pręta ze sztywną przeszkodą.

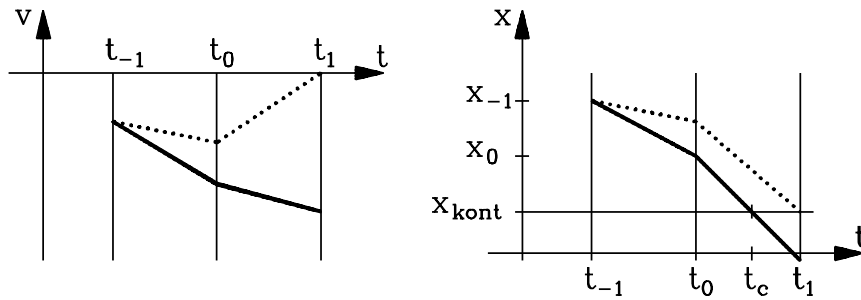
danie modelowano identyczną jak poprzednio siatką elementów, przy czym jeden z końców pręta zamocowano. Drugiemu swobodnemu końcowi nadano prędkość początkową $v=1$ i ustawiono w odległości $d=0,1$ od niego sztywną przeszkodę. Linia pogrubiona pokazuje przemieszczenia w czasie swobod-



Rysunek 8.9: Przesunięcie punktów pręta bez kontaktu z przeszkodą (lewy rysunek) i z uwzględnieniem kontaktu (prawy rysunek).

nego końca pręta, linia cienka zaś punktu w środku długości pręta.

Widoczną na rys. 8.6 nieciągłość prędkości w strefie kontaktu można usunąć. Jednocześnie konsekwentna stanie się wówczas zależność przemieszczeń od prędkości (jak np. (8.21)). W tym celu związki wynikające z warunków kontaktu narzucić trzeba na rozwiązanie w chwili poprzedzającej penetrację ciała, tj. już w chwili t_0 , jeśli penetracja następuje w chwili t_1 . Nałożone ograniczenia mają za zadanie wyhamować punkt materialny do takiej prędkości v_0 , aby w następnym kroku czasowym móc spełnić warunek $v_1 = 0$ i $x_1 = x_{kont}$ (rys. 8.10). W najprostszym przypadku, ilustrowanym na rys.



Rysunek 8.10: Hamowanie punktu w strefie kontaktu: linia ciągła – ruch swobodny, linia przerywana – ruch po uwzględnieniu ograniczeń.

8.10, prędkość w chwili t_0 powinna mieć wartość

$$v_0 = \frac{x_{kont} - x_{-1}}{h} - (1 - \beta) v_{-1} \quad , \quad (8.22)$$

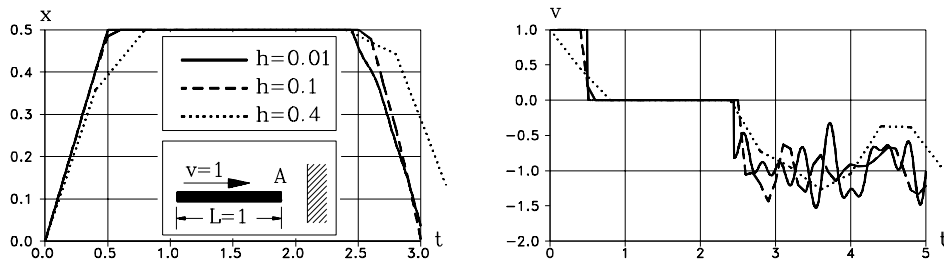
położenie zaś

$$x_0 = (1 - \beta)x_{-1} + \beta x_{kont} + (1 - \beta)^2 h v_{-1}. \quad (8.23)$$

Wtedy w chwili t_1 prędkość v_1 przyjmie wartość 0, a x_1 wartość x_{kont} .

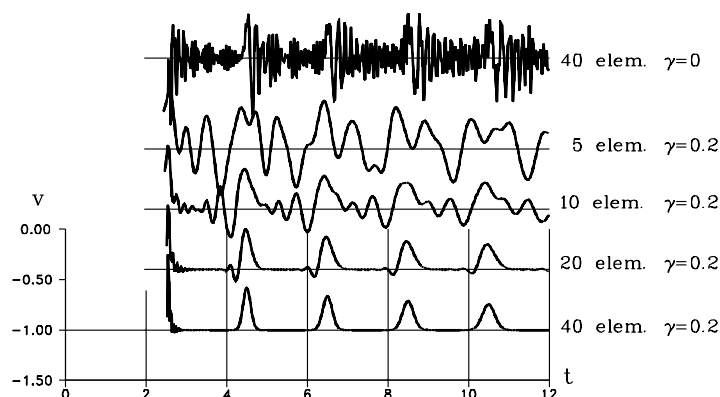
Trzeba tu zwrócić uwagę, że hamowanie przed kontaktem jest procesem odbierania energii. Można tego dokonać dwojako: narzucając warunek prędkości na określony węzeł, albo przykładając do tego węzła odpowiednio dobraną siłę hamującą. Oba podejścia są równoważne, gdyż wartość siły równa jest wartości reakcji przy narzuconym warunku na prędkość. Siła hamująca (reakcja) działa na kroku Δt . W efekcie węzeł uderza w przeszkodę z prędkością nieco mniejszą i sztywna przeszkoda zwraca w związku z tym mniej pędu po odbiciu. Odebrany pęd trzeba zwrócić w pierwszym kroku, w którym węzeł porusza się swobodnie po oswobodzeniu się z kontaktu.

Poniższy przykład ilustruje omówione podejście. Pręt sprężysty o długości $L=1$, danych materiałowych $E=1$, $\rho=1$, porusza się z prędkością $v=1$. W odległości $d=0,5$ uderza w sztywną przeszkodę. Dokonano podziału przestrzennego na 8 elementów. Parametr α przyjęto równy 0,8, uzyskując bezwarunkową stabilność procedury. Z rys. 8.11 widać, że prędkość po odbiciu



Rysunek 8.11: Schemat zadania oraz przemieszczenia i prędkości w czasie punktu czołowego A przy wybranych wartościach kroku czasowego $h=0,01$, $0,1$ i $0,4$.

pręta pozostaje równa 1. Widać to zwłaszcza, jeśli obserwację prowadzi się przez dłuższy okres czasu. Linia ciągła, odpowiadająca krokowi $h=0,4$ uwiadcza miejsca hamowania i zwrotu pędu. Widać to też, choć nieco mniej wyraźnie, przy $h=0,1$. Prędkość końca pręta po odbiciu zaburzona jest drganiami pasożytniczymi. Wprowadzenie niewielkiego tłumienia może poprawić obraz odpowiedzi układu. Warunkiem jest jednak względnie drobna dyskretyzacja (rys. 8.12). Przy gęstym podziale drgania pasożytnicze mają wysoką częstotliwość i dają się łatwiej tłumić. Widać, że dopiero podział na 20 lub 40 elementów daje właściwą postać wyników.



Rysunek 8.12: Prędkość końca pręta po odbiciu przy różnej gęstości podziału przestrzennego, bez tłumienia ($\gamma = 0$) oraz z małym tłumieniem ($\gamma = 0,2$) ($\alpha = 0,75$, $h = 0,02$).

Algorytm obliczeniowy jest prosty i można go zbudować sprawdzając każdorazowo kilka warunków. W zależności od sytuacji obliczenia kontynuują się, powtarza się bieżący krok lub powraca i powtarza krok poprzedni. Schemat obliczeń pokazuje tabela 8.1. Metodę przedstawioną w tabeli 8.1 wykorzystano do rozwiązania zadania kontaktowego odkształcalnego koła toczącego się po sztywnym podłożu.

Tablica 8.1: Schemat obliczeniowy zadania kontaktowego z hamowaniem i zwracaniem pędu.

1° początkowo: indeks=0, krok i ;
2° moduł obliczeniowy: $\mathbf{A}\mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{B}\mathbf{V}_i + \mathbf{s}_i = \mathbf{F}_i$;
3° jeśli indeks=0 i nie ma penetracji, to $i := i + 1, \longrightarrow 2^\circ$;
4° jeśli indeks=0 i zachodzi penetracja, to zadana prędkość $\bar{v} = (x_{kont} - x_{i-2})/h - (1 - \beta)v_{i-2}$, indeks=1, $i := i - 1, \longrightarrow 2^\circ$;
5° jeśli indeks=1, to obliczyć reakcję i zapamiętać \bar{R} , $\bar{v}=0$, indeks=2, $\longrightarrow 2^\circ$;
6° jeśli indeks=2 i zachodzi ściskanie w kontakcie (odpowiedni zwrot sił kontaktu), to $\bar{v}=0$, $i := i + 1, \longrightarrow 2^\circ$;
7° jeśli indeks=2 i zachodzi odrywanie w kontakcie, to indeks=0, siła zewnętrzna $F:=F+\bar{R}$, $\longrightarrow 2^\circ$.

8.2. Kontakt jednostronny i tarcie

Jednym ze zjawisk towarzyszących oddziaływaniu walca i pasma (koła i szyny) jest pofalowanie powierzchni pasma, które przy wielokrotnym walcowaniu na zimno (jak np. walcowanie blachy) może mieć tendencję do wzrostu amplitudy nierówności. Zjawisko to jest również obserwowane w eksploatacji szyn i kół kolejowych.

Drgania w transporcie szynowym są przede wszystkim wynikiem konstrukcji toru i samego pojazdu szynowego. Źródła drgań to:

- okresowa stuktora toru z podkładami, powodująca, że jadący wagon na zmianę zapada się między podkładami i wznosi na podkładach,
- stożkowy kształt kół, w wyniku czego zestawy kołowe mają tendencję do wężykowania; różna średnica kół przy tej samej prędkości kątowej



Rysunek 8.13: Wężykowanie przy różnej prędkości liniowej toczenia.

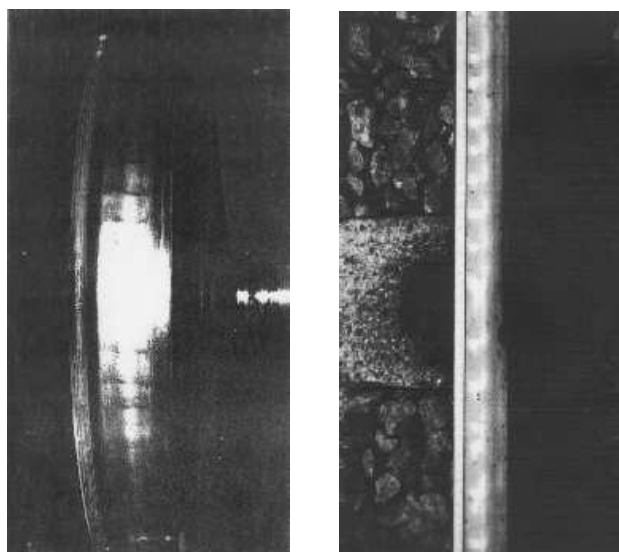
powoduje, że lewe i prawe koło toczy się z różną prędkością liniową (rys. 8.13),

- odkształcalność kół i szyn; poprzeczne siły statyczne oraz drgania wywołują boczne przesunięcia, powodując boczne uderzenia i potęgując wężykowanie,
- faliste zużycie kół i szyn; w wyniku zjawisk dynamicznych, jazdy po łukach, tarcia, powstają pofalowania powierzchni toczyń kół i szyn (rys. 8.14);

Nierówności powstają po kilku latach przeciętnej eksploatacji i występować mogą zarówno na główce szyny, jak i na powierzchni kół pojazdów (rys. 8.14). Obserwowana jest też duża szkodliwość hałasu [69].

Zjawisko to jest od dawna obserwowane, ale dotychczas nie jest w pełni wyjaśnione. Istniejące hipotezy [119, 159] nie są zadawalające, gdyż nie obejmują większości warunków generacji korugacji, a tylko niektóre z nich.

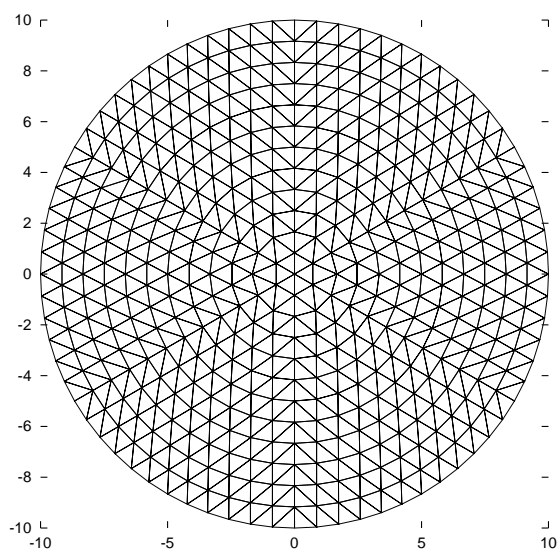
Dotychczasowe badania numeryczne zagadnienia kontaktu toczonego z wykorzystaniem metody elementów skończonych ograniczały się do analizy quasistatystycznego procesu toczenia walca po sprężysto–plastycznym paśmie [126, 83, 40] lub symulacji numerycznej krótkotrwałych procesów niestacjonarnych [37]. M.E.S. wykorzystywano na ogół do określenia częstości własnych podukładów [127, 119, 38] poszukując związku pomiędzy długością fali nierówności i prędkością względnego ruchu. Poszukuje się też rozwiązań z wykorzystaniem modeli zużycia, pokazujących pogłębianie początkowo małych nierówności szyn po wielokrotnych przejazdach wózka [120, 79].



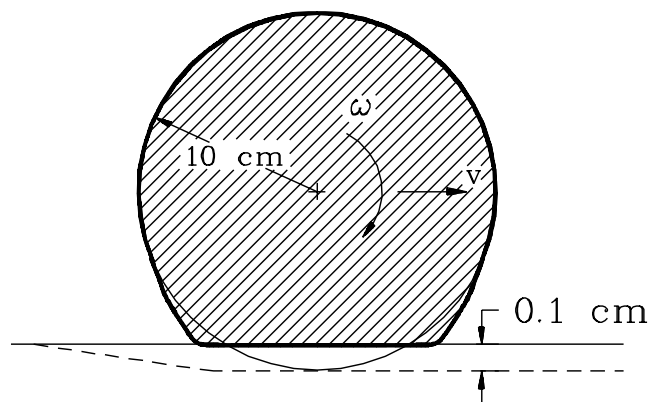
Rysunek 8.14: Korugacje na powierzchni koła i szyny.

Do pełnego zbadania zjawiska wymagane jest uwzględnienie m.in. teorii plastyczności, teorii drgań, tarcia i zużycia. Ze względu na złożony model dynamiczny pojazdów czy urządzeń walcowniczych niemożliwe jest zbadanie analityczne zagadnienia.

Rozważając zagadnienie toczenia się odkształcalnego walca (koła) analizę numeryczną ograniczono do prześledzenia efektów wywołanych zjawiskami dynamicznymi kontaktu. Do obliczeń przyjęto koło o promieniu $R=10$ cm, grubości 1 cm, wykonane ze stali ($E=2,05 \cdot 10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=7,83$ g/cm³). Koło toczy się po sztywnym podłożu z prędkością kątową ω . Rozpatrywane prędkości liniowe mieściły się w przedziale 90–180 km/h. Przyjęto materiał sprężysty, w płaskim stanie naprężenia. Obszar podzielono na 864 elementy trójkątne z 469 węzłami (rys. 8.15). Aby uniknąć wielokrotnych obrotów macierzy, związanych z obrotem struktury i tym samym akumulacji błędów zaokrąglenia przyjęto, że koło pozostaje nieruchome, a obraca się wokół niego sztywne podłoże. Nadano przy tym kołu wszystkie obciążenia wynikające z ruchu wirowego. W początkowej fazie koło obracając się osiada łagodnie na podłożu. Spłaszczenie powodowane przez podłoże osiąga wartość ostateczną $d=0,1$ cm (rys. 8.16). Aby usunąć wpływ warunków początkowych oraz zmniejszyć efekt odbicia fal i interferencji przyjęto stosunkowo duże tłumienie numeryczne. Wartość parametru γ (4.109) wyniosła w obliczeniach 0,2



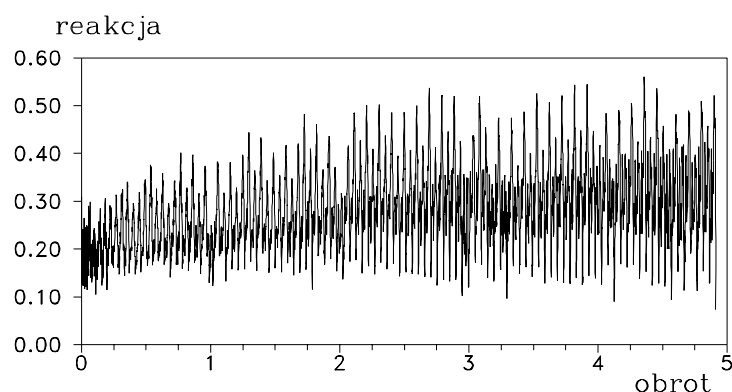
Rysunek 8.15: Siatka podziału przestrzennego przyjęta do obliczeń.



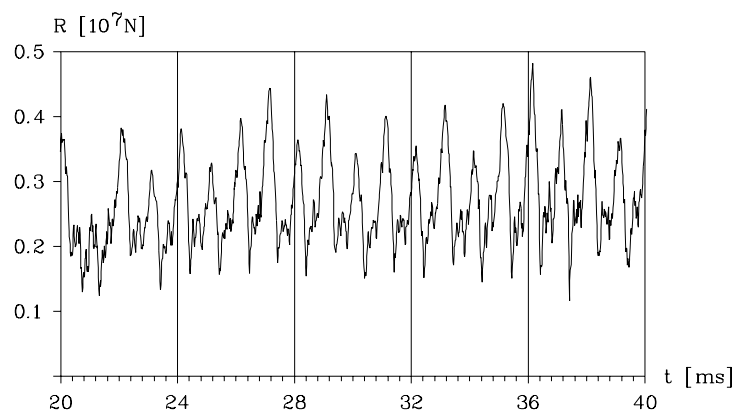
Rysunek 8.16: Schemat zadania.

i dała w efekcie tłumienie o dekrecencie logarytmicznym $\Lambda = 0,03$. W praktyce w tym przypadku drgania zgodne z pierwszą formą własną i okresie $T \approx 80 \mu s$ wytłumiły się w 95% już po $1/4$ obrotu koła.

Wyniki obliczeń wykazały, że siła w strefie kontaktu jest zmienna, mimo

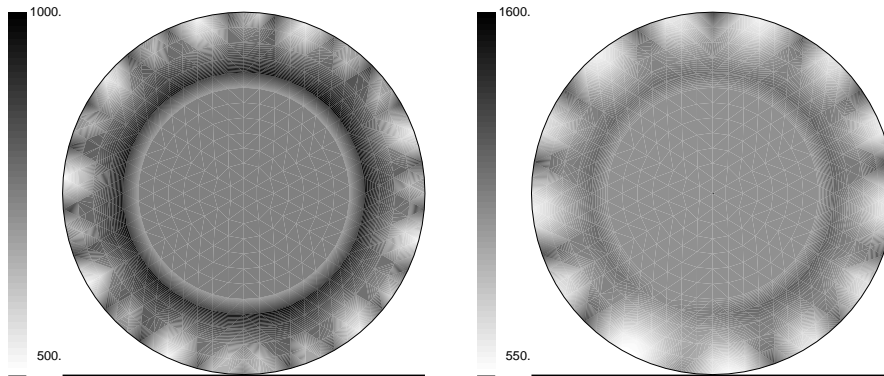


Rysunek 8.17: Reakcja kontaktu w czasie przy prędkości $\omega=0,3\cdot 10^{-3}$ rad/s.

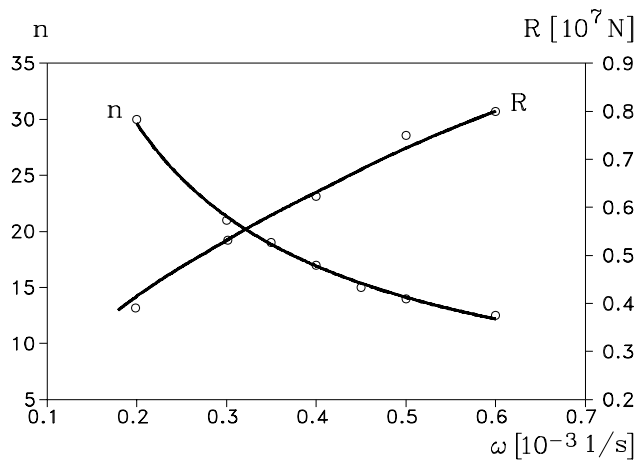


Rysunek 8.18: Fragment wykresu reakcji kontaktu w czasie.

jednostajnego toczenia się koła i znacznego tłumienia. Przebieg pierwszych pięciu obrotów przy prędkości $\omega=0,3\cdot 10^{-3}$ rad/s przedstawia rys. 8.17. Wycinek wykresu dokładniej pokazano na rys. 8.18. Aby prześledzić rozkład naprężeń w materiale w kolejnych fazach obrotu zsumowano drugi niezmiennik naprężeń J_2 ze wszystkich kroków jednego pełnego obrotu (rys. 8.19 (a)). Rysunek nie ma interpretacji przestrzennej. Obrazuje jednak periodyczny rozkład ewentualnego zużycia powierzchni koła podczas eksploatacji. Liczba oscylacji reakcji zmniejsza się wraz ze wzrostem prędkości. Zaobserwowano to np. w pracach [135, 115] w przypadku koła gumowego. Można wykonać przybliżony wykres zależności liczby cykli przypadającej na jeden pełny



Rysunek 8.19: Drugi niezmiennik naprężenia J_2 podczas pełnego obrotu przy prędkości (a) $\omega=0,30 \cdot 10^{-3}$ rad/s i (b) $\omega=0,52 \cdot 10^{-3}$ rad/s [MPa].



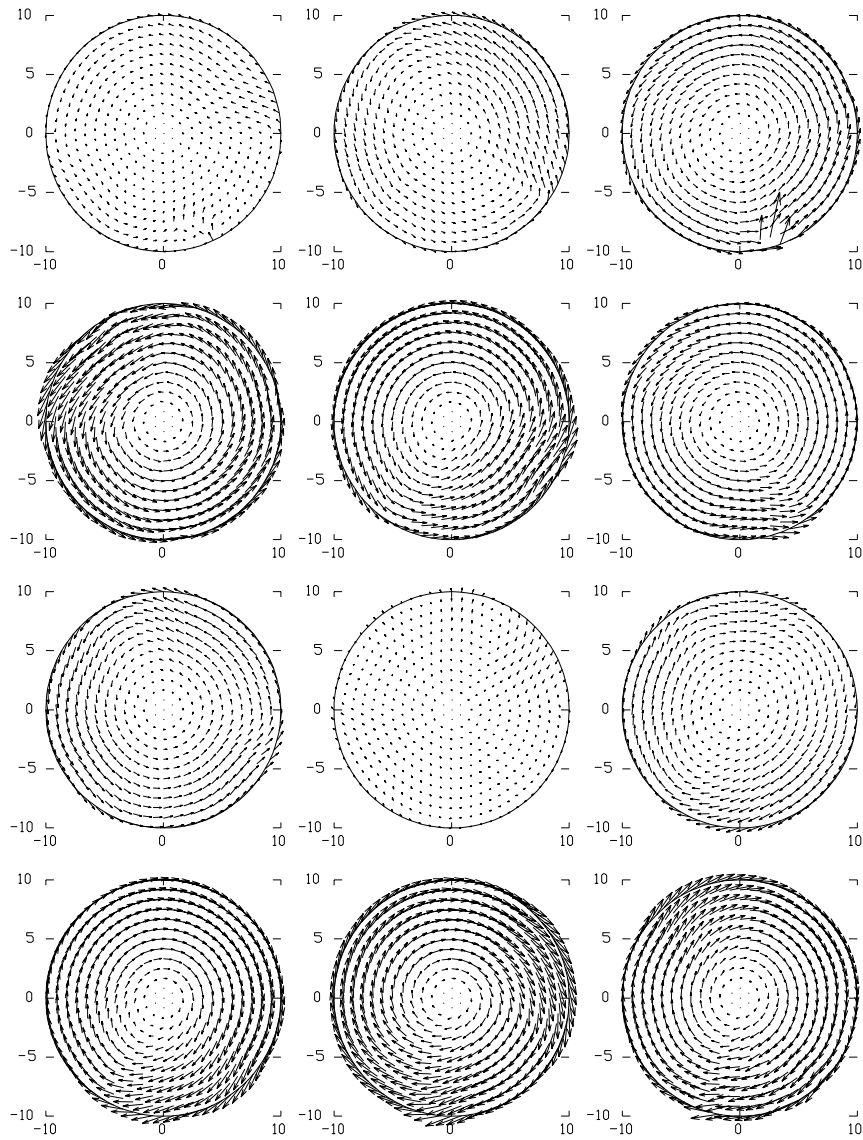
Rysunek 8.20: Zależność liczby cykli reakcji n i jej maksymalnej wartości R od prędkości kątowej ω .

obrót od prędkości kątowej ω (rys. 8.20).

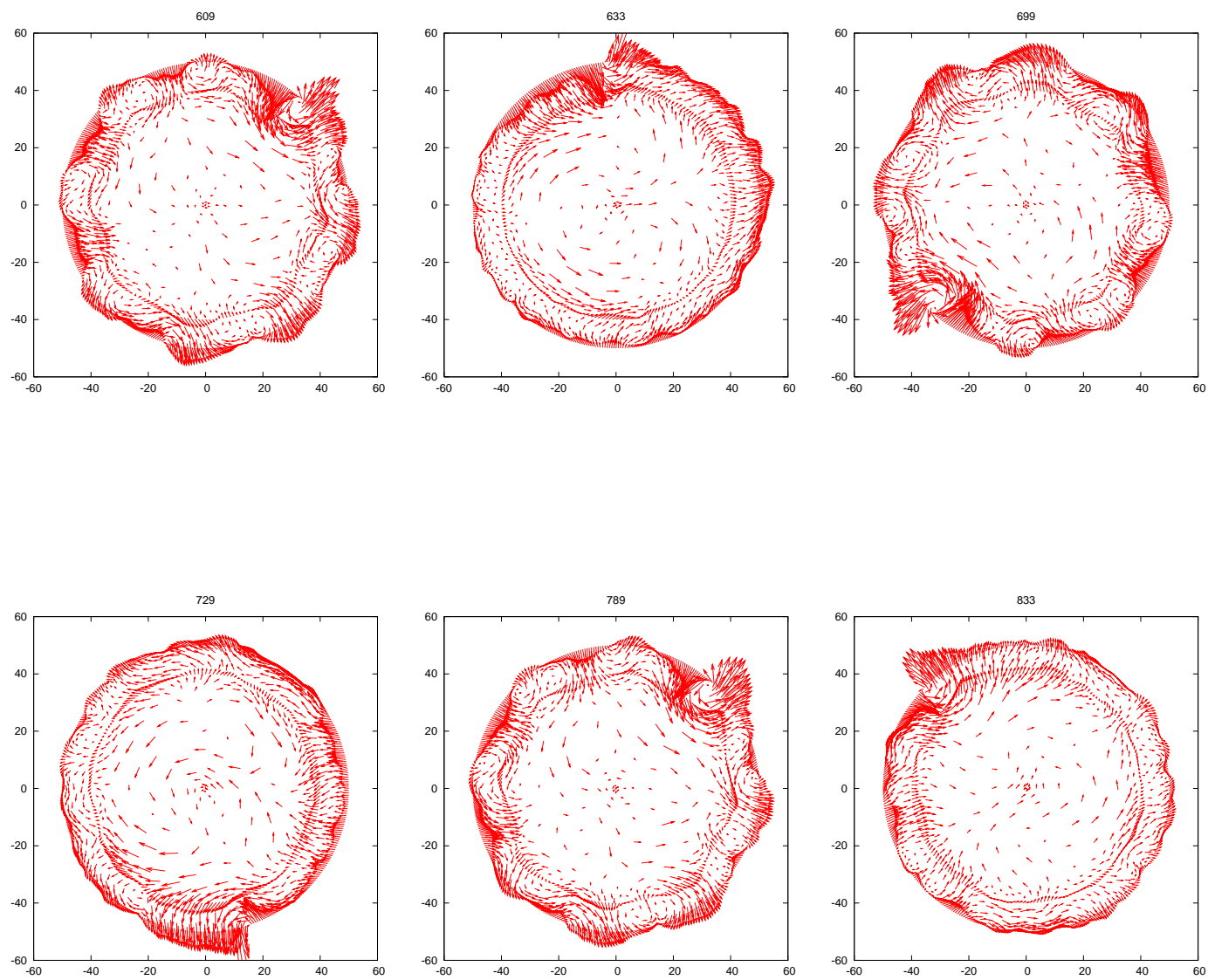
Aby przedstawić zmianę rozkładu prędkości w kolejnych etapach toczenia, zamieszczono rys. 8.21. Strefa kontaktu rozpościera się w dolnej części koła i przesuwa się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (przechodzi z godziny 6 na 5). Materiał obraca się względem osi koła raz w lewo, raz w prawo. Wzbudzenia ruchu zaś doznaje w strefie kontaktu. Jednocześnie

wartości sił kontaktu rosną wraz ze wzrostem częstości ω . W celu dokonania porównania przedstawiono wykres J_2 wykonany przy prędkości większej, $\omega=0,52 \cdot 10^{-3}$ rad/s (rys. 8.19 (b)). Obserwuje się spadek liczby karbów przy jednoczesnym wzroście wartości napężeń. W przedstawionym rozwiązaniu, przy przyjętej wielkości nacisku statycznego i prędkościach obrotu koła, przekroczona zostaje granica plastyczności. Układ rzeczywisty w praktyce należałoby przeprojektować.

Obserwację prowadzono do czasu pełnego obrotu koła. Jeśli liczba karbów przypadająca na jeden obrót nie jest liczbą całkowitą (tzn. następują przesunięcia fazowe przy każdym kolejnym obrocie), to zaburzony zostaje wykres w okolicy dolnego punktu obwodu koła, od którego zaczyna się i na którym kończy się obserwację. Rys. 8.22 przedstawia pola prędkości wybranych chwilach, po długim okresie toczenia. Po przebyciu 4-5 pełnych obrotów i ustabilizowaniu się drgań dostrzegamy rozkład prędkości na brzegu koła, prowadzący do powstania brzegu falistego.



Rysunek 8.21: Rozkład prędkości w kolejnych etapach.



Rysunek 8.22: Pola prędkości w wybranych chwilach.

8.3. Duże przemieszczenia

W poprzednich punktach wykazano, że formuły prędkościowe, mimo pewnych wad, mogą okazać się użyteczne w modelowaniu zjawisk kontaktowych. W punkcie 8.1.1 zwrócono uwagę, na sformułowanie wyrażone prędkościami, kiedy to na prędkości nakładane są warunki brzegowe. Ma ono wadę nieciągłości pola prędkości w chwili kontaktu. Zaletą formuł prędkościowych jest fakt, że ułatwiają one uwzględnienie bardziej złożonych reologicznie związków konstytutywnych. Nie ma więc jednoznacznej oceny przydatności wybranego sformułowania. Tym bardziej jest ona trudna, im bardziej złożony jest problem.

Poniżej przedstawimy sposób uwzględnienia dużych obrotów materiału w opisie prędkościowym oraz podamy przyrostowy opis przy dużych odkształceniach. Okazuje się, że uwzględnienie tego typu zjawisk również nie przedstawia trudności. Przyjęto, że przypadające na krok czasowy wielkości przyrostów odkształceń nie są tak duże, by znacząco pogorszyć zbieżność i dokładność rozwiązania [78, 156].

8.3.1. Duże obroty

Oznaczmy przez $d^{t_0}\mathbf{x}$ wektor wyznaczony w chwili t_0 . Wektor $d^t\mathbf{x}$ w chwili t dany jest jako wynik transformacji stycznej

$$d^t\mathbf{x} = {}^t_{t_0}\mathbf{F} d^{t_0}\mathbf{x} . \quad (8.24)$$

Różniczkowanie (8.24) względem t prowadzi w rezultacie do związku

$$\frac{d^t\mathbf{x}}{dt} = ({}^t\mathbf{W} + {}^t\mathbf{D}) d^{t_0}\mathbf{x} , \quad (8.25)$$

gdzie człon ${}^t\mathbf{W}d\mathbf{x}$ określa ruch sztywny

$${}^t\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{v} - (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T) , \quad (8.26)$$

a człon ${}^t\mathbf{D}d\mathbf{x}$ dotyczy czystego odkształcenia

$${}^t\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{v} + (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T) . \quad (8.27)$$

Po rozkładzie

$${}^t_{t_0}\mathbf{F} = {}^t_{t_0}\mathbf{R} {}^t_{t_0}\mathbf{Y} \quad (8.28)$$

związek pomiędzy ${}^t_{t_0}\mathbf{R}$ i ${}^t\mathbf{W}$ można określić w następujący sposób:

$$\frac{d{}^t_{t_0}\mathbf{R}}{dt} ({}^t_{t_0}\mathbf{R})^{-1} - {}^t\mathbf{W} = \mathbf{0} . \quad (8.29)$$

Po scałkowaniu (8.29) otrzymujemy macierz obrotu w przedziale $[t_0, t]$

$${}^t_{t_0}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} e^{-{}^t\mathbf{W}(t-t_0)} , \quad (8.30)$$

która może być rozwinięta w szereg z dwoma członami

$${}^t_{t_0}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} - (t-t_0){}^t\mathbf{W} + \frac{(t-t_0)^2}{2} {}^t\mathbf{W}^2 - \dots \quad (8.31)$$

Związek konstytutywny w przypadku materiału hyposprężystego opisany jest przez związek

$$\frac{d_J\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{E}\mathbf{D} . \quad (8.32)$$

$\frac{d_J\boldsymbol{\sigma}}{dt}$ jest pochodną czasową we współobrotowym układzie współrzędnych, a \mathbf{D} jest tensorem prędkości obrotu. Tensor odkształcenia w chwili t opisuje zależność

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{E}\mathbf{D}dt . \quad (8.33)$$

Po wprowadzeniu dyskretyzacji czasoprzestrzennej wektora prędkości w układzie odniesienia w konfiguracji t_i (przy przyjętym liniowym rozkładzie) ma on postać

$$\boldsymbol{\sigma} = ({}^t_{t_0}\mathbf{R})^{-1} \left(\boldsymbol{\sigma}_0 + (1-\alpha^2)\frac{h}{2}\mathbf{E}\mathbf{D}_0 \right) \left[({}^t_{t_0}\mathbf{R})^{-1} \right]^T + \alpha^2\frac{h}{2}\mathbf{E}\mathbf{D} , \quad (8.34)$$

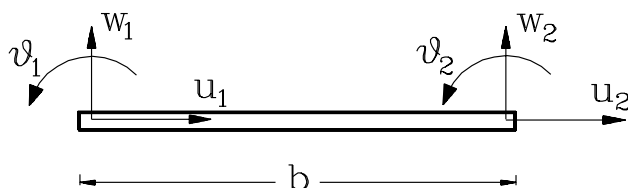
gdzie $\alpha = (t_i - t_0)/h$, $h = t_1 - t_0$. Odkształcenie określone przez (8.34) można wprowadzić do równania pracy wirtualnej.

Dalsze przykładowe rozważania poprowadzimy rozwijając element ramownicy płaskiej.

8.3.2. Element ramownicy płaskiej

Rozpatrujemy prosty element ramownicy płaskiej (rys. 8.23). Przyjmujemy liniową interpolację przemieszczeń u , w , ϑ :

$$\begin{aligned} u &= N_1u_1 + N_2u_2 \\ w &= N_1w_1 + N_2w_2 \\ \vartheta &= N_1\vartheta_1 + N_2\vartheta_2 , \end{aligned} \quad (8.35)$$



Rysunek 8.23: Przemieszczenia elementu ramownicy płaskiej.

gdzie $N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$, $N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$, $-1 \leq \xi \leq 1$. Macierz funkcji interpolujących ma postać

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} N_1 & & & N_2 & & \\ & N_1 & & & N_2 & \\ & & N_1 & & & N_2 \end{array} \right]. \quad (8.36)$$

Wektor prędkości odkształceń zawiera prędkości odkształcenia osiowego $\dot{\epsilon}_x$, średniego kąta ścinania $\dot{\beta}$ oraz krzywizny $\dot{\kappa}$

$$\dot{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\beta} \\ \dot{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\vartheta} \end{Bmatrix} = \mathcal{D}_x \dot{\mathbf{q}}. \quad (8.37)$$

Odpowiedni wektor naprężeń ma postać

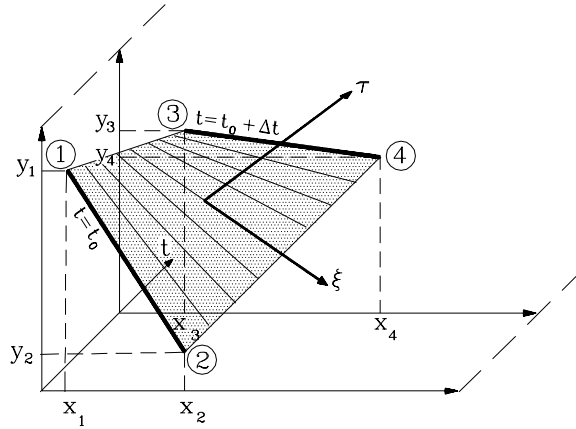
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} P_x \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GA}{K} & 1 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (8.38)$$

Obrotu elementu o kąt φ , a wraz z tym macierzy funkcji kształtu dokonuje się przez przemnożenie odpowiednich wyrażeń przez macierze obrotu \mathbf{T} .

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \mathbf{T}, \quad (8.39)$$

gdzie

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & & & \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ (0) & & & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.40)$$



Rysunek 8.24: Element ramownicy w chwili t_i i t_{i+1} .

Ponieważ położenie elementu w przestrzeni jest różne w każdej chwili (rys. 8.24), wobec tego macierze funkcji kształtu elementu czasoprzestrzennego otrzymujemy w następującej formie:

$$\mathbf{N}' = [\mathbf{N} \mathbf{T}(\varphi_a) H_a; \mathbf{N} \mathbf{T}(\varphi_p) H_p] . \quad (8.41)$$

H_a i H_p są funkcjami interpolującymi, których najprostsza, liniowa postać jest następująca:

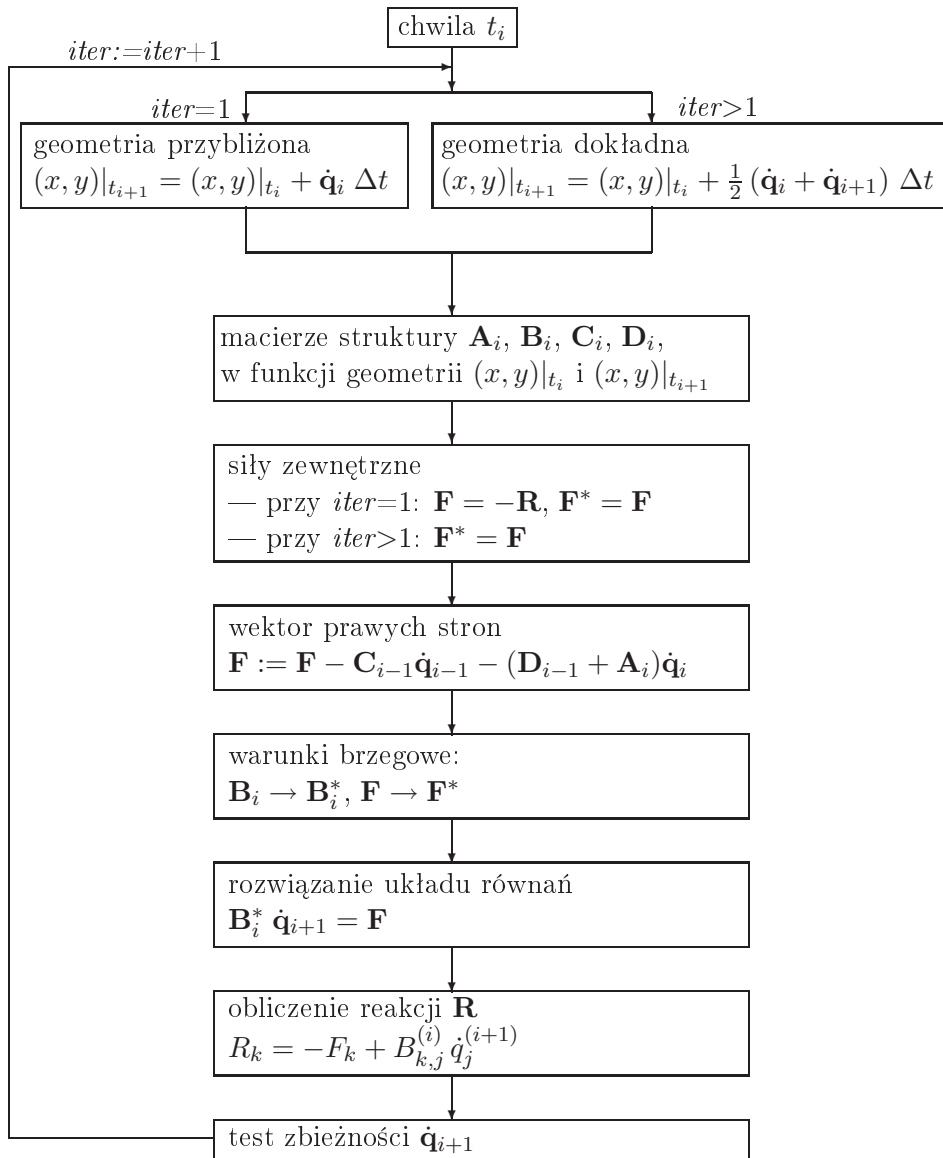
$$H_a = \frac{1}{2}(1 - \tau), \quad H_p = \frac{1}{2}(1 + \tau) . \quad (8.42)$$

φ_a i φ_p są kątami nachylenia osi pręta w chwilach t_0 i $t_0 + \Delta t$. Dystrybucja przemieszczeń wirtualnych może być opisana funkcjami wyższego rzędu, typu

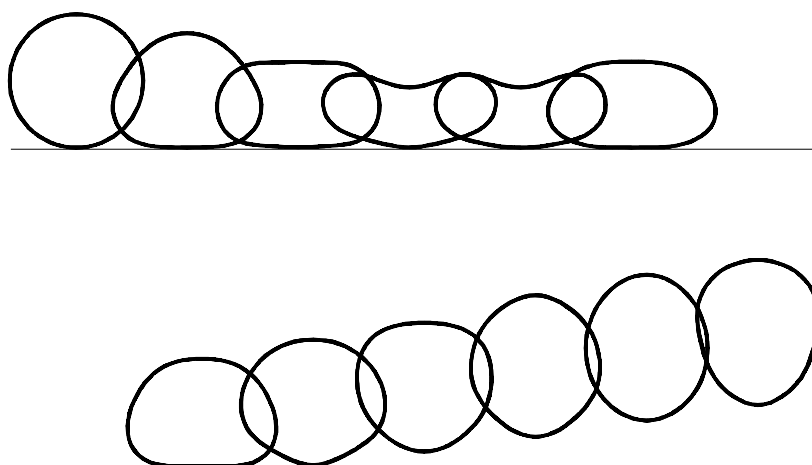
$$\tilde{H}_a = \frac{1}{2}(1 - \tau) - \alpha(\tau^3 - \tau), \quad \tilde{H}_p = \frac{1}{2}(1 + \tau) + \alpha(\tau^3 - \tau) . \quad (8.43)$$

Iteracyjny, niejawnny schemat obliczeń przedstawia rysunek 8.25.

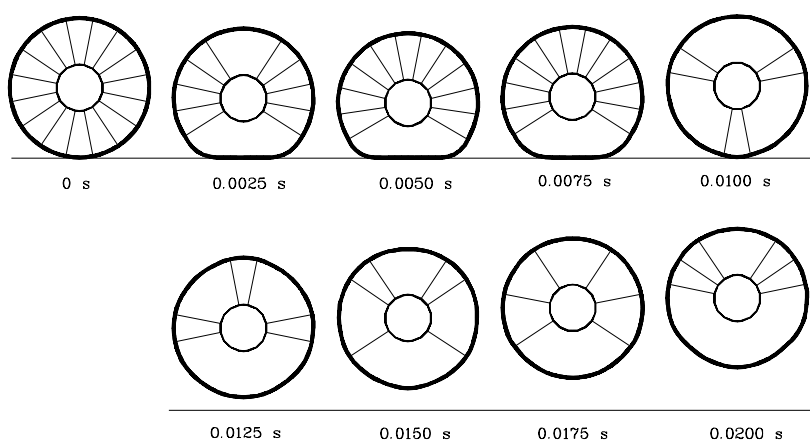
Przykładowe obliczenia wykonano rozważając okrąg złożony z 2×32 elementów, spadający pionowo z prędkością v na nieskończenie sztywną, nieruchomą powierzchnię. Przyjęto następujące wartości liczbowe: $E = 0,004$, $A = 4,0$, $I = 0,333$, $\rho = 1,0$, $K = 1,2$, $\nu = 0,1$, $\Delta t = 25$, $v = 0,0015$ (w jednostkach: cm, g, μs). Wyniki podano na rysunku 8.26. Zdeformowany okrąg pokazano w odstępach czasu $200 \Delta t$. W drugim przykładzie do sprężystego okręgu dodano sztywny pierścień wewnętrzny i szprychy-cięgna,



Rysunek 8.25: Schemat obliczeń w przypadku dużych przemieszczeń.



Rysunek 8.26: Odbicie sprężystego okręgu.



Rysunek 8.27: Odbicie koła z cięgnami.

o dużej sztywności, pracujące jedynie przy rozciąganiu. Kolejne fazy odbicia pokazuje rys. 8.27 (naniesiono tylko szprychy, w których w danym momencie występują siły rozciągające).

8.4. Procedura przyrostowa

Rozpatrzmy warstwę czasową $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$. Równanie pracy wirtualnej można zapisać w następującej postaci:

$$\int_{V_{t_i}} (\mathbf{S}_{t_i}(t) \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t_i} + \rho_{t_i} \ddot{\mathbf{u}}_{t_i}(t) \delta \mathbf{u}_{t_i}) dV_{t_i} = R(t) , \quad (8.44)$$

- $\mathbf{S}_{t_i}(t)$ – II tensor Pioli–Kirchhoffa w chwili t odniesiony do konfiguracji t_i ,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i}(t)$ – tensor odkształceń Greena–Lagrange’a,
- ρ_{t_i} – gęstość masy w chwili t_i ,
- $R(t)$ – praca wirtualna sił zewnętrznych

$$R(t) = \int_{V_t} f_i^B(t) \delta u_i dV_t + \int_{S_t} f_i^S(t) \delta u_i dS_t .$$

$f_i^B(t)$ i $f_i^S(t)$ są składnikami zewnętrznie przyłożonych sił objętościowych i powierzchniowych, określanych w chwili t . Równanie (8.44) jest całkowane w przedziale czasu $[t_i, t_i + \Delta t]$. Przyjmuje się także dekompozycję przyrostową

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{t_i}(t) &= \mathbf{S}_{t_i}(t_i) + \Delta \mathbf{S} = \boldsymbol{\tau}_{t_i} + \Delta \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t_i}(t) &= \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{u}_{t_i}(t) &= \mathbf{u}_{t_i}(t_i) + \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (8.45)$$

oraz prawo konstytucyjne

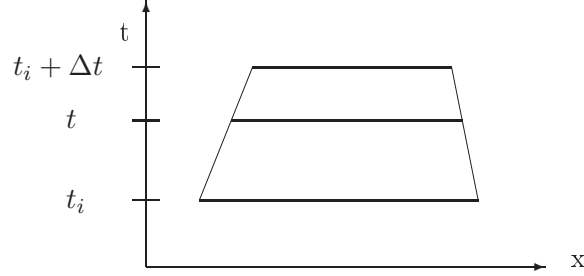
$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}_{t_i} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (8.46)$$

Po wykorzystaniu (8.45) i (8.46) równanie (8.44) przybiera postać

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \int_{V_{t_i}} \boldsymbol{\tau}_{t_i} \delta(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV_{t_i} dt + \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \int_{V_{t_i}} \Delta \mathbf{S} \delta(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV_{t_i} dt + \\ + & \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \int_{V_{t_i}} \rho_{t_i} \ddot{\mathbf{u}}_{t_i}(t_i) \delta(\Delta \mathbf{u}) dV_{t_i} dt + \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \int_{V_{t_i}} \rho_{t_i} \Delta \mathbf{u} \delta(\Delta \mathbf{u}) dV_{t_i} dt = \\ = & \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} R(t) dt . \end{aligned} \quad (8.47)$$

Całka podwójna $\int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \int_{V_{t_i}}$ może być zastąpiona w zapisie przez całkę po obszarze czasoprzestrzennym $\Omega_i = \{\mathbf{x}, t : \mathbf{x} \in V_t, t_i \leq t \leq t_i + \Delta t\}$. Przyrost odkształcenia $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ dzielony jest na część liniową $\Delta \mathbf{e}$ i nieliniową $\Delta \boldsymbol{\eta}$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta} . \quad (8.48)$$



Rysunek 8.28: Nieprostokątny element czasoprzestrzenny (obiekt jednowymiarowy).

Po uwzględnieniu (8.46) i (8.48) oraz po zaniedbaniu członów małych wyższego rzędu można scałkować (8.47) przez części

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \tau_{t_i} \delta(\Delta \varepsilon) d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \mathbf{C}_{t_i} \Delta \mathbf{e} \delta(\Delta \mathbf{e}) d\Omega_i - \int_{\Omega_i} \rho_{t_i} \dot{\mathbf{u}}_t(t) \delta(\Delta \dot{\mathbf{u}}) d\Omega_i \\ & - \int_{\Omega_i} \rho_{t_i} \Delta \dot{\mathbf{u}} \delta(\Delta \dot{\mathbf{u}}) d\Omega_i = \mathbf{Q}_i - \int_{\Omega_i} \tau_{t_i} \delta(\Delta \boldsymbol{\eta}) d\Omega_i . \end{aligned} \quad (8.49)$$

Wektor przemieszczeń węzłów czasoprzestrzennej warstwy i oznaczmy przez \mathbf{q}^i . Łączy on w sobie przemieszczenia w chwilach ograniczających warstwę i z góry i z dołu (rys. 8.28):

$$\mathbf{q}^i = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}^a \\ \mathbf{q}^p \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i+1} \end{array} \right\} . \quad (8.50)$$

Warstwę czasoprzestrzenną dyskretyzuje się elementami czasoprzestrzennymi Ω_{e_j} tak, że wypełniają one całą warstwę i

$$\Omega_i = \bigcup_{j=1}^{NE} \Omega_{e_j} , \quad \forall_{j,k \in [1, NE]} \Omega_{e_j} \cap \Omega_{e_k} = \emptyset . \quad (8.51)$$

Przemieszczenia wewnątrz elementu są interpolowane z przemieszczeń węzłowych

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \mathbf{q} = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}^a \\ \mathbf{q}^p \end{array} \right\} . \quad (8.52)$$

Wówczas odkształcenia i naprężenia wyrażone są przez działanie operatorów różniczkowych: $\mathcal{D}(x)$ – liniowego i \mathcal{D}_N – nieliniowego:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{e} = \mathcal{D}_N \mathbf{u} . \quad (8.53)$$

W efekcie równanie sił działających na warstwę czasoprzestrzenną i sprowadza się do postaci:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \mathbf{E} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}_N \mathbf{N})^T \boldsymbol{\tau} \mathcal{D}_N \mathbf{N} d\Omega_i - \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega_i \right] \Delta \mathbf{q} = \\ & = \mathbf{F} - \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \hat{\boldsymbol{\tau}} d\Omega_i + \left[\int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega_i \right] \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Można to zapisać krócej następująco:

$$(\mathbf{K}_L^i + \mathbf{K}_{NL}^i + \mathbf{M}^i) \Delta \mathbf{q}^i = \Delta \mathbf{F} - (\mathbf{F}_N^i + \mathbf{M}^i \mathbf{q}^i - \mathbf{F}^i), \quad (8.55)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L^i &= \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \mathbf{C} \mathcal{D}\mathbf{N} d\Omega_i \\ \mathbf{K}_{NL}^i &= \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}_N \mathbf{N})^T \boldsymbol{\tau} \mathcal{D}_N \mathbf{N} d\Omega_i \\ \mathbf{M}^i &= - \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right)^T \rho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} d\Omega_i \\ \mathbf{F}_N &= \int_{\Omega_i} (\mathcal{D}\mathbf{N})^T \hat{\boldsymbol{\tau}} d\Omega_i. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Należy podkreślić, że wektor obciążeń \mathbf{F} w (8.54) zawiera składowe impulsów, o wymiarze [Ns]. Stąd macierze sztywności K_L i K_{NL} mają wymiar [Ns/m], a macierze mas wymiar [kg/s].

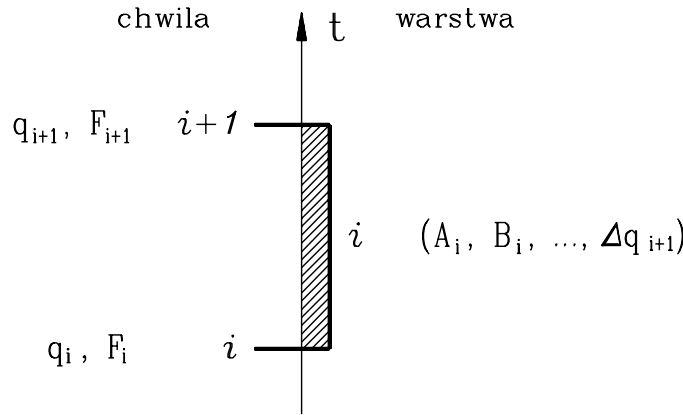
8.4.1. Algorytm krokowy

Krokowy algorytm rozwiązywania równania (8.55) można zapisać następująco:

$$\mathbf{C}_{i-1} \Delta \mathbf{q}_{i-1} + (\mathbf{D}_{i-1} + \mathbf{A}_i) \Delta \mathbf{q}_i + \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{q}_{i+1} = \Delta \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^K - \mathbf{F}_i^M. \quad (8.57)$$

Indeks i oznacza numer kroku czasowego, $\Delta \mathbf{q}_i$ jest wektorem przyrostów przemieszczeń w chwili t_i . \mathbf{F}_i^K akumuluje siły wewnętrzne, a \mathbf{F}_i^M – przyrosty sił węzłowych spowodowanych bezwładnością i tłumieniem. Wektory te opisano poniżej:

$$\mathbf{F}_i^K = \sum_{n=1}^i [\mathbf{C}_{n-2}^K \Delta \mathbf{q}_{n-2} + (\mathbf{D}_{n-2}^K + \mathbf{A}_{n-1}^K) \Delta \mathbf{q}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1}^K \Delta \mathbf{q}_n], \quad (8.58)$$



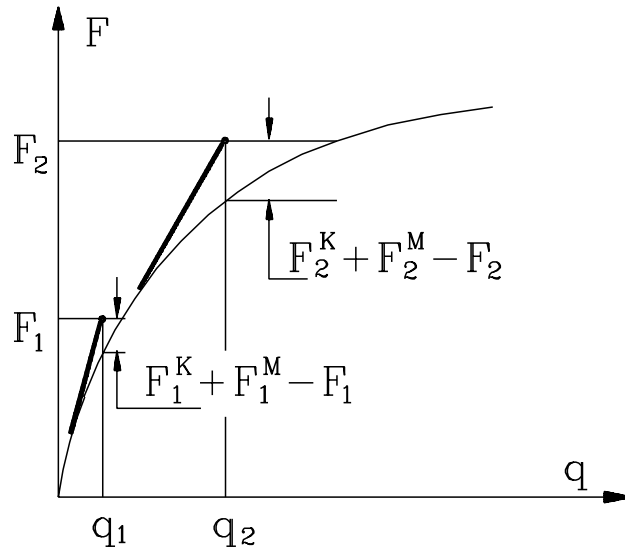
Rysunek 8.29: Schemat warstwy czasowej i wyznaczone w jej obrębie wielkości.

$$\mathbf{F}_i^M = \sum_{n=1}^i [\mathbf{C}_{n-2}^M \Delta \mathbf{q}_{n-2} + (\mathbf{D}_{n-2}^M + \mathbf{A}_{n-1}^M) \Delta \mathbf{q}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1}^M \Delta \mathbf{q}_n] \quad (8.59)$$

Macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} są odpowiednimi ćwiartkami macierzy globalnej, odniesionymi do odpowiednich warstw czasoprzestrzennych (np. rys. 5.2).

Rysunek 8.29 przedstawia warstwę czasową i ograniczoną przez chwile i i $i+1$, oraz wielkości określone bądź w warstwie czasowej, bądź w punktach czasu. Schemat rozwiązania zadania w jednym kroku czasowym odbywa się jednoetapowo, to jest bez iteracyjnego doprowadzania do całkowitej równowagi sił na końcu kroku czasowego (rys. 8.30). Dopuszczono takie podejście, gdyż przedziały czasowe wynikające z całkowania równania różniczkowego ruchu są bardzo małe w porównaniu z krokiem czasowym stosowanym zwykle w rozwiązywaniu zadań quasi-statycznych. Niezrównoważenia sił po pierwszym kroku iteracyjnym są wówczas małe. Korekta dokonywana jest w następnym kroku czasowym. W tabelicy 8.2 usystematyzowano etapy algorytmu krokowego obliczeń zadania nieliniowego. Występujące symbole mają następującą interpretację:

- i jest numerem warstwy czasowej i numerem kroku obliczeniowego.
- \mathbf{F}_i jest wektorem aktualnego obciążenia zewnętrznego. Powstaje przez zsumowanie przyrostów obciążenia zewnętrznego $\Delta \mathbf{F}_i$.
- \mathbf{F}_i^K jest wektorem sił wewnętrznych. Tworzony jest przez sumowanie po każdym kroku sił wewnętrznych, wyznaczanych z obliczanych przyrostów przemieszczeń.
- \mathbf{F}_i^M jest wektorem sił bezwładności. Tworzony jest podobnie jak \mathbf{F}_i^K .



Rysunek 8.30: Przyrostowe rozwiązanie równania nieliniowego z poprawką obciążenia $F_i^K + F_i^M - F_i$.

- Macierze \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i i \mathbf{D}_i są podmacierzami globalnej macierzy współczynników warstwy i . Powstają w wyniku zsumowania \mathbf{K}_L^i , \mathbf{K}_{NL}^i i \mathbf{M}^i (8.55), (8.56).
- Macierze \mathbf{A}_i^K , \mathbf{B}_i^K , \mathbf{C}_i^K i \mathbf{D}_i^K są odpowiednimi podmacierzami uwzględniającymi \mathbf{K}_L^i i \mathbf{K}_{NL}^i (8.56), a macierze \mathbf{A}_i^M , \mathbf{B}_i^M , \mathbf{C}_i^M i \mathbf{D}_i^M są podmacierzami uwzględniającymi \mathbf{M}^i (8.56).

Algorytm obliczeń opisany w tabelicy 8.2 wymaga innego zorganizowania, kiedy chce się go zastosować w praktyce. Pojawia się konieczność ujęcia etapów uwzględniających nieliniowości materiałowe, geometryczne, zmianę siatki podziału, a w ślad za tym odwzorowania pól naprężeń i przemieszczeń, bardziej ekonomicznego gospodarowania pamięcią operacyjną itd. Taką użytkową wersję algorytmu przedstawia tabela 8.3.

Dokładność algorytmu

Wektor \mathbf{F}_i^K powstaje faktycznie w wyniku akumulacji naprężeń i budowy na ich podstawie wektora sił węzłowych.

Metodę numeryczną zadania nieliniowego można nazwać jako przyrostową z jednokrokową korektą Newtona–Raphsona. Wyznaczone rozwiąza-

Tablica 8.2: Algorytm obliczeń w jednym kroku obliczeniowym.

<p>Dane: $\Delta \mathbf{q}_1$ Wartości początkowe: $i = 0$, $\mathbf{F}_i = 0$, $\mathbf{F}_i^K = 0$, $\mathbf{F}_i^M = 0$, $\mathbf{q}_i = 0$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $i := i + 1$, 2. Określić $\Delta \mathbf{F}_i$, 3. Obliczyć \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i, w chwili t_i, 4. Wyznaczyć: $\mathbf{F}_i^K := \mathbf{F}_i^K + \mathbf{C}_{i-2}^K \Delta \mathbf{q}_{i-2} + (\mathbf{D}_{i-2}^K + \mathbf{A}_{i-1}^K) \Delta \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{B}_{i-1}^K \Delta \mathbf{q}_i$ $\mathbf{F}_i^M := \mathbf{F}_i^M + \mathbf{C}_{i-2}^M \Delta \mathbf{q}_{i-2} + (\mathbf{D}_{i-2}^M + \mathbf{A}_{i-1}^M) \Delta \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{B}_{i-1}^M \Delta \mathbf{q}_i$ 5. Rozwiązać ze względu na $\Delta \mathbf{q}_i$: $\mathbf{C}_{i-1} \Delta \mathbf{q}_{i-1} + (\mathbf{D}_{i-1} + \mathbf{A}_i) \Delta \mathbf{q}_i + \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{q}_{i+1} = \Delta \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^K - \mathbf{F}_i^M$ 6. $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta \mathbf{q}_{i+1}$, $\mathbf{F}_i := \mathbf{F}_i + \Delta \mathbf{F}_i$.

nia nie są wprawdzie dokładne, ale nie mają rosnącego błędu, jak byłoby to w przypadku np. metody Eulera. Ponieważ stosowane kroki czasowe są małe, błędy takiego podejścia są również małe.

Badania dokładności dokonano analizując zachowanie się pojedynczego elementu skończonego pręta drgającego osiowo, modelowanego dwoma trójkątnymi elementami czasoprzestrzennymi. Przyjęto moduł sprężystości będący funkcją odkształcenia $E = 1 - 1/8\epsilon^2$. Porównanie przemieszczeń w czasie przy różnych krokach czasowych, począwszy od największego ze względu na stabilność $h_{max} = 1$, przedstawia rys. 8.31.

W rozdziale 8.1 wprowadzono dynamiczne warunki kontaktu ciał odkształcalnych. Przyjęto warunki Signoriniego, które przekształcono do postaci całkowitej (8.20). Określa ona zerowanie się pracy w przedziale $[t_i, t_i + h]$ w przypadku kontaktu. Warunek (8.20) jest wygodny przy modelowaniu kontaktu w warstwie czasoprzestrzennej.

W zadaniach opisanych prędkościami przemieszczeń trudności sprawia nieciągłość składowej normalnej prędkości w chwili kontaktu (rys. 8.6). W ta-

Tablica 8.3: Algorytm procesu krokowego (wersja programowa).

1. Obliczenie wektora prawych stron, zawierającego tymczasowy wektor R oraz całkowity wektor sił $\sum F$

$$F = R - \sum F$$

2. $F := F - D_{i-1}q_i$

3. Odwzorowanie wektora sił na nową siatkę węzłów:

$$F \longrightarrow \widehat{F}$$

$$q_i \longrightarrow \widehat{q}_i$$

$$G \longrightarrow \widehat{G}$$

$$\sum F \longrightarrow \widehat{\sum F}$$

4. Obliczenie współczynników macierzy elementów i utworzenie macierzy globalnych A_i, B_i, C_i, D_i .

5. Obliczenie:

- $\widehat{F} := \widehat{F} + A_i \widehat{q}_i$
- B_i przechowane w S_B
- $R = -C_i \widehat{q}_i$
- D_i przechowane w S_D .

6. Rozwiązanie układu równań:

$$B_i q_{i+1} = \widehat{F}.$$

7. Obliczenie $\Delta\sigma$.

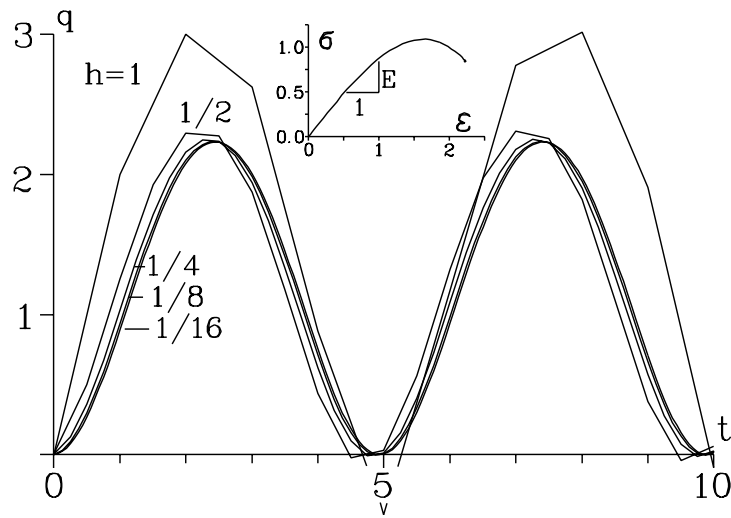
8. Dodanie składników do wektora sił $\sum F$ i obliczenie tymczasowego wektora G :

$$\widehat{\sum F} := \widehat{\sum F} + G$$

$$\widehat{\sum F} := \widehat{\sum F} + A_i^M \widehat{q}_i + B_i^M q_{i+1} + \int_V (\mathcal{D}N_i^i)^T \Delta\sigma \, dV$$

$$G = C_i^M \widehat{q}_i + D_i^M q_{i+1} + \int_V (\mathcal{D}N_i^{i+1})^T \Delta\sigma \, dV.$$

9. $i := i + 1$; powrót do 1.



Rysunek 8.31: Dokładność algorytmu przyrostowego przy różnym kroku czasowym.

kim przypadku, jeśli przyjmujemy małe kroki czasowe, można przyjąć przybliżenie ciągłą funkcją prędkości. Nie będzie wprowadzić zgodności pola prędkości z polem przemieszczeń, ale można dopuścić takie rozwiązanie, gdyż odstępstwo od dokładnych rozwiązań, mierzone energetycznie, jest niewielkie.

Nowym sposobem modelowania zadań w strefie kontaktu jest wprowadzenie dodatkowych węzłów w chwili początkowej i końcowej kontaktu (rys. 8.7). Wówczas całe przedziały czasu $[t_{i-1}, t_c]$, $[t_c, t_i]$, $[t_j, t_f]$, $[t_f, t_{j+1}]$ mają jeden, określony stan ograniczeń kontaktowych: ograniczenia aktywne lub nieaktywne. Upraszcza to np. uwzględnienie prawa tarcia. W literaturze można spotkać prace, w których krok czasowy ulega skróceniu w całej lub wybranej części układu. Odbywa się to przez zastosowanie metody o zmiennym kroku całkowania równań różniczkowych. Skrócenie kroków poprawia w takim przypadku dokładność określania stref kontaktu, lecz precyzyjne dopasowanie serii kroków czasowych do chwili rozpoczęcia i zakończenia kontaktu jest trudne w praktycznej realizacji. W odróżnieniu od tego, prezentowane w niniejszej pracy podejście pozwala ustalić położenie dodatkowych węzłów w czasie w sposób dokładny. Należy podkreślić, że do uzyskania rozwiązania w danej warstwie czasoprzestrzennej opisaną w pracy metodą można z powodzeniem wykorzystać istniejące, klasyczne procedury metody elementów

skończonych, budowania macierzy struktury i rozwiązywania układu równań.

Druga propozycja przedstawiona w pracy dotyczy sposobu modyfikacji prędkości w chwili poprzedzającej kontakt, tak aby zarówno prędkości jak i przemieszczenia były opisane funkcjami ciągłymi. Wymagamy przy tym, aby przemieszczenia konsekwentnie wynikały z prędkości. Wspomniana modyfikacja polega na odpowiednim wyhamowaniu ruchu punktu tuż przed jego zetknięciem się z przeszkodą. Wytracona energia oddawana jest w chwili odrywania się punktu od przeszkody.

Oba zaproponowane podejścia ułatwiają nie tylko numeryczną realizację kontaktu, ale także poprawiają dokładność dyskretnych rozwiązań. Zamieszczone przykłady numeryczne pozwalają prześledzić zachowanie się układu w wybranych sytuacjach. Okazuje się, że w zadaniach opisujących zderzenia nie jest łatwo wyeliminować efekty pasożytnicze, związane z zastąpieniem układu ciągłego dyskretnym. Najczęściej w praktyce usuwamy drgania o wyższej częstotliwości przez dodanie tłumienia. Może okazać się to niewystarczające. Jak pokazuje rys. 8.12 duże tłumienie, w przypadku podziału na niewielką liczbę elementów przestrzennych, nie wygładza dostatecznie wynikowych wykresów przemieszczeń. Zaproponowana metoda hamowania ruchu punktu przed zderzeniem łagodzi efekt wstrząsu w chwili kontaktu.

Modelowanie czasoprzestrzenne kontaktu zastosowano do analizy przyczyn powstawania korugacji kół kolejowych przy dużych prędkościach tocznienia. Wykazano, że nierówności powstają na skutek efektów falowych, kiedy kontakt pomiędzy kołem i szyną nie jest punktowy, a ma miejsce na dłuższym odcinku. Przedstawiony w pracy obraz zużycia kół kolejowych jest jednym z nielicznych wyników skutecznego modelowania zjawiska korugacji.

Prędkościowy opis zastosowano także skutecznie w symulacji odbicia elastycznego okręgu, wzmocnionego cięgnami. W tym, oraz w poprzednio przytoczonych obliczeniach zadań o wielu węzłach zlokalizowanych w strefie kontaktu, nie zaobserwowano braku zbieżności procesu na skutek przemiennego wchodzenia węzła w kontakt i odrywania się (tzw. migotania). W przypadku koła kolejowego liczba węzłów w strefie kontaktu wahała się od 4 do 8. W przypadku elastycznej obręczy dochodziła do 10, a w zadaniu dynamicznego zgniatania cylindra (rys. 4.36) nawet do 100. We wszystkich przypadkach zbieżność osiągnano bardzo szybko.

Zastosowania inżynierskie metody elementów czasoprzestrzennych

Metody obliczeniowe dynamiki stosowane są obecnie do symulacji niemal wszystkich problemów spotykanych w praktyce inżynierskiej. W kolejnych rozdziałach przedstawione zostaną przykłady zadań rozwiązanych z wykorzystaniem metody czasoprzestrzennych elementów skończonych. Wiele symulacji komputerowych można przeprowadzić również innymi metodami obliczeniowymi. Jak wykazaliśmy w poprzednich rozdziałach, metoda elementów czasoprzestrzennych w szczególnych przypadkach może być sprowadzona do metody elementów skończonych ujętej w cykl bezpośredniego całkowania w czasie równania różniczkowego metodą. W wielu jednak przypadkach zastąpić jednak jej nie można.

Jednym z problemów wymagających specjalnego podejścia jest modelowanie przejazdu pojazdu szynowego po torze, moście, przejazdu odbieraka prądu pod przewodem trakcji elektrycznej lub przesuwu robota przemysłowego na prowadnicach. W przypadkach, kiedy masa przesuwanego się obiektu inercyjnego jest znaczna, porównywalna lub przewyższająca masę konstrukcji, z którą się styka i przejeżdża z dużą prędkością, nie możemy jej zastąpić siłą równoważną co do wartości statycznego oddziaływania. W pakietach do symulacji komputerowych nie uwzględniono tej grupy problemów. Jedyną metodą, która dotąd okazała się skuteczna w rozwiązaniu takich zadań jest metoda elementów czasoprzestrzennych.

9.1. Podłużnica karoserii samochodowej

Zbudujemy dyskretny model elementu ramy, będącego fragmentem strukturalnym karoserii samochodowej. Dominują w nim deformacje zlokalizowane w niewielkich strefach. Przekroje poprzeczne ram to cienkościennie przekroje zamknięte. W trakcie zgniatania ścianki ulegają pofałdowaniu harmonijkowemu, absorbując stosunkowo dużo energii. Charakter deformacji skłania nas do zaproponowania elementu sztywnego na zginanie, z możliwością jedynie odkształceń podłużnych. Zginanie będzie realizowane jedynie w węzłach końcowych dzięki nadaniu im możliwości sprężystego obrotu. Takie założenia umożliwiają:

- tworzenie struktur ramowych w trzech wymiarach,
- opis skończonych przemieszczeń i skończonych obrotów,
- przyjęcie opisu quasi-statycznego lub dynamicznego, opisanego w p. 4.6.3,
- narzucenie symetrii obrotów obu węzłów elementów (z możliwością włączania i wyłączenia tej cechy) (rys. 9.1, 9.2),
- przyjęcie różnej sztywności w obu kierunkach zginania (np. przyjęcie prostokątnego pola przekroju poprzecznego) (rys. 9.3).

Możliwa postać przemieszczeń w modelu dwuwymiarowym pokazana jest na rys. 9.4. Obliczenia wykonany przy założeniu, że proces przebiega: 1) quasi-statycznie (patrz rozdział 4.6.3), 2) dynamicznie.

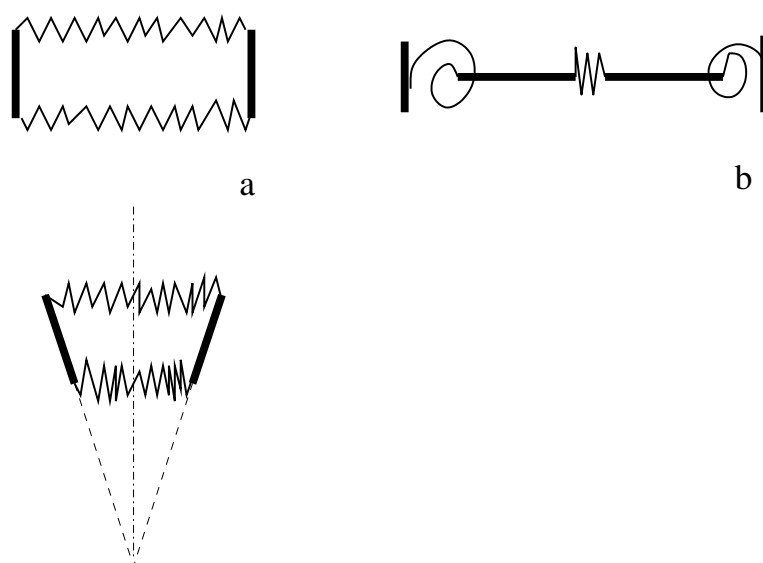
9.1.1. Opis matematyczny

Energia potencjalna elementu o skończonych przemieszczeniach ma następującą postać

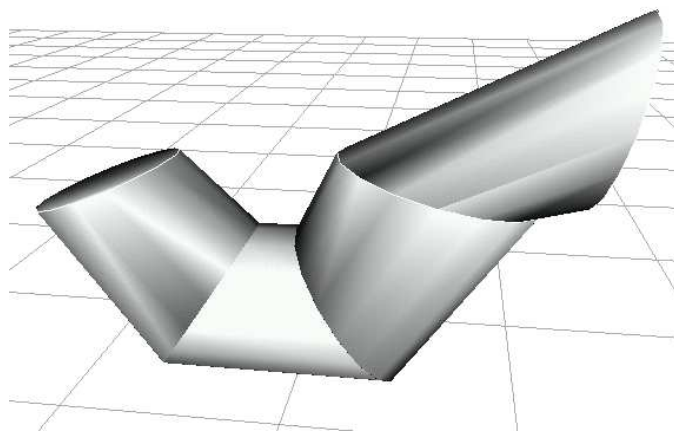
$$P = \int_0^{L_0} EA \epsilon_x dx + \frac{1}{2} k_{f1y} (\varphi_{1y} - \theta_y)^2 + \frac{1}{2} k_{f2y} (\varphi_{2y} - \theta_y)^2 + \frac{1}{2} k_{f1z} (\varphi_{1z} - \theta_z)^2 + \frac{1}{2} k_{f2z} (\varphi_{2z} - \theta_z)^2 + \frac{1}{2} \frac{k_{s0} (\varphi_{2x} - \varphi_{1x})^2}{L_0} - \sum Q_i q_i . \quad (9.1)$$

Energię można rozłożyć na energię związaną z odkształceniem podłużnym P_b , z odkształceniem sprężyn P_s oraz z pracą sił zewnętrznych $\sum Q_i q_i$. W skrócie możemy to zapisać następująco:

$$P = P_b + P_s - \sum Q_i q_i . \quad (9.2)$$



Rysunek 9.1: Przykłady uproszczonych elementów podłużnicy.



Rysunek 9.2: Złożone struktury zbudowane z elementów podłużnicy.

9.1.2. Duże przemieszczenia

Przy małych przemieszczeniach macierz sztywności opisująca osiowe odkształcenia pręta, którego oś pokrywa się z osią OX układu współrzędnych,

Każdy z węzłów reprezentuje 6 stopni swobody w układzie x, y, z . Jedyne cztery wartości są niezerowe. Przy dowolnym położeniu pręta w przestrzeni układ współrzędnych odpowiednio obracamy, a wynikowa macierz będzie iloczynem odpowiednich macierzy obrotów \mathbf{T} : $\mathbf{T}^T \mathbf{K}_{eL}^b \mathbf{T}$.

W przypadku dużych przemieszczeń rozważania rozpoczynamy od określenia energii potencjalnej E_p . Rozpatrywać będziemy pręt prosty o długości początkowej L_0 , o jednym końcu zamocowanym przegubowo i drugim – doznającym przemieszczeń wymuszonych:

$$E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2, \quad \Delta l = \sqrt{(L_0 + \Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2} - L_0. \quad (9.4)$$

Δl jest wydłużeniem pręta, a Δu , Δv i Δw są składowymi przemieszczeń końca. Różniczkowanie E_p względem przemieszczeń węzłowych \mathbf{u} daje w rezultacie macierz sztywności

$$\mathbf{K}_{eN}^b = k \begin{bmatrix} \frac{L_0 + \Delta u}{\Delta u} \left(1 - \frac{L_0}{L_1}\right) & 0 & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & 1 - \frac{l_0}{L_1} & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{l_0}{L_1} & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} \\ \frac{L_0 + \Delta u}{\Delta u} \left(1 - \frac{L_0}{L_1}\right) & 0 & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & 1 - \frac{l_0}{L_1} & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{l_0}{L_1} & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} \\ -\frac{L_0 + \Delta u}{\Delta u} \left(1 - \frac{L_0}{L_1}\right) & 0 & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & -(1 - \frac{l_0}{L_1}) & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -(1 - \frac{l_0}{L_1}) & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} \\ -\frac{L_0 + \Delta u}{\Delta u} \left(1 - \frac{L_0}{L_1}\right) & 0 & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & -(1 - \frac{l_0}{L_1}) & 0 & | & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -(1 - \frac{l_0}{L_1}) & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

Odpowiednie bloki macierzy są podmacierzami o zerowych współczynnikach. Końcowa długość pręta po odkształceniu wynosi w kwadracie $L_1^2 = (L_0 + \Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2$. Stan zgięciowy w przypadku małych przemieszczeń

opisany jest macierzą sztywności \mathbf{K}_e^s :

$$\mathbf{K}_{eL}^s = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{f1z}+k_{f2z}}{L_0^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{f1z}}{L_0} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{f1y}+k_{f2y}}{L_0^2} & 0 & -\frac{k_{f1y}}{L_0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{k_{s0}}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_{f1y}}{L_0} & 0 & k_{f1y} & 0 \\ 0 & \frac{k_{f1z}}{L_0} & 0 & 0 & 0 & k_{f1z} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_{f1z}+k_{f2z}}{L_0^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{f1z}}{L_0} \\ 0 & 0 & \frac{k_{f1y}+k_{f2y}}{L_0^2} & 0 & \frac{k_{f1y}}{L_0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{s0}}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_{f1y}}{L_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{f2z}}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_{f1z}+k_{f2z}}{L_0^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{f2z}}{L_0} \\ 0 & 0 & \frac{k_{f1y}+k_{f2y}}{L_0^2} & 0 & -\frac{k_{f2y}}{L_0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{s0}}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{f1y}}{L_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_{f1z}}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{f1z}+k_{f2z}}{L_0^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{f2z}}{L_0} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{f1y}+k_{f2y}}{L_0^2} & 0 & \frac{k_{f2y}}{L_0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{k_{s0}}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{f2y}}{L_0} & 0 & k_{f2y} & 0 \\ 0 & -\frac{k_{f2z}}{L_0} & 0 & 0 & 0 & k_{f2z} \end{array} \right] \quad (9.6)$$

Macierze powyższe nie zapewniają opisu obrotu pręta jako bryły sztywnej. Wprawdzie przy niewielkich, w stosunku do długości pręta, wartościach przemieszczeń wyniki są wystarczająco dokładne, w zadaniach o skończonych przemieszczeniach należy poszukać lepszego opisu ruchu.

9.1.3. Skończone przemieszczenia i obroty

Rozpatrzmy oddzielnie odkształcenia osiowe pręta oraz odkształcenia wywołane obrotami węzłów. Oba stany są niezależne. Odkształcenie osiowe w pręcie definiujemy następująco:

$$\epsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) . \quad (9.7)$$

Przyjmujemy interpolacje liniową przemieszczeń węzłowych

$$\begin{aligned} u &= \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) u_1 + \frac{x}{L_0} u_2 \\ v &= \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) v_1 + \frac{x}{L_0} v_2 \\ w &= \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) w_1 + \frac{x}{L_0} w_2 . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Energia potencjalna P_b w pręcie o skończonych przemieszczeniach wynosi

$$P_b = \int_0^{L_0} EA \epsilon_x dx . \quad (9.9)$$

Naszym celem jest uzyskanie postaci macierzy spełniającej zasadę minimum energii

$$\frac{\partial P_b}{\partial \mathbf{q}_e} = \mathbf{0} , \quad (9.10)$$

gdzie \mathbf{q} zawiera wartości przemieszczeń węzłowych obu końców pręta

$$\mathbf{q}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} . \quad (9.11)$$

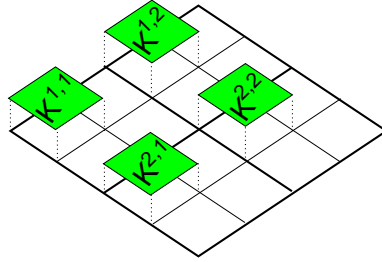
Uzyskujemy następującą postać równania:

$$\mathbf{K}_{eN} \mathbf{q}_e = \mathbf{0} , \quad (9.12)$$

gdzie macierz \mathbf{K}_{eN} składa się z trzech macierzy zawierających przemieszczenia w różnych potęgach.

$$\mathbf{K}_{eN} = \mathbf{K}_{1N} + \mathbf{K}_{2N} + \mathbf{K}_{3N} . \quad (9.13)$$

Macierz \mathbf{K}_{1N} jest macierzą w członach o współczynnikach liniowych, macierz \mathbf{K}_{2N} opisuje człony kwadratowe, a \mathbf{K}_{3N} – człony sześciennne. Ćwiartki macierzy sztywności (9.13) wynikające z odkształceń osiowych pręta uwzględniane są w pełnej macierzy elementu w sposób pokazany na rys. 9.5.



Rysunek 9.5: Podmacierze macierzy pręta wpisane w macierz globalną.

$$\mathbf{K}_{1N} = \frac{EA}{L_0} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9.14)$$

$$\mathbf{K}_{2N} = \frac{EA}{2L_0^2} \left[\begin{array}{c|c|c} 3(u_2 - u_1) & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ \hline v_2 - v_1 & u_2 - u_1 & 0 \\ \hline w_2 - w_1 & 0 & u_2 - u_1 \\ \hline \hline -3(u_2 - u_1) & -(v_2 - v_1) & -(w_2 - w_1) \\ \hline -(v_2 - v_1) & -(u_2 - u_1) & 0 \\ \hline -(w_2 - w_1) & 0 & -(u_2 - u_1) \end{array} \right] \quad (9.15)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -3(u_2 - u_1) & -(v_2 - v_1) & -(w_2 - w_1) \\ \hline -(v_2 - v_1) & -(u_2 - u_1) & 0 \\ \hline -(w_2 - w_1) & 0 & -(u_2 - u_1) \\ \hline \hline 3(u_2 - u_1) & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ \hline v_2 - v_1 & u_2 - u_1 & 0 \\ \hline w_2 - w_1 & 0 & u_2 - u_1 \end{array} \right] \cdot$$

\mathbf{K}_{3N} ma wymiary 6×6 . W skrócie można to zapisać jako iloczyn wektorów

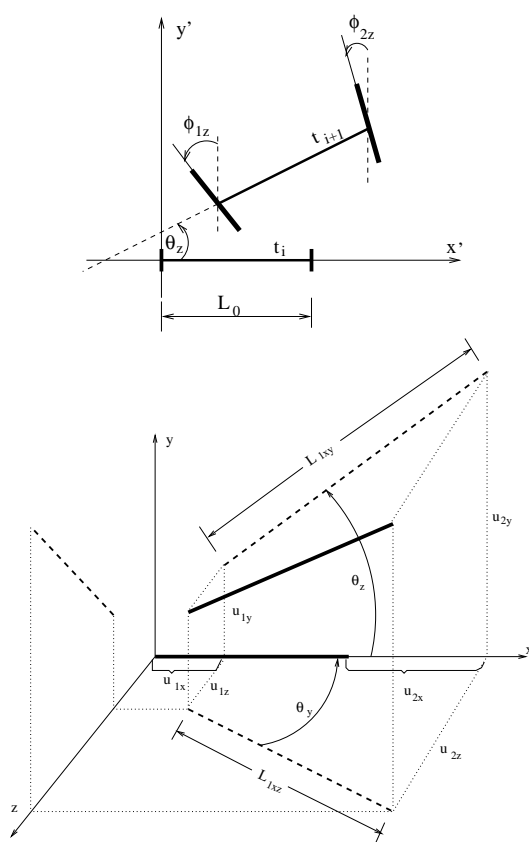
$$\mathbf{K}_{3N} = \frac{EA}{2L_0^3} \left\{ \begin{array}{l} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \\ -(u_2 - u_1) \\ -(v_2 - v_1) \\ -(w_2 - w_1) \end{array} \right\} \cdot [u_2 - u_1; v_2 - v_1; w_2 - w_1 | \quad (9.16)$$

$$| -(u_2 - u_1); -(v_2 - v_1); -(w_2 - w_1)]$$

Powyższy iloczyn w efekcie opisuje macierz 6×6 . Wyrazy zawierają kwadraty przemieszczeń węzłowych.

Zginanie w węzłach podłużnicy

Przyjmujemy oznaczenia przedstawione na rys. 9.6.



Rysunek 9.6: Oznaczenia przyjęte w opisie konfiguracji pręta.

Energia potencjalna P_s odpowiadająca obrotom węzłów i skręcaniu opisuje poniższa wielkość:

$$P_s = \frac{1}{2}k_{f1y}(\varphi_{1y} - \theta_y)^2 + \frac{1}{2}k_{f2y}(\varphi_{2y} - \theta_y)^2 + \frac{1}{2}k_{f1z}(\varphi_{1z} - \theta_z)^2 + \frac{1}{2}k_{f2z}(\varphi_{2z} - \theta_z)^2 + \frac{1}{2} \frac{k_{s0}(\varphi_{2x} - \varphi_{1x})^2}{L_0}. \quad (9.17)$$

Kąty θ_y i θ_z przedstawiają proste wielkości trygonometryczne:

$$\theta_y = -\arctan\left(\frac{u_{2z} - u_{1z}}{L_0 + u_{2x} - u_{1x}}\right), \quad \theta_z = \arctan\left(\frac{u_{2y} - u_{1y}}{L_0 + u_{2x} - u_{1x}}\right). \quad (9.18)$$

Po podstawieniu wartości kątów (9.18) do wyrażenia (9.17) możemy wyznaczyć pochodne P_s względem kolejnych przemieszczeń i ostatecznie współczynniki sztywności elementu. Operacje te są proste, choć wynikowe wyrażenia są rozbudowane. Pozostawiamy ten etap zainteresowanemu czytelnikowi.

9.2. Macierz funkcji kary

Zakładamy dwa równania, które muszą być dodatkowo spełnione przy obrotach węzłów

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{1y} + \varphi_{2y}}{2} &= -\frac{u_{2z} - u_{1z}}{L_0} \\ \frac{\varphi_{1z} + \varphi_{2z}}{2} &= \frac{u_{2y} - u_{1y}}{L_0}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Można je zapisać macierzowo

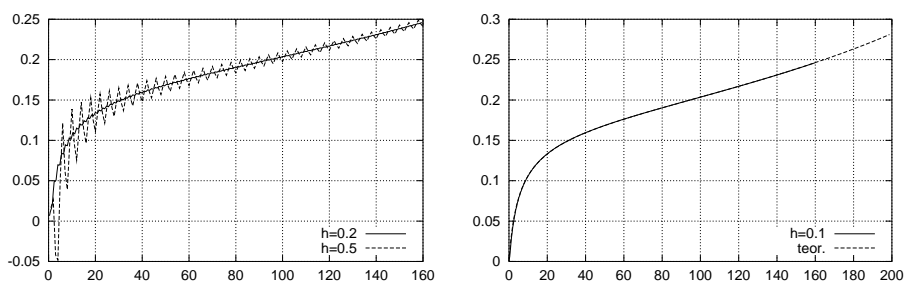
$$\mathbf{C}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{0}, \quad (9.20)$$

gdzie

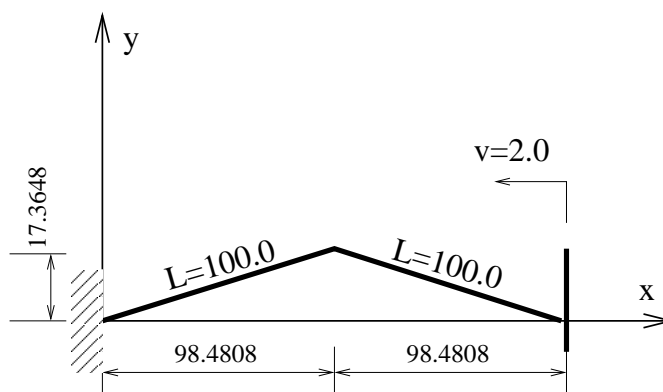
$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & L_0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & L_0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & L_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.21)$$

Macierz sztywności \mathbf{K}'_e uzupełniona jest dodatkową macierzą kary ze współczynnikiem γ

$$\mathbf{K}'_e{}^c = \mathbf{K}'_e + \gamma \mathbf{C}_e^T \mathbf{C}_e. \quad (9.22)$$



Rysunek 9.7: Reakcja względem przemieszczenia.



Rysunek 9.8: Schemat dynamiczny zadania.

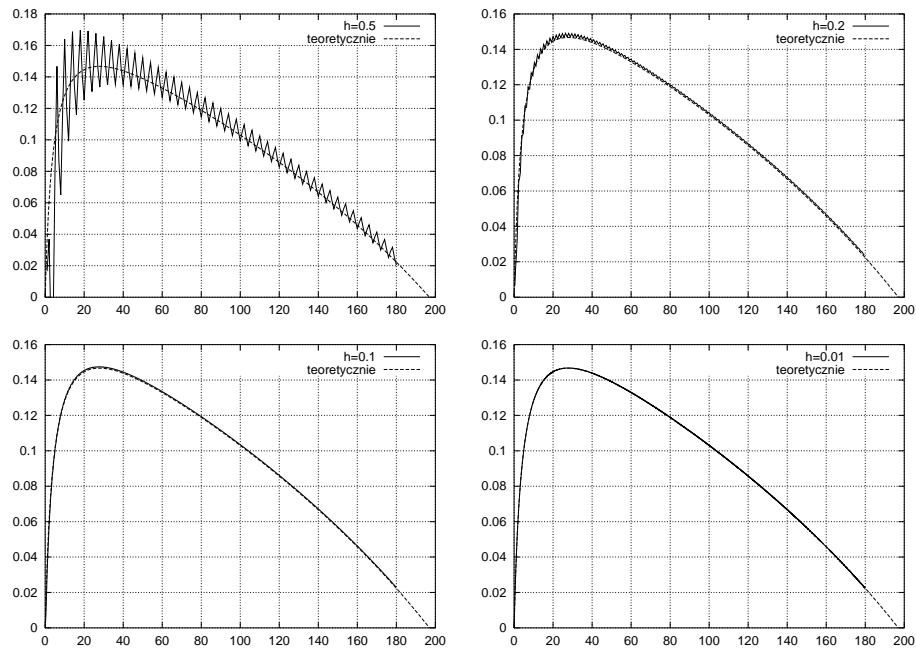
Przykłady liczbowe

Badano układ dwóch prętów (rys. 9.8). Wyniki pokazano na rys. 9.7. Nieliniowy materiał (z osłabieniem) daje wyniki pokazane na rys. 9.9. Związek konstytutywny dany jest wzorem

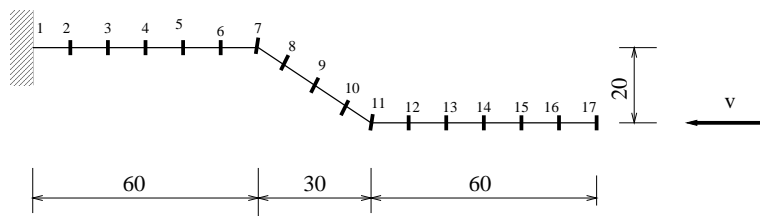
$$k_f = \frac{40}{9}\pi - 10\varphi . \quad (9.23)$$

Zbadano zadanie testowe pokazane na rys. 9.10 aby sprawdzić skuteczność opracowanej metody.

Rys. 9.11 pokazuje kształt ramy S. Na lewym rysunku wymuszono przemieszczenie poziome końcowego węzła. Na prawym rysunku dodatkowo zamocowano pionowe przemieszczenie tego węzła.



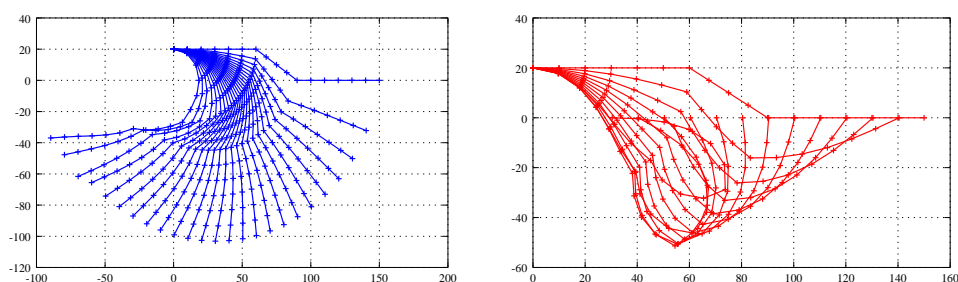
Rysunek 9.9: Reakcja względem przemieszczenia w przypadku materiału z osłabieniem przy różnym kroku czasowym



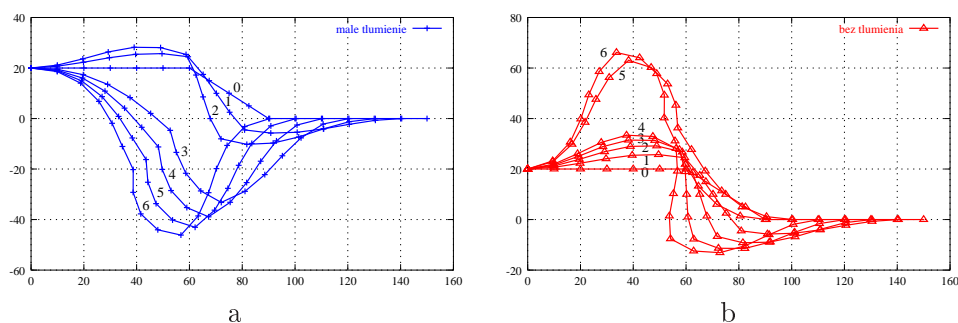
Rysunek 9.10: Schemat ramy S.

W następnym przykładzie zamocowano obrót przesuwanego końca. Zastosowano małe tłumienie $\eta_z = 5 \cdot 10^{-5}$. Wyniki porównano z przypadkiem braku tłumienia.

Na rys. 9.13 widoczna jest zbieżność procesu bez masy i bez tłumienia. Rys. 9.14 pokazuje fragment poprzedniego rysunku. Rys. 9.15 pokazuje, że małe tłumienie nie zmniejsza drgań pasożytniczych. Względnie wysoki



Rysunek 9.11: Rama S — geometria w kolejnych etapach przy różnym sposobie wymuszenia ruchu prawego węzła.



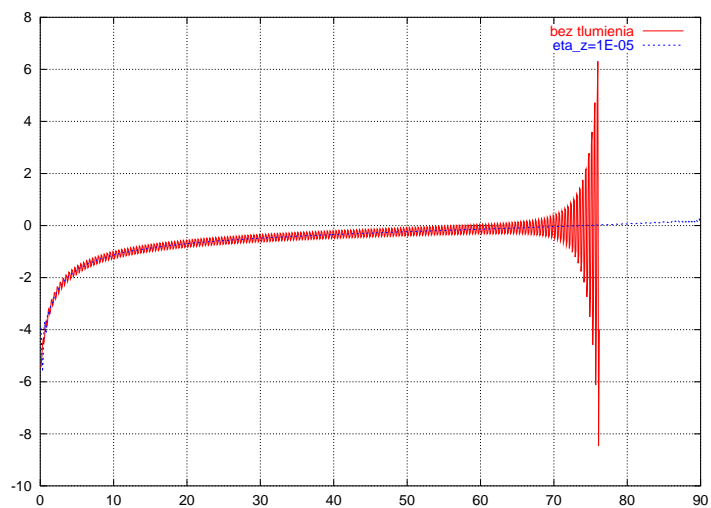
Rysunek 9.12: Rama typu S — geometria w kolejnych fazach z małym tłumieniem (a) i bez tłumienia (b).

współczynnik η_z jest wymagany nawet w początkowej fazie procesu.

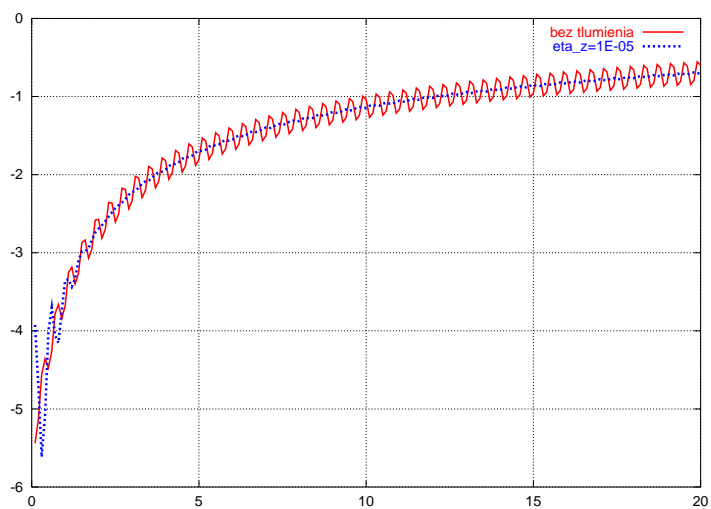
9.2.1. Wnioski

Opisana metoda okazuje się skuteczną w modelowaniu prętowych układów, w których całość procesów mechanicznych opisują parametry w węzłach. Procesy mechaniczne sprowadzone do węzłów zadawane mają być na podstawie otrzymywanych opisów eksperymentalnych bądź wyników uzyskanych innymi procedurami obliczeniowymi.

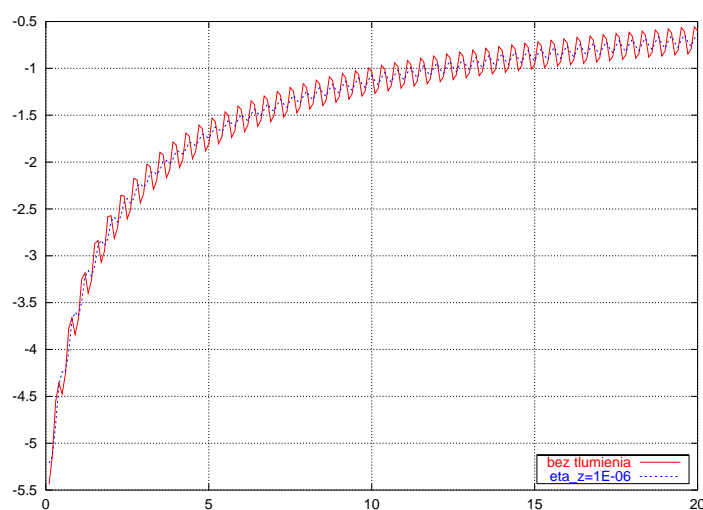
Istotnym jest fakt, że jeden opis matematyczny wraz z procesem całkowania równania różniczkowego ruchu może być zastosowany zarówno do zadań statyki jak i dynamiki. W tym pierwszym przypadku mamy do dyspozycji tylko jeden punkt pracy opisaną procedurą $\alpha = 1$.



Rysunek 9.13: Zbieżność procesu bez tłumienia (rama S) – pionowe przemieszczenia węzła nr 11 z rys. 9.10.



Rysunek 9.14: Początkowa faza deformacji (część rys. 9.13).



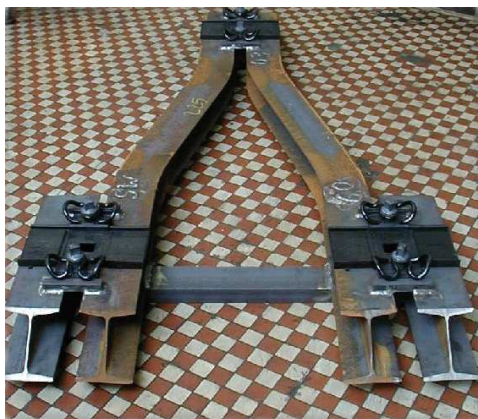
Rysunek 9.15: Tłumienie $\eta_z = 0$ i $\eta_z = 10^{-6}$.

9.3. Dynamika układu pojazd–tor

Tory bezpodsypkowe i tory z podkładami stalowymi klinowymi (zwanymi też podkładami typu „Y”) są przykładem układu dynamicznego tor-pojazd. Modernizacja, ze względu na bezpieczeństwo, układów zawieszenia i wysokie wymagania przepisów kolejowych jest stosowana rzadko i okupiona jest długimi i kosztownymi badaniami prototypów. Zauważalną poprawę współpracy dynamicznej układu koło-szyna daje modernizacja starych torowisk przy zastosowaniu nowych technologii. Przykładem jest linia Kraków Płaszów-Oświęcim, gdzie powstał odcinek drogi kolejowej ze stalowymi podkładami typu Y. Podkłady stalowe są również eksploatowane przez koleje linowo-terenowe na Gubałówkę w Zakopanem i na Górę Parkową w Krynicy Górskiej.

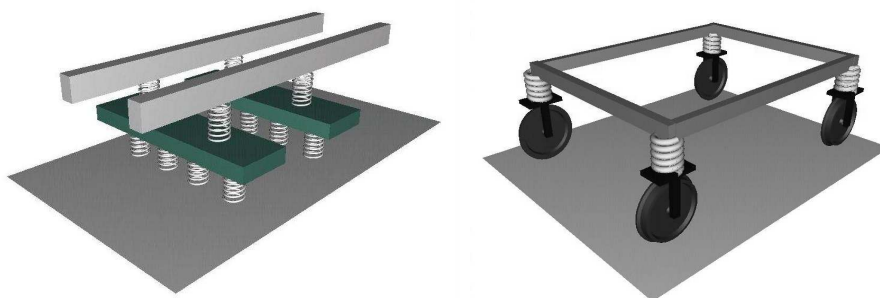
Zaletą zastosowania podkładów „Y” polega na zwiększeniu poprzecznej sztywności toru i zwiększeniu jego bezwładności przez włączenie podsypki do współpracy z przekrojami stalowymi (rys. 9.16). Jest to szczególnie ważne na łukach i w obszarach górzystych. Wadą jest wyższy koszt wykonania. Pomiarzy na eksperymentalnych odcinkach wykazują znaczne obniżenie poziomu hałasu przy przejeździe pociągu.

O ile budowa próbnych odcinków eksploatacyjnych jest droga, a badania czasochłonne, to symulacje komputerowe można wykonać szybko. Są war-



Rysunek 9.16: Podkład stalowy klinowy.

tościowe wówczas, gdy analizowany model odpowiada możliwie wiernie modelowi fizycznemu [165, 168]. Przy jego opracowywaniu podstawową sprawą jest ustalenie, jaka część masy koła stykającego się z szyną współdziała z nią dynamicznie. Pozostałe parametry modelu można stosunkowo dobrze dobrać na podstawie dokumentacji technicznej. Pewne jest, że przy dużych prędkościach jazdy nie należy obciążać toru jedynie elementem sprężystym, nieinercyjnym, a należy uwzględnić masę, na której można następnie ulokować złożony nawet model pojazdu.



Rysunek 9.17: Model toru oraz schemat pojazdu szynowego przyjęte w obliczeniach numerycznych.

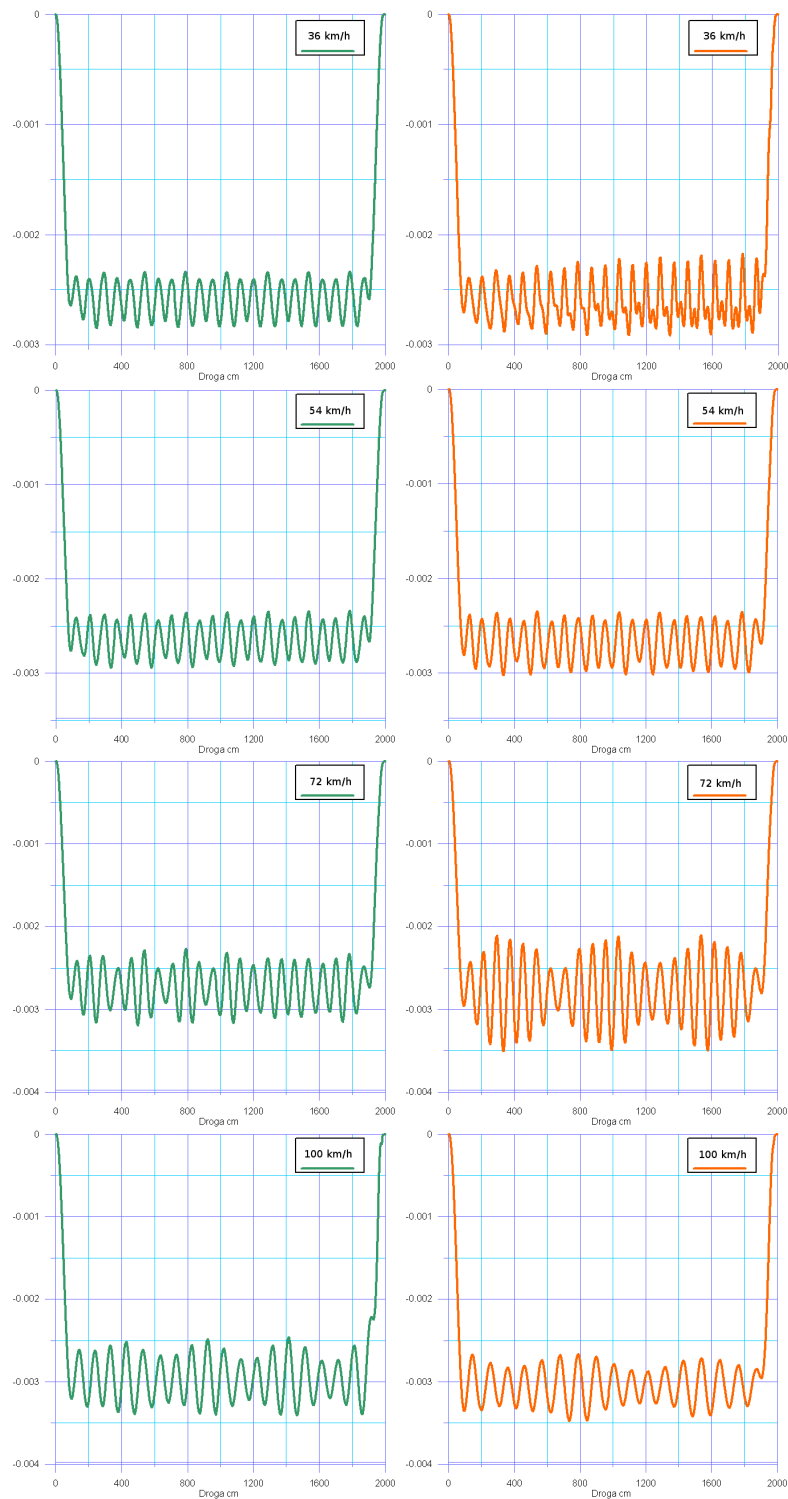
Zadanie przejazdu pojazdu szynowego po torze klasycznym oraz typu

„Y” podzielono na dwa podukłady. Pierwszy to tor złożony z szyn, podkładów, lepkosprężystych przekładek oraz lepkosprężystego podłoża gruntowego. Drugi podukład to pojazd szynowy, zbudowany w prosty sposób z czterech oscylatorów, połączonych odkształcalną ramą (rys. 9.17). Przyjmujemy, że drgania obu szyn sprzęgane są przez zestawy kołowe, a elementem sprzęgającym drgania propagujące się wzdłuż szyny jest rama wózka pojazdu szynowego. Szyny, podkłady oraz ramy wózka przyjęto jako elementy rusztu, o trzech stopniach swobody w węźle. Przekładki przyjęto jako elementy skończone pręta. Podłoże gruntowe przyjęto jako inercyjne podłoże Winklera. Odpowiednio dobrano sztywności ramy oraz bezwładność poszczególnych elementów. W przypadku uproszczonego modelu pojazdu, w którym masy kół są zgranulowane, dobrano wielkości masy koła, jaka towarzyszy przemieszczeniom poprzecznym szyny w przedziale 15%–50% masy koła.

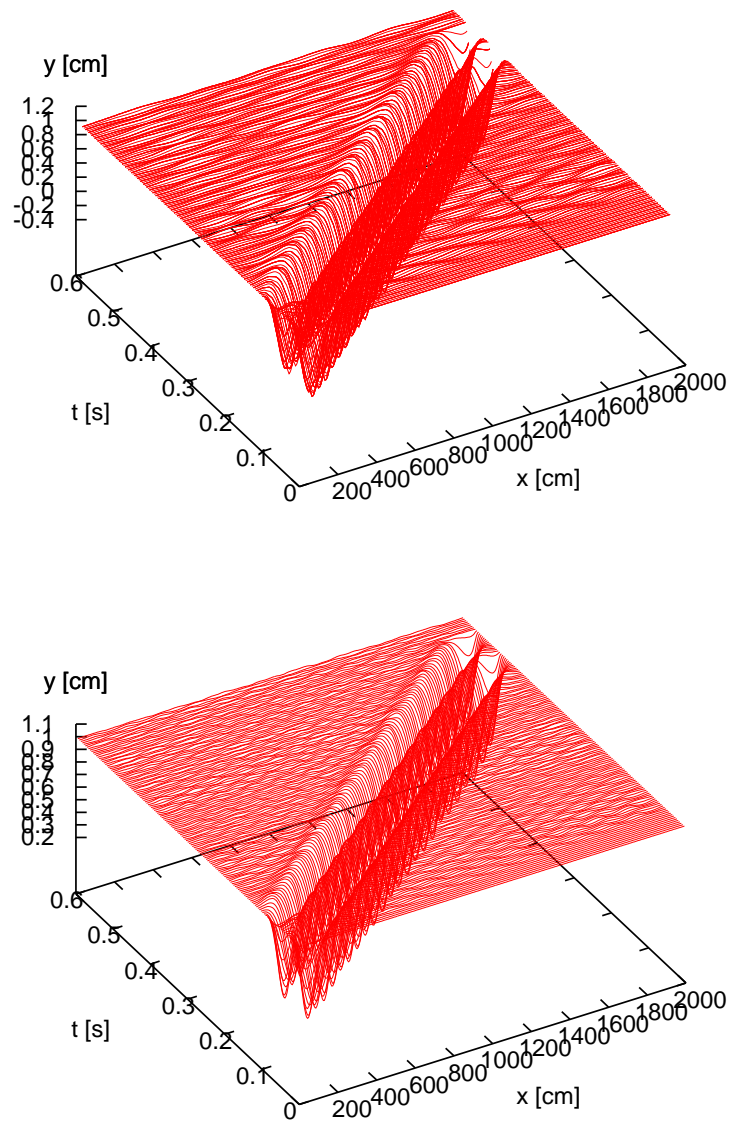
Oba układy dynamiczne rozwiązywano niezależnie, budując i rozwiązując odpowiednie wynikowe układy równań algebraicznych. Siatki węzłów obu układów dyskretnych przemieszczały się względem siebie i w związku z tym zastosowano prostą procedurę iteracyjną równoważenia sił w obu układach. W pierwszym etapie tor obciążano w punktach kontaktu kół z szynami siłami odpowiadającymi naciskowi dynamicznemu kół wózka. W wyniku otrzymano przemieszczenia węzłów siatki dyskretnej szyny. To pozwalało wyznaczyć przemieszczenia pionowe szyn w miejscach ich kontaktu z kołami. Przemieszczenia przyjmowano jako warunki brzegowe w rozwiązaniu układu wózka obciążonego siłami zewnętrznymi, m.in. ciężarem własnym i ciężarem pudła wagonu. Wynikiem rozwiązania tego etapu były reakcje w miejscach kontaktu z szynami. Reakcje te, z przeciwnymi znakami służyły ponownie do obciążenia toru. Powtarzana iteracyjnie procedura prowadziła w kilku krokach do zrównoważenia układu statycznego i następnie pozwalała przejść do następnej chwili w procesie dynamicznym. Procedura działa poprawnie w pewnych zakresach parametrów. W naszym przypadku w praktyce nie dochodziło do utraty stabilności rozwiązania, o ile krok czasowy nie był zbyt duży.

Rys. 9.18 pokazuje porównanie przemieszczeń pionowych w czasie przy przejeździe zestawu kołowego z różną prędkością. Wyniki uzyskane metodą elementów czasoprzestrzennych porównano z wynikami programu Medyna. Mimo mocno różniącego się podejścia przy tworzeniu modelu numerycznego w programie Medyna oraz MECz, uzyskano podobieństwo wyników. Jednym z odstępstw jest zaobserwowane przy prędkości 72 km/h i wyższej, dudnienie. Można spodziewać się wystąpienia tego zjawiska w wynikach Medyny przy nieco innej prędkości jazdy. Ta różnica może wynikać z nieuwzględnie-

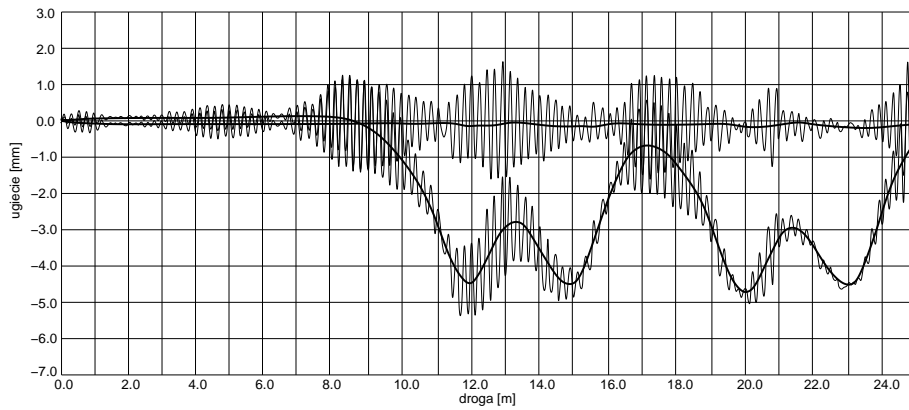
nia w programie Medyna masy kół, stowarzyszonej w ruchu poprzecznym z szynami. Trójwymiarowy obraz odkształconych osi szyn w kolejnych chwilach pokazuje rys. 9.19. Dostrzegamy wyższe amplitudy przemieszczeń toru klasycznego, widoczne zwłaszcza w pewnej odległości od kół pojazdu szynowego. W celu porównania zamieszczono wyniki pomiarów przejazdu po torze, zarejestrowane w Niemczech (rys. 9.20). Oprócz przemieszczeń w czasie pokazano również wartości średnie, zbliżone do quasistatycznych, oraz wartości pomniejszone o wartości ugięć statycznych. Oprócz lepszych własności dynamicznych rejestrowanych na poziomie szyn można pokazać mniejsze amplitudy wybranego punktu na ramie pojazdu szynowego. Różnice między przejazdem po torze klasycznym i typu „Y” są znaczące i sięgają kilkudziesięciu procent (rys. 9.23).



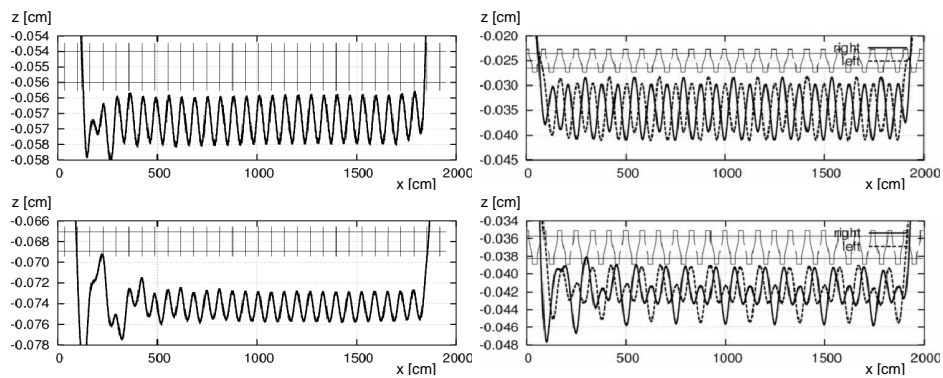
Rysunek 9.18: Przemieszczenia pionowe punktu kontaktu koła z szyną uzyskane programem Medyna (lewa kolumna) oraz metodą MECz (prawa kolumna) przy prędkości 36, 54, 72 i 100 km/h.



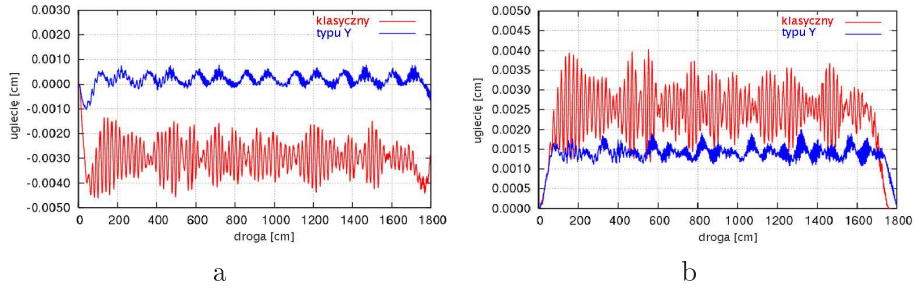
Rysunek 9.19: Pionowe przemieszczenia toru klasycznego (z lewej) oraz typu “Y” (z prawej) w czasoprzestrzeni, obciążonego wózkiem poruszającym się z prędkością 40 m/s.



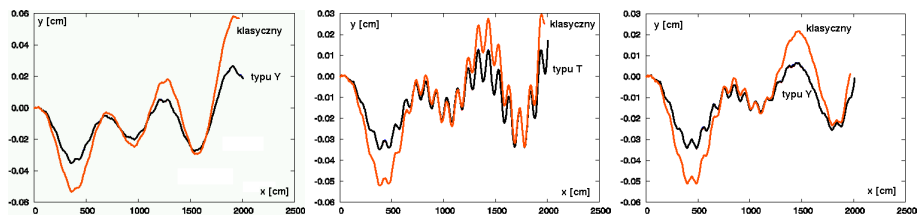
Rysunek 9.20: Pomiary przemieszczeń pionowych szyny przy przejeździe z prędkością 60 km/h oraz przemieszczenia pomniejszone o ugięcia statyczne.



Rysunek 9.21: Pionowe przemieszczenia punktów kontaktu podczas jazdy z prędkością 30 m/s (górne) i 50 m/s (dolne).



Rysunek 9.22: Pionowe przemieszczenia zarejestrowane (a) 120 cm i (b) 180 cm przed punktem kontaktu pierwszego zestawu kołowego wózka wagonowego z szyną w torze klasycznym i torze z podkładami typu „Y”, przy prędkości 40 m/s.

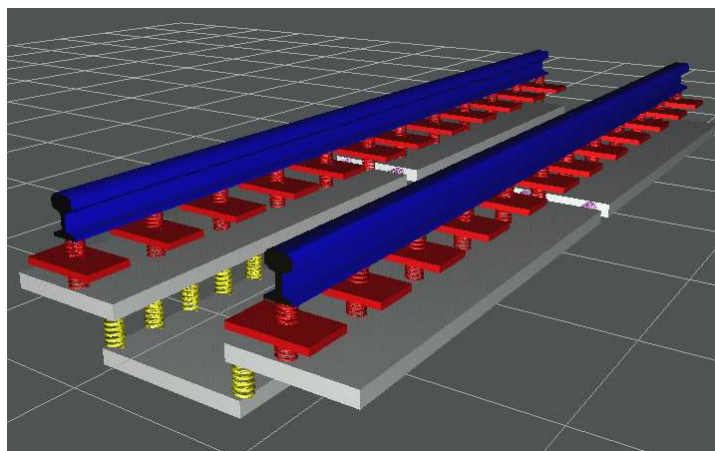


Rysunek 9.23: Pionowe przemieszczenia ramy pojazdu przy prędkościach 30, 34 i 36 m/s.

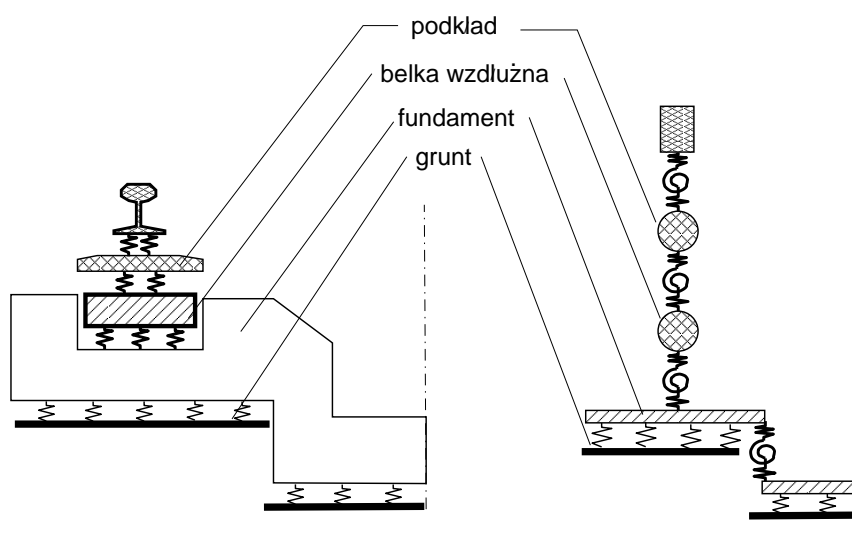
9.4. Dynamika toru metra

Analiza przejazdu kolei podziemnej ma na celu ocenę szkodliwego wpływu drgań na otoczenie. Odnosi się to zarówno do pasażerów jak i mieszkańców okolicznych budynków. Szkodliwość to z jednej strony dokuczliwe, zbyt głośne dźwięki o niskich częstotliwościach, z drugiej – drgania powodujące nierównomierne osiadania fundamentów budynków i zarysowania tynków. Ludzkiemu uchu bardziej dokucza dźwięk złożony z dwóch składowych modalnych, o bliskich sobie częstotliwościach, niż pojedynczy mod o wyższej nawet amplitudzie. Z kolei wzrost prędkości przejazdu wagonów metra zwiększa amplitudy drgań przenoszonych na otoczenie. Istniejącego tunelu metra nie można przebudować. Nie można też ułożyć wokół niego wibroakustycznej izolacji głębokiej. Można natomiast próbować wpływać na dynamikę układu pojazd–tor przez modyfikację charakterystyk dynamicznych pojazdu szynowego lub zmieniać posadowienie toru w tunelu metra. Jedną z takich prób modyfikacji bliskiego otoczenia torowiska przedstawimy poniżej. Idea polega na przeniesieniu lokalnych efektów dynamicznych w punktów kontaktu koła z szyną na większy obszar toru. Ułożenie belki podłużnej pod podkładami, odizolowanej od fundamentu matą izolującą drgania, zwiększa dodatkowo bezwładność układu pojazd–szyna–podkłady i stanowi swojego rodzaju dynamiczny tłumik drgań. Dobór przekroju belki podłużnej oraz grubości izolacji płytkiej winien uwzględniać, oprócz własności dynamicznych elementów układu (zwłaszcza uresorowania, rozkładu mas, sztywności przekładek podszynowych czy konstrukcji węzłów utwierdzenia), również prędkość przejazdu na poszczególnych odcinkach.

Numeryczny model budujemy w sposób pokazany na rys. 9.24. Schemat został rozszerzony o belkę położoną pod podkładami, odizolowaną od płyt podłoża warstwą sprężystą (rys. 9.25). Taki schemat pozwolił analizować możliwość odizolowania podstawowego układu toru od otoczenia. Drgania wywołane przejazdem pojazdu, a zwłaszcza sprzęgnięcie drgań wywołanych kolejnymi zestawami kołowymi mogą być w ten sposób znacznie zredukowane. W szczególnym przypadku przyjmując małą sztywność belki wzdłużnej można zadanie rozszerzone sprowadzić do schematu podstawowego. Model numeryczny opisano następującymi rodzajami elementów: ruszt – zastosowany do szyn i podkładów, belki – w zastosowaniu do belek podłużnych, płyty – opisujące fundament oraz podłoże sprężysto-lepkie typu Winklera opisujące grunt. Przekładki sprężyste opisano elementami lekko sprężystymi. Płyty fundamentu toru połączono elementami sprężystymi z możliwością sprężystego obrotu. Stosunkowo prosty model toru dobrze opisuje zadanie rzeczywiste. Uwzględniono masę ruchomą (jadącą), stowarzyszoną



Rysunek 9.24: Model toru metra.

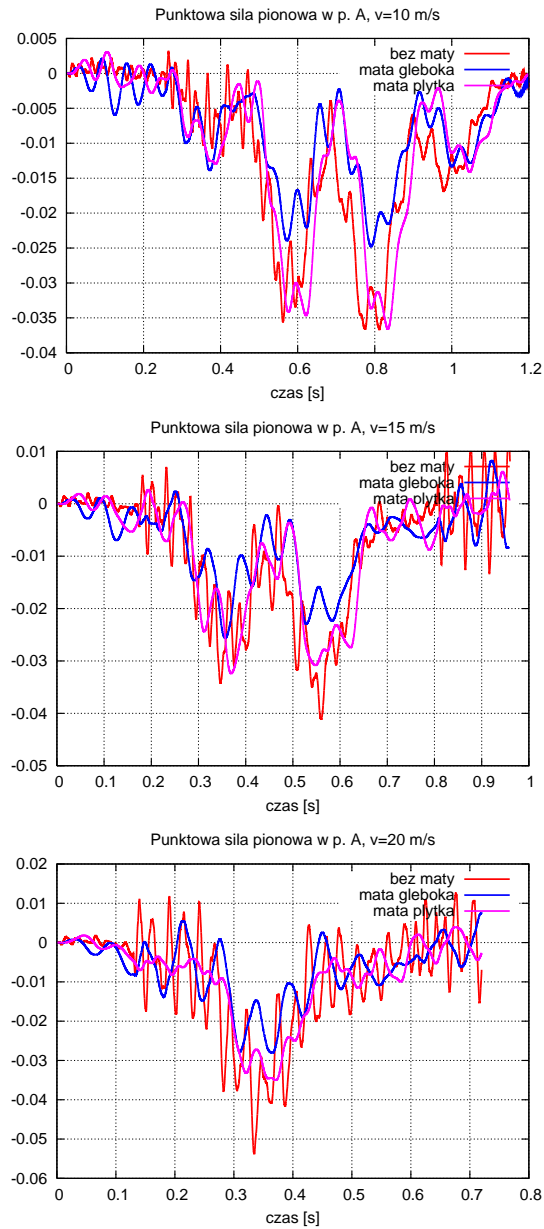


Rysunek 9.25: Schemat modyfikacji toru metra.

z belką (szyną). Jest to istotne z uwagi na poprawność sformułowania i uzyskiwanych wartości liczbowych wyników. Szczegółowo problem ten opisano w rozdziale 7.

Przykładowe wartości reakcji w punkcie węzłowym pod płytą fundamen-

tową przedstawia rys. 9.26. Porównano wartości sił w przypadku zastosowania wibracyjnej izolacji głębokiej, izolacji płytkiej i bez izolacji. Przy małych prędkościach mata płytka nie wnosi widocznych zmian. Przy wyższych prędkościach jej rola zaczyna się uwidaczniać. Mata głęboka poprawia wyniki w całym zakresie prędkości. Niestety, jej wprowadzenie nie jest możliwe po wybudowaniu obiektu.

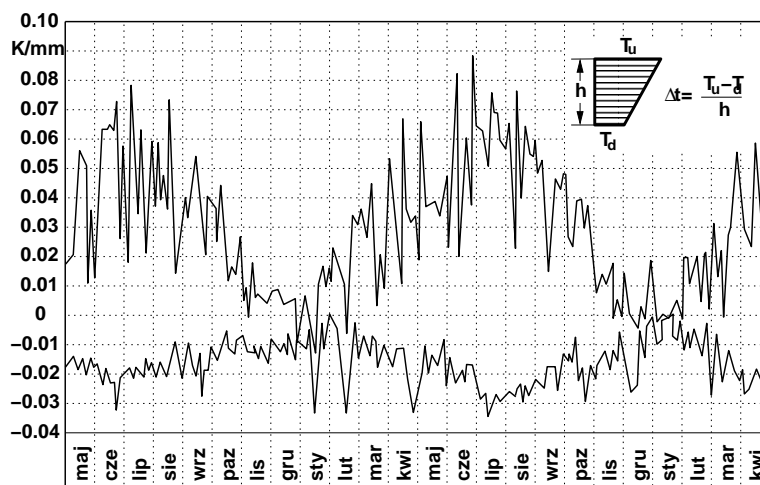


Rysunek 9.26: Wielkość reakcji pod płytą fundamentową przy różnych rozwiązaniach podtorza, przy prędkości 10, 15 i 20 m/s.

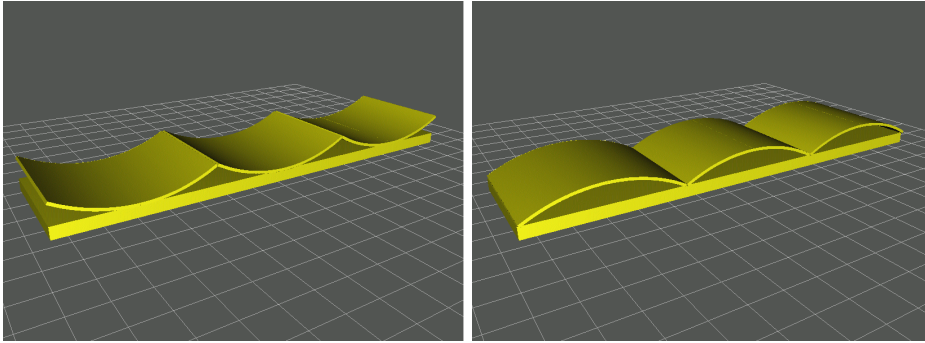
9.5. Drgania płyt lotniskowych

Płyty pasów lotniskowych to konstrukcje nietypowe. Grubość ich sięga 2 m. Do tego jest to konstrukcja warstwowa, złożona z dwóch płyt oddzielonych cienką warstwą izolującą wprowadzającą dylatację. Obciążeniem jest zestaw punktowo przyłożonych sił, poruszających się z dużą prędkością. Problem stanowią odkształcenia wywołane zmianami temperatur (rys. 9.27). Gradient temperatury sięga $0,08 \text{ }^\circ\text{C/mm}$ grubości płyty. Nagrzanie się i stygnięcie powierzchni w słoneczne dni powoduje zmiany wysokości sięgające kilku centymetrów (rys. 9.28). Płyta obciążona odkształceniami wywołanymi ogrzaniem wierzchniej warstwy, położona na jednostronnym podłożu sprężystym odkształca się wypukłością ku górze. Pod wpływem ciężaru własnego długie płyty opadają i pękają w pewnej odległości od krańców na skutek kumulacji naprężeń wywołanych odkształceniami termicznymi i obciążeniem użytkowym (rys. 9.29). Proces powtarza się odszczepiając kolejne odcinki na końcach. W ten sposób płyta ciągła pęka w równych odstępach. Aby proces ten ukierunkować, nacina się płyty stymulując pęknięcia w ustalonych osłabionych przekrojach. W efekcie do użytku, a w naszym przypadku do symulacji trafia pojedynczy odcinek płyty.

Problem obliczeń dynamicznych jest ważny z uwagi na znaczną masę startową ciężkich samolotów (np. masa An 225 dochodzi do 600 ton). Łatwo wy-

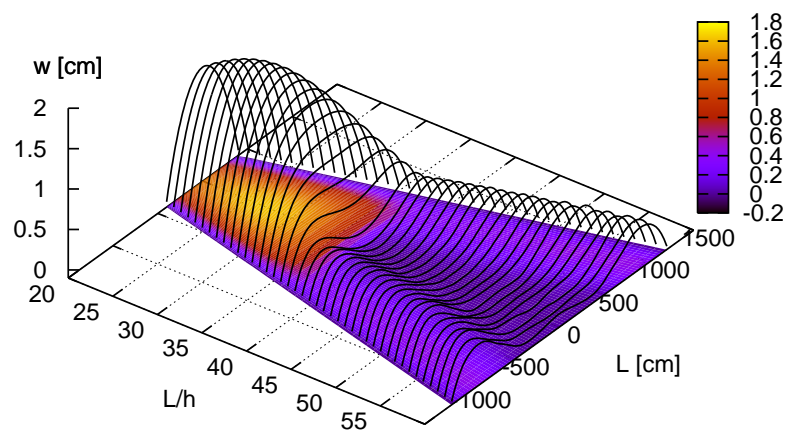


Rysunek 9.27: Roczne zmiany gradientów temperatur w płycie lotniskowej w dzień (wykres górny) i w nocy (wykres dolny).

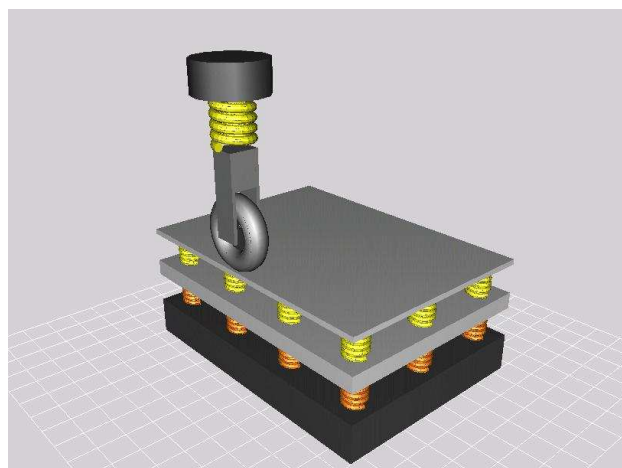


Rysunek 9.28: Odkształcenia segmentów płyt pod wpływem zmian temperatury: w nocy i we dnie.

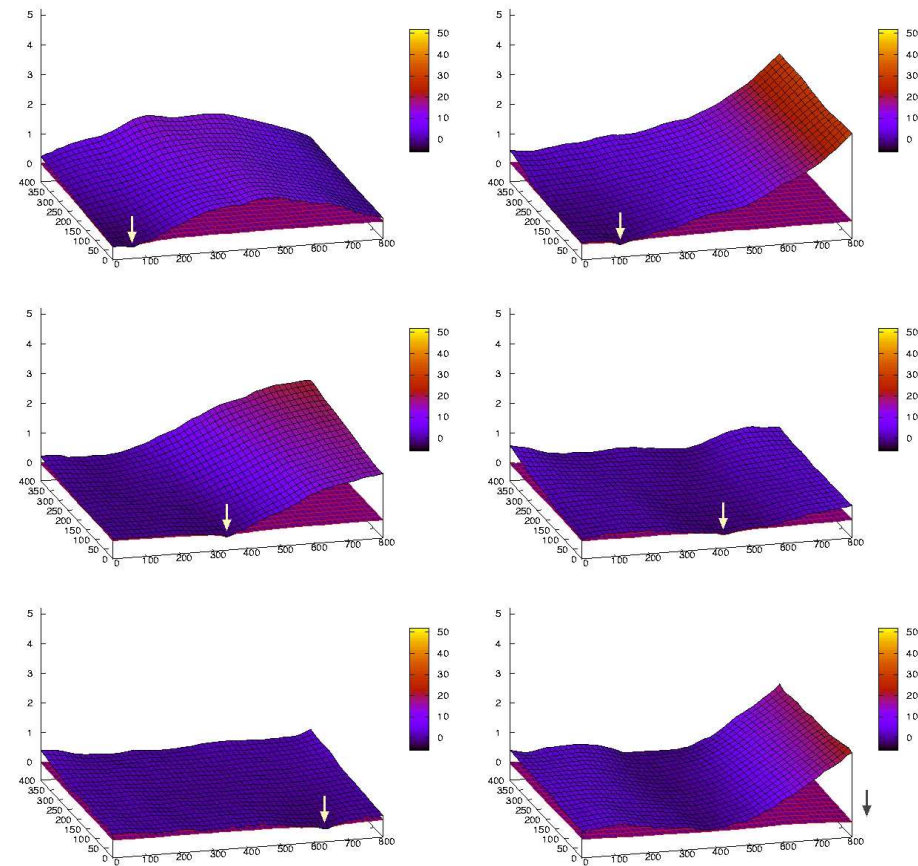
obrazić sobie fizycznie badany obiekt. Na etapie opisu numerycznego trudno jest jednak podjąć decyzję, jak rozpocząć konstruowanie modelu. Należy uwzględnić m.in. efekt wzajemnego kontaktu obu betonowych płyt. Może to być rozpatrywane lokalnie, w otoczeniu punktu przyłożenia siły. Gruba warstwa betonowej płyty wierzchniej może być rozpatrywana np. jako trójwymiarowy blok. Do tego dochodzi podłoże gruntowe, zazwyczaj opisywane jednostronnymi więzami. Ułożona między warstwami betonu warstwa dylatacyjna może być szczipiona adhezyjnie z płytami. Obciążeniem jest poruszający się układ sił skupionych. Uwzględnić należy też parcie powietrza, które jest szczególnie ważne przy próbie odspajania uszczelnionych płyt od siebie i od podłoża. Nie będziemy wdawać się w szczegóły studium problemu. Zamieścimy jedynie zakres przyjętych danych. Zadanie opisano jako parę płyt średniej grubości, połączonych lepko-sprężystymi tłumikami, spoczywającą na podłożu sprężystym typu Winklera. Badano drgania płyt o wymiarach 8×8 m, przy czym rozpatrywano symetryczną połówkę zadania. Obciążeniem był oscylator obciążony siłą 1 MN, poruszający się z prędkością 180–360 km/h (rys. 9.30). Płyta górna miała grubość 40 cm, a dolna 130 cm. Podłoże sprężyste miało sztywność $k_z = 4 \cdot 10^7$ N/m², a mata dylatacyjna $E = (0.2—2.0) \cdot 10^{11}$ N/m². Przyjęto zastępczą grubość maty równą 8 cm, uwzględniając deformację bloku betonowego płyt w kierunku pionowym. Na rys. 9.31 przedstawiono sześć faz przemieszczeń układu. Widoczne jest odspajanie się górnej płyty. O obrazie przemieszczeń decydują dwa elementy: charakterystyka wytrzymałościowa warstwy dylatacyjnej i wartość naprężeń, przy których zerwane zostają więzy między obydwoema płytami, oraz sposób przedstawienia kontaktu w strefie przyłożenia siły i koncentracji



Rysunek 9.29: Linia ugięcia w płyty odkształconej gradientem temperatur w zależności od długości L i stosunku długości do grubości L/h .



Rysunek 9.30: Schemat płyty lotniskowej.



Rysunek 9.31: Kolejne fazy przejazdu obciążenia.

naprężeń. Te czynniki, odgrywające rolę w ograniczonej do bardzo małej powierzchni strefie obciążonej, decydują praktycznie o wynikach. Z uwagi na to nie można analizować zadania ograniczając uwagę do pary płyt. Właściwy dobór parametrów opisujących wymienione decydujące dwa czynniki winien być poprzedzony analizą statyczną zadania trójwymiarowego stanu odkształcenia.

Rozdział 10

Uwagi końcowe

Ostatni rozdział książki zmusza do refleksji. Metoda elementów czasoprzestrzennych jest uogólnieniem metody elementów skończonych na obszar czasu. Wyprowadzenie odpowiednich macierzy występujących w sformułowaniach oraz procedurach obliczeniowych wymaga nieco więcej wyobraźni niż w przypadkach o ustalonym czasie. Z jednej strony w prostych zadaniach wywołuje to pewne zbędne komplikacje, z drugiej – pozwala na poprawny opis złożonych problemów.

Metody klasyczne oparte na idei rozseparowania zmiennych przestrzennych i czasu mają swoje zalety. Możemy z dużą swobodą zastępować jedną metodę analizy w przestrzeni zastąpić inną. Zamiast metody elementów skończonych możemy wykorzystać np. metody półanalityczne, metodę różnic skończonych czy elementów brzegowych. Każda z tych metod pokazuje swoje zalety w innych zadaniach i z uwagi na osobliwości problemów są dobrane do obliczeń. Z kolei całkowanie równania różniczkowego w czasie również pozwala na wykorzystanie jednej z popularnych metod, bez oglądania się na etap analizy przestrzennej. Większość zadań rozwiązuje się z powodzeniem tą drogą. Zatraca się wprawdzie łatwość interpretacji pewnych wielkości fizycznych i element dydaktyczny, lecz nie jest to konieczne. Jak wskazano na schemacie na rys. 1.3, metoda odniesiona do czasu klasyfikowana jest w grupie sformułowań silnych. Tu pojawia się brak zalet związanych z formami słabymi i wariacyjnymi.

Metoda elementów czasoprzestrzennych z kolei może być postrzegana w wieloraki sposób. Najprościej spoglądamy na nią jak na klasyczny sposób rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, z nieco bardziej tylko rozwiniętą interpretacją fizyczną. W wielu przypadkach można wykazać iden-

tyczność obu metod, klasycznej i czasoprzestrzennej. W bardziej ogólnym opisie, zwykle wykorzystywanym w zadaniach o zmiennych współczynnikach, nie znajdujemy drogi przejścia między dwoma typami metod obliczeniowych. Można powiedzieć, że przy braku w równaniu różniczkowym ruchu członów przy pierwszej pochodnej i przy stacjonarnej dyskretyzacji możemy w każdym przypadku wykazać identyczność metody czasoprzestrzennej i metod grupy Newmarka.

Metoda czasoprzestrzenna klasyfikowana jest w grupie metod opartych na sformułowaniach słabych. Stąd też jej zalety: łatwość wskazania podstawowych zasad zachowawczych w mechanice i możliwość oszacowania błędu. Właśnie zasady zachowawcze pozwalają w niektórych przypadkach poprawnie sformułować problem przejść do fazy rozwiązania. Przykładem może być zagadnienie poruszającej się po elemencie sprężystym masy skupionej (rozdz. 7). Macierze elementu skończonego przenoszącego masę są trudne do poprawnego wyznaczenia. Proponowane w literaturze opisy rozwiązywania zadań z jadącą masą opierają się na zastąpieniu pochodnej określającą przyspieszenie poprzeczne odpowiednią pochodną zupełną w ruchomym układzie odniesienia. W efekcie oprócz przyspieszenia masy pojawiają się człony określające przyspieszenie Coriolisa i przyspieszenie odśrodkowe. Człony te niezupełnie odpowiadają takiej interpretacji, gdyż występują również w ruchu podłużnym pręta obciążonego efektem poruszającej się masy. Trudno w ruchu podłużnym mówić np. o sile odśrodkowej. Matematycznie taki tok postępowania jest poprawny, lecz chwile warstwy czasowej, w których określone są odpowiednie siły, dobiera się błędnie. W efekcie nie sposób wprowadzić poprawnie tych wielkości do metody Newmarka. Metoda czasoprzestrzenna pozwala uporać się z tym zadaniem. Przytoczone wyniki dowodzą skuteczności rozwiązania przy dowolnych prędkościach przejazdu, również nadkrytycznych.

Niezaprzeczalnie ważną cechą metody elementów czasoprzestrzennych jest możliwość formowania macierzy współczynników globalnych układów równań algebraicznych w formie trójkątnej. Elementy czasoprzestrzenne o kształcie sympleksów prowadzą do układów równań częściowo rozseparowanych (rozdz. 5.1. Niewiadome przemieszczenia lub prędkości jednego lub kilku węzłów można wyznaczyć w pierwszej kolejności rozwiązując pojedyncze równania algebraiczne lub równania macierzowe o liczbie niewiadomych równej liczbie stopni swobody w węźle. W drugiej kolejności oblicza się niewiadome zależne jedynie od wcześniej wyznaczonych niewiadomych. Kolejno posuwamy się dobierając kolejność rozpatrywanych węzłów według kolejności uzupełniania niewiadomych, od których są one zależne. Postępujemy w sposób identyczny jak przy rozwiązywaniu układów równań o macierzach

trójkątnych, choć w kolejności zależnej od topologii połączeń węzłów w siatce czasoprzestrzennej. Taka cecha pozwala radykalnie obniżyć koszt obliczeń i sprowadzić procedurę realizowaną na kroku czasowym do procesury „węzeł po węzeł”. Zaletę tę można wykorzystać do rozseparowania podobszarów dużych zadań. Wystarczy w kilku miejscach wprowadzić strefę elementów o kształcie sympleksów, a układ równań algebraicznych będzie można rozwiązywać wyodrębniając z niego niezależne podukłady. W zadaniach jednowymiarowych wystarczą pojedyncze elementy separujące podukłady, w zadaniach dwuwymiarowych musi to być warstwa elementów ulokowana w siatce przestrzennej wzdłuż linii separującej. Zadania trójwymiarowe w tym przypadku podzielimy powierzchnią złożoną z elementów czworościennych.

Elementy sympleksowe wykorzystywane są również do zagęszczenia podziału w czasie w wybranych podobszarach. Czynimy to zwykle z uwagi na charakter badanego zjawiska: bardziej sztywna konstrukcja, wykonująca drgania o wyższej częstotliwości czy zadania kontaktowe z tarciem, w których istotne efekty zachodzą w niewielkim obszarze. W takich przypadkach, z uwagi na nieliniowy charakter problemu, zachodzi konieczność iteracyjnego poprawiania rozwiązania i modyfikacji członów nieliniowych zależnych od rozwiązania. Możemy ograniczyć obszar iteracji do wskazanego podobszaru, odseparowanego od reszty elementami sympleksowymi. Wykorzystując pokazaną na rys. 5.4 cechę jednokierunkowego przepływu informacji między węzłami siatki przestrzennej możemy potraktować podobszar wymagający iteracji jako podobszar zależny od pozostałej części. Wówczas w kroku czasowym rozpoczynamy od jednokrotnego obliczenia niewiadomych obszaru niezależnego, po czym iteracyjnie powtarzamy już fazę rozwiązania części zależnej. W przypadku dużych konstrukcji, w których nieliczne węzły znajdujące się np. w strefie kontaktu możemy potraktować jako fragment zależny, obniżenie kosztu obliczeniowego może sięgać kilku rzędów wartości.

Te dodatkowe cechy wynikające z czasoprzestrzennej aproksymacji nie są obecnie w pełni wykorzystywane. Przeszkodą jest brak uniwersalnego oprogramowania, które użytkownik mógłby adaptować do własnych programów obliczeniowych. To samo dotyczy komercyjnych pakietów do symulacji numerycznych. Tam raz włożony wysiłek mógłby procentować wielokrotnie. Niestety, nie dość chyba rozpropagowane możliwości metod opartych na całkowitych drogach formułowania zadań nie stymulują prac rozwojowych w pakietach komercyjnych.

Są też i poważne braki, wymagające dalszych intensywnych prac matematycznych. Dotyczy to przede wszystkim niestacjonarnego podziału przestrzennego konstrukcji. O ile w zadaniach typu parabolicznego zmiana położenia węzłów w kolejnych krokach nie stanowi istotnych problemów zwią-

zanych ze stabilnością i zbieżnością rozwiązania, to w przypadku zadań typu hiperbolicznego ograniczeniem jest prędkość propagacji fali w ośrodku. Niestety, brak jest dotąd zamkniętych kryteriów matematycznych, nadających się do stosowania w przypadku ogólnym.

Można z całym spokojem stwierdzić na zakończenie, że przedstawiona metoda jest atrakcyjnym narzędziem w wybranych problemach naukowych i inżynierskich. Nie jest z pewnością metodą uniwersalną i nie zastąpi klasycznych narzędzi obliczeniowych. Może jednak być postrzegana jako dobre uzupełnienie w grupie metod obliczeniowych dynamiki konstrukcji.

Macierze w elemencie belki

W dodatku prezentujemy macierze **M**, **C**, **K** oraz **E**, występujące w opisie elementu czasoprzestrzennego belki Bernoulliego-Eulera niosącego masę. Przyjęto oznaczenia: $\kappa = (x_0 + vh)/b$, $\xi = vh/b$.

Tablica A.1: Matrix M (lewa połówka)

$-4\kappa^6 + 12\kappa^5 -$ $\kappa^4(5\xi^2 + 9) +$ $2\kappa^3(5\xi^2 - 2) -$ $3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 8)/4 +$ $\kappa\xi^2(3\xi^2 - 4)/4 -$ $(5\xi^6 + 63\xi^4 - 280\xi^2 + 560)/560$	$-2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi -$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) +$ $h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) -$ $h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) +$ $h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) -$ $h\nu\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360$	$4\kappa^6 - 12\kappa^5 +$ $\kappa^4(5\xi^2 + 9) +$ $2\kappa^3(1 - 5\xi^2) +$ $3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 +$ $\kappa\xi^2(2 - 3\xi^2)/4 +$ $\xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560$	$-2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi -$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) +$ $h\nu\kappa^3(25\xi^2 - 6)/(6\xi) -$ $h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) +$ $h\nu\kappa\xi(5\xi^2 - 4)/16 -$ $h\nu\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360$
$-2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi -$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) +$ $h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) -$ $h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) +$ $h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) -$ $h\nu\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360$	$-h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 4h^2v^2\kappa^5/\xi^2 -$ $h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 24)/(4\xi^2) +$ $2h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 6)/(3\xi^2) -$ $h^2v^2\kappa^2(3\xi^4 + 48\xi^2 + 16)/(16\xi^2) +$ $h^2v^2\kappa(\xi^2 + 4)/4 -$ $h^2v^2(15\xi^4 + 504\xi^2 + 560)/6720$	$2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi +$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) -$ $h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) +$ $h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 -$ $h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 +$ $h\nu\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120$	$-h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 -$ $h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) +$ $h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) -$ $3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 +$ $h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 -$ $h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240$
$4\kappa^6 - 12\kappa^5 +$ $\kappa^4(5\xi^2 + 9) +$ $2\kappa^3(1 - 5\xi^2) +$ $3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 +$ $\kappa\xi^2(2 - 3\xi^2)/4 +$ $\xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560$	$2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi +$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) -$ $h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) +$ $h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 -$ $h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 +$ $h\nu\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120$	$-4\kappa^6 + 12\kappa^5 -$ $\kappa^4(5\xi^2 + 9) +$ $10\kappa^3\xi^2 -$ $3\kappa^2\xi^2(\xi^2 + 6)/4 +$ $3\kappa\xi^4/4 -$ $\xi^4(5\xi^2 + 63)/560$	$2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi +$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) -$ $25h\nu\kappa^3\xi/6 +$ $3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 -$ $5h\nu\kappa\xi^3/16 +$ $h\nu\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120$
$-2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi -$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) +$ $h\nu\kappa^3(25\xi^2 - 6)/(6\xi) -$ $h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) +$ $h\nu\kappa\xi(5\xi^2 - 4)/16 -$ $h\nu\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360$	$-h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 -$ $h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) +$ $h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) -$ $3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 +$ $h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 -$ $h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240$	$2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi +$ $h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) -$ $25h\nu\kappa^3\xi/6 +$ $3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 -$ $5h\nu\kappa\xi^3/16 +$ $h\nu\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120$	$-h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 2h^2v^2\kappa^5/\xi^2 -$ $h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 4)/(4\xi^2) +$ $5h^2v^2\kappa^3/3 -$ $h^2v^2\kappa^2(3\xi^2 + 8)/16 +$ $h^2v^2\kappa\xi^2/8 -$ $h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 28)/2240$

Tablica A.2: Macierz M (prawa połówka)

$4\kappa^6 - 12\kappa^5 + \kappa^4(5\xi^2 + 9) + 2\kappa^3(2 - 5\xi^2) + 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 8)/4 + \kappa\xi^2(4 - 3\xi^2)/4 + (5\xi^6 + 63\xi^4 - 280\xi^2 + 560)/560$	$2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) - h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) - h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) + h\nu\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360$	$-4\kappa^6 + 12\kappa^5 - \kappa^4(5\xi^2 + 9) + 2\kappa^3(5\xi^2 - 1) - 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 + \kappa\xi^2(3\xi^2 - 2)/4 - \xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560$	$2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(6 - 25\xi^2)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) + h\nu\kappa\xi(4 - 5\xi^2)/16 + h\nu\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360$
$2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) - h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) - h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) + h\nu\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360$	$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 4h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 24)/(4\xi^2) - 2h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 6)/(3\xi^2) + h^2v^2\kappa^2(3\xi^4 + 48\xi^2 + 16)/(16\xi^2) - h^2v^2\kappa(\xi^2 + 4)/4 + h^2v^2(15\xi^4 + 504\xi^2 + 560)/6720$	$-2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) - h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 + h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 - h\nu\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120$	$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) - h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) + 3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 - h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 + h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240$
$-4\kappa^6 + 12\kappa^5 - \kappa^4(5\xi^2 + 9) + 2\kappa^3(5\xi^2 - 1) - 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 + \kappa\xi^2(3\xi^2 - 2)/4 - \xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560$	$-2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) - h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 + h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 - h\nu\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120$	$4\kappa^6 - 12\kappa^5 + \kappa^4(5\xi^2 + 9) - 10\kappa^3\xi^2 + 3\kappa^2\xi^2(\xi^2 + 6)/4 - 3\kappa\xi^4/4 + \xi^4(5\xi^2 + 63)/560$	$-2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + 25h\nu\kappa^3\xi/6 - 3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 + 5h\nu\kappa\xi^3/16 - h\nu\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120$
$2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(6 - 25\xi^2)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) + h\nu\kappa\xi(4 - 5\xi^2)/16 + h\nu\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360$	$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) - h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) + 3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 - h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 + h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240$	$-2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + 25h\nu\kappa^3\xi/6 - 3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 + 5h\nu\kappa\xi^3/16 - h\nu\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120$	$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 2h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 4)/(4\xi^2) - 5h^2v^2\kappa^3/3 + h^2v^2\kappa^2(3\xi^2 + 8)/16 - h^2v^2\kappa\xi^2/8 + h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 28)/2240$

Tablica A.3: Macierz C (lewa połówka)

$12\xi\kappa^5 - 10\xi\kappa^4(\xi + 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) - 3\xi\kappa^2(\xi^3 + 5\xi^2 + 3\xi - 2) + \xi\kappa(3\xi^4 + 12\xi^3 + 18\xi^2 - 8\xi - 24)/4 - \xi^2(15\xi^4 + 105\xi^3 + 126\xi^2 - 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 17) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 34\xi + 42)/3 - h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 + 17\xi + 14)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 + 68\xi^3 + 140\xi^2 - 160)/40 - h\nu(45\xi^5 + 357\xi^4 + 588\xi^3 - 1120\xi - 1680)/1680$	$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi + 3) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) + 3\xi\kappa^2(\xi^3 + 5\xi^2 + 3\xi - 2) - \xi\kappa(3\xi^4 + 12\xi^3 + 18\xi^2 - 8\xi - 24)/4 + \xi^2(15\xi^4 + 105\xi^3 + 126\xi^2 - 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 13) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 26\xi + 18)/3 - h\nu\kappa^2(3\xi^3 + 13\xi^2 + 6\xi - 6)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 + 52\xi^3 + 60\xi^2 - 40\xi - 80)/40 - h\xi\nu(45\xi^4 + 273\xi^3 + 252\xi^2 - 420\xi - 560)/1680$
$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 18) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 12\xi + 18) - 3h\nu\kappa^2(\xi^3 + 6\xi^2 + 6\xi + 4)/2 + h\xi\nu\kappa(15\xi^3 + 72\xi^2 + 180\xi + 80)/40 - h\xi^2\nu(15\xi^3 + 126\xi^2 + 252\xi + 280)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi - 5h^2v^2\kappa^4(\xi + 4)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 + 40\xi + 72)/(6\xi) - h^2v^2\kappa^2(3\xi^3 + 20\xi^2 + 24\xi + 24)/(4\xi) + h^2v^2\kappa(3\xi^4 + 16\xi^3 + 48\xi^2 + 32\xi + 16)/(16\xi) - h^2v^2(45\xi^4 + 420\xi^3 + 1008\xi^2 + 1680\xi + 560)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 18) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 12\xi + 18) + 3h\nu\kappa^2(\xi^3 + 6\xi^2 + 6\xi + 4)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 + 72\xi^2 + 180\xi + 80)/40 + h\xi^2\nu(15\xi^3 + 126\xi^2 + 252\xi + 280)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi - h^2v^2\kappa^4(5\xi + 16)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 + 32\xi + 42)/(6\xi) - h^2v^2\kappa^2(3\xi^3 + 16\xi^2 + 14\xi + 8)/(4\xi) + h^2v^2\kappa(45\xi^3 + 192\xi^2 + 420\xi + 160)/240 - h^2\xi v^2(45\xi^3 + 336\xi^2 + 588\xi + 560)/3360$
$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi + 3) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) + 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 + 5\xi + 3) - 3\xi^3\kappa(\xi^2 + 4\xi + 6)/4 + 3\xi^4(5\xi^2 + 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 17) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 34\xi + 42)/3 + h\nu\kappa^2(3\xi^3 + 17\xi^2 + 14\xi + 6)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 + 68\xi^2 + 140\xi + 40)/40 + h\xi^2\nu(15\xi^3 + 119\xi^2 + 196\xi + 140)/560$	$12\xi\kappa^5 - 10\xi\kappa^4(\xi + 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) - 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 + 5\xi + 3) + 3\xi^3\kappa(\xi^2 + 4\xi + 6)/4 - 3\xi^4(5\xi^2 + 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 13) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 26\xi + 18)/3 + h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 + 13\xi + 6)/2 - h\xi^2\nu\kappa(15\xi^2 + 52\xi + 60)/40 + h\xi^3\nu(15\xi^2 + 91\xi + 84)/560$
$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 12) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 8\xi + 6) - 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 + 4\xi + 2)/2 + 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 + 16\xi + 20)/40 - 3h\xi^3\nu(5\xi^2 + 28\xi + 28)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi - h^2v^2\kappa^4(5\xi + 14)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 + 28\xi + 30)/(6\xi) - h^2v^2\kappa^2(3\xi^3 + 14\xi^2 + 10\xi + 4)/(4\xi) + h^2v^2\kappa(45\xi^3 + 168\xi^2 + 300\xi + 80)/240 - h^2\xi v^2(45\xi^3 + 294\xi^2 + 420\xi + 280)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 12) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 8\xi + 6) + 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 + 4\xi + 2)/2 - 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 + 16\xi + 20)/40 + 3h\xi^3\nu(5\xi^2 + 28\xi + 28)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi - 5h^2v^2\kappa^4(\xi + 2)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 + 20\xi + 12)/(6\xi) - h^2v^2\kappa^2(3\xi^2 + 10\xi + 4)/4 + h^2\xi v^2\kappa(3\xi^2 + 8\xi + 8)/16 - h^2\xi^2v^2(15\xi^2 + 70\xi + 56)/1120$

Tablica A.4: Macierz C (prawa połówka)

$12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi - 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) + 3\xi\kappa^2(\xi^3 - 5\xi^2 + 3\xi + 2) + \xi\kappa(3\xi^4 - 12\xi^3 + 18\xi^2 + 8\xi - 24)/4 + \xi^2(15\xi^4 - 105\xi^3 + 126\xi^2 + 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 17) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 34\xi + 42)/3 + h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 - 17\xi + 14)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 - 68\xi^3 + 140\xi^2 - 160)/40 + h\nu(45\xi^5 - 357\xi^4 + 588\xi^3 - 1120\xi + 1680)/1680$	$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(3 - \xi) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) - 3\xi\kappa^2(\xi^3 - 5\xi^2 + 3\xi + 2) - \xi\kappa(3\xi^4 - 12\xi^3 + 18\xi^2 + 8\xi - 24)/4 - \xi^2(15\xi^4 - 105\xi^3 + 126\xi^2 + 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 13) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 26\xi + 18)/3 + h\nu\kappa^2(3\xi^3 - 13\xi^2 + 6\xi + 6)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 - 52\xi^3 + 60\xi^2 + 40\xi - 80)/40 + h\xi\nu(45\xi^4 - 273\xi^3 + 252\xi^2 + 420\xi - 560)/1680$
$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 18) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 12\xi + 18) + 3h\nu\kappa^2(\xi^3 - 6\xi^2 + 6\xi - 4)/2 + h\xi\nu\kappa(15\xi^3 - 72\xi^2 + 180\xi - 80)/40 + h\xi^2\nu(15\xi^3 - 126\xi^2 + 252\xi - 280)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi + 5h^2\nu^2\kappa^4(\xi - 4)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 - 40\xi + 72)/(6\xi) + h^2\nu^2\kappa^2(3\xi^3 - 20\xi^2 + 24\xi - 24)/(4\xi) + h^2\nu^2\kappa(3\xi^4 - 16\xi^3 + 48\xi^2 - 32\xi + 16)/(16\xi) + h^2\nu^2(45\xi^4 - 420\xi^3 + 1008\xi^2 - 1680\xi + 560)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(18 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 12\xi + 18) - 3h\nu\kappa^2(\xi^3 - 6\xi^2 + 6\xi - 4)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 - 72\xi^2 + 180\xi - 80)/40 - h\xi^2\nu(15\xi^3 - 126\xi^2 + 252\xi - 280)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi + h^2\nu^2\kappa^4(5\xi - 16)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 - 32\xi + 42)/(6\xi) + h^2\nu^2\kappa^2 \cdot (3\xi^3 - 16\xi^2 + 14\xi - 8)/(4\xi) + h^2\nu^2\kappa(45\xi^3 - 192\xi^2 + 420\xi - 160)/240 + h^2\xi\nu^2(45\xi^3 - 336\xi^2 + 588\xi - 560)/3360$
$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(3 - \xi) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) - 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 - 5\xi + 3) - 3\xi^3\kappa(\xi^2 - 4\xi + 6)/4 - 3\xi^4(5\xi^2 - 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(17 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 34\xi + 42)/3 - h\nu\kappa^2(3\xi^3 - 17\xi^2 + 14\xi - 6)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 - 68\xi^2 + 140\xi - 40)/40 - h\xi^2\nu(15\xi^3 - 119\xi^2 + 196\xi - 140)/560$	$12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi - 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) + 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 - 5\xi + 3) + 3\xi^3\kappa(\xi^2 - 4\xi + 6)/4 + 3\xi^4(5\xi^2 - 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(13 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 26\xi + 18)/3 - h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 - 13\xi + 6)/2 - h\xi^2\nu\kappa(15\xi^2 - 52\xi + 60)/40 - h\xi^3\nu(15\xi^2 - 91\xi + 84)/560$
$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 12) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 8\xi + 6) + 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 - 4\xi + 2)/2 + 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 - 16\xi + 20)/40 + 3h\xi^3\nu(5\xi^2 - 28\xi + 28)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi + h^2\nu^2\kappa^4(5\xi - 14)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 - 28\xi + 30)/(6\xi) + h^2\nu^2\kappa^2(3\xi^3 - 14\xi^2 + 10\xi - 4)/(4\xi) + h^2\nu^2\kappa(45\xi^3 - 168\xi^2 + 300\xi - 80)/240 + h^2\xi\nu^2(45\xi^3 - 294\xi^2 + 420\xi - 280)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(12 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 8\xi + 6) - 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 - 4\xi + 2)/2 - 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 - 16\xi + 20)/40 - 3h\xi^3\nu(5\xi^2 - 28\xi + 28)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi + 5h^2\nu^2\kappa^4(\xi - 2)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 - 20\xi + 12)/(6\xi) + h^2\nu^2\kappa^2(3\xi^2 - 10\xi + 4)/4 + h^2\xi\nu^2\kappa(3\xi^2 - 8\xi + 8)/16 + h^2\xi^2\nu^2(15\xi^2 - 70\xi + 56)/1120$

Tablica A.5: Macierz **K** (lewa połówka)

$8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 4) + 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 + \xi^2\kappa(6\xi^3 - 36\xi^2 + 15\xi + 40)/10 + \xi^2(12\xi^4 - 42\xi^3 + 63\xi^2 + 70\xi - 280)/140$	$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(3\xi - 13)/3 + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 65\xi + 80)/20 + h\xi v\kappa(6\xi^3 - 39\xi^2 + 20\xi + 40)/20 + h\xi v(72\xi^4 - 273\xi^3 + 504\xi^2 + 420\xi - 2240)/1680$	$-8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(4 - \xi) - 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 - \xi^2\kappa(6\xi^3 - 36\xi^2 + 15\xi + 40)/10 - \xi^2(12\xi^4 - 42\xi^3 + 63\xi^2 + 70\xi - 280)/140$	$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(3\xi - 11)/3 + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 55\xi + 40)/20 + h\xi v\kappa(6\xi^3 - 33\xi^2 + 10\xi + 40)/20 + h\xi v(72\xi^4 - 231\xi^3 + 252\xi^2 + 420\xi - 1120)/1680$
$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(\xi - 5) + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 75\xi + 160)/20 + h\xi v\kappa(6\xi^3 - 45\xi^2 + 40\xi - 40)/20 + h\xi^2 v(24\xi^3 - 105\xi^2 + 336\xi - 140)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 16)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(27\xi^2 - 60\xi + 140)/30 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 72\xi^2 + 70\xi - 80)/60 + h^2 \xi v^2(9\xi^3 - 42\xi^2 + 147\xi - 70)/420$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(5 - \xi) - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 75\xi + 160)/20 - h\xi v\kappa(6\xi^3 - 45\xi^2 + 40\xi - 40)/20 - h\xi^2 v(24\xi^3 - 105\xi^2 + 336\xi - 140)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 14)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(54\xi^2 - 105\xi + 200)/60 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 63\xi^2 + 50\xi - 40)/60 + h^2 \xi v^2(36\xi^3 - 147\xi^2 + 420\xi - 140)/1680$
$-8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(4 - \xi) - 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 - 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 12\xi + 5)/10 - 3\xi^4(4\xi^2 - 14\xi + 21)/140$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(13 - 3\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 65\xi + 80)/20 - h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 39\xi + 20)/20 - h\xi^3 v(24\xi^2 - 91\xi + 168)/560$	$8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 4) + 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 + 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 12\xi + 5)/10 + 3\xi^4(4\xi^2 - 14\xi + 21)/140$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(11 - 3\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 55\xi + 40)/20 - h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 33\xi + 10)/20 - h\xi^3 v(24\xi^2 - 77\xi + 84)/560$
$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(\xi - 3) + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 45\xi + 40)/20 + h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 27\xi + 10)/20 + 3h\xi^3 v(8\xi^2 - 21\xi + 28)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 10)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(54\xi^2 - 75\xi + 80)/60 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 45\xi + 20)/60 + h^2 \xi^2 v^2(12\xi^2 - 35\xi + 56)/560$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(3 - \xi) - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 45\xi + 40)/20 - h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 27\xi + 10)/20 - 3h\xi^3 v(8\xi^2 - 21\xi + 28)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 8)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(27\xi^2 - 30\xi + 20)/30 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 36\xi + 10)/60 + h^2 \xi^2 v^2(3\xi^2 - 7\xi + 7)/140$

Tablica A.6: Macierz **K** (prawa połówka)

$4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 2) + 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 + \xi^2\kappa(6\xi^3 - 24\xi^2 + 15\xi + 20)/10 + \xi^2(9\xi^4 - 42\xi^3 + 42\xi^2 + 70\xi - 140)/140$	$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(6\xi - 13)/3 + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 65\xi + 40)/20 + h\xi v\kappa(3\xi^3 - 13\xi^2 + 10\xi + 10)/10 + h\xi v(54\xi^4 - 273\xi^3 + 336\xi^2 + 420\xi - 1120)/1680$	$-4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(2 - \xi) - 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 - \xi^2\kappa(6\xi^3 - 24\xi^2 + 15\xi + 20)/10 - \xi^2(9\xi^4 - 42\xi^3 + 42\xi^2 + 70\xi - 140)/140$	$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(6\xi - 11)/3 + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 55\xi + 20)/20 + h\xi v\kappa(3\xi^3 - 11\xi^2 + 5\xi + 10)/10 + h\xi v(54\xi^4 - 231\xi^3 + 168\xi^2 + 420\xi - 560)/1680$
$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(2\xi - 5) + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 75\xi + 80)/20 + h\xi v\kappa(3\xi^3 - 15\xi^2 + 20\xi - 10)/10 + h\xi^2 v(18\xi^3 - 105\xi^2 + 224\xi - 140)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 8)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(9\xi^2 - 30\xi + 35)/15 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 48\xi^2 + 70\xi - 40)/60 + h^2 \xi v^2(27\xi^3 - 168\xi^2 + 392\xi - 280)/1680$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(5 - 2\xi) - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 75\xi + 80)/20 - h\xi v\kappa(3\xi^3 - 15\xi^2 + 20\xi - 10)/10 - h\xi^2 v(18\xi^3 - 105\xi^2 + 224\xi - 140)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 7)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(36\xi^2 - 105\xi + 100)/60 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 42\xi^2 + 50\xi - 20)/60 + h^2 \xi v^2(27\xi^3 - 147\xi^2 + 280\xi - 140)/1680$
$-4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(2 - \xi) - 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 - 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 8\xi + 5)/10 - 3\xi^4(3\xi^2 - 14\xi + 14)/140$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(13 - 6\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 65\xi + 40)/20 - h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 13\xi + 10)/10 - h\xi^3 v(18\xi^2 - 91\xi + 112)/560$	$4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 2) + 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 + 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 8\xi + 5)/10 + 3\xi^4(3\xi^2 - 14\xi + 14)/140$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(11 - 6\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 55\xi + 20)/20 - h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 11\xi + 5)/10 - h\xi^3 v(18\xi^2 - 77\xi + 56)/560$
$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(2\xi - 3) + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 45\xi + 20)/20 + h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 9\xi + 5)/10 + h\xi^3 v(18\xi^2 - 63\xi + 56)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 5)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(36\xi^2 - 75\xi + 40)/60 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 30\xi + 20)/60 + h^2 \xi^2 v^2(27\xi^2 - 105\xi + 112)/1680$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(3 - 2\xi) - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 45\xi + 20)/20 - h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 9\xi + 5)/10 - h\xi^3 v(18\xi^2 - 63\xi + 56)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 4)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(9\xi^2 - 15\xi + 5)/15 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 24\xi + 10)/60 + h^2 \xi^2 v^2(27\xi^2 - 84\xi + 56)/1680$

Tablica A.7: Macierz E

$24\xi^2\kappa^4/h-$ $48\xi^2\kappa^3/h+$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h+$ $12\xi^2\kappa(1-\xi^2)/h+$ $3\xi^2(\xi^4+5\xi^2-20)/(10h)$	$12\xi v\kappa^4-$ $26\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+2)+$ $\xi v\kappa(12-13\xi^2)/2+$ $\xi v(3\xi^4+20\xi^2-80)/20$	$-24\xi^2\kappa^4/h+$ $48\xi^2\kappa^3/h-$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h+$ $12\xi^2\kappa(\xi^2-1)/h-$ $3\xi^2(\xi^4+5\xi^2-20)/(10h)$	$12\xi v\kappa^4-$ $22\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)+$ $\xi v\kappa(12-11\xi^2)/2+$ $\xi v(3\xi^4+10\xi^2-40)/20$
$12\xi v\kappa^4-$ $30\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+4)-$ $3\xi v\kappa(5\xi^2+4)/2+$ $\xi^3 v(3\xi^2+40)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $16hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+14)-$ $4hv^2\kappa(\xi^2+1)+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+140)/120$	$-12\xi v\kappa^4+$ $30\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+4)+$ $3\xi v\kappa(5\xi^2+4)/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+40)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $14hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+10)-$ $hv^2\kappa(7\xi^2+4)/2+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+100)/120$
$-24\xi^2\kappa^4/h+$ $48\xi^2\kappa^3/h-$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h+$ $12\xi^4\kappa/h-$ $3\xi^4(\xi^2+5)/(10h)$	$-12\xi v\kappa^4+$ $26\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+2)+$ $13\xi^3 v\kappa/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+20)/20$	$24\xi^2\kappa^4/h-$ $48\xi^2\kappa^3/h+$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h-$ $12\xi^4\kappa/h+$ $3\xi^4(\xi^2+5)/(10h)$	$-12\xi v\kappa^4+$ $22\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)+$ $11\xi^3 v\kappa/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+10)/20$
$12\xi v\kappa^4-$ $18\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)-$ $9\xi^3 v\kappa/2+$ $\xi^3 v(3\xi^2+10)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $10hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+4)-$ $5h\xi^2 v^2\kappa/2+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+40)/120$	$-12\xi v\kappa^4+$ $18\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)+$ $9\xi^3 v\kappa/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+10)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $8hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+2)-$ $2h\xi^2 v^2\kappa+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+20)/120$

Indeks

- Adamsa
 - metoda otwarta, 35
 - metoda zamknięta, 38
- Adamsa metoda, 34
- adaptacja siatki, 157
- belka, 132
 - Eulera, 209
 - Timoshenki, 213
- belka Timoshenki, 216
- bezsiatkowe metody, 171
- Bossaka metoda, 42
- bryła, 140
- Coulomba tarcie, 224
- dokładność, 51
- dokładność metody, 103
- duże przemieszczenia, 240
- element
 - belki, 132
 - belki Bernoulliego-Eulera niosący masę, 214
 - belki niosący masę, 213
 - bryły, 140
 - czworościenny tarczy, 134
 - niosący masę, 203
 - płyty, 137
 - pręta, 131
 - ramownicy płaskiej, 241
 - tarczy, 134
 - elementy sympleksowe, 121
 - elementy ukośne, 85
 - elementy wyższego rzędu, 73
- kontakt jednostronny, 231
- kontaktowe zadania, 217
- makroelementy, 87
- metoda
 - średniego przyspieszenia, 26
 - Adamsa, 34
 - bezsiatkowa, 171
 - Bossaka, 42
 - Crancka-Nicolsona, 26
 - elementów czasoprzestrzennych, 53
 - Eulera, 75
 - Houbolta, 28
 - Newmarka, 118
 - Parka, 29
 - Parka-Housnera, 44
 - predyktor-korektor, 25
 - Rungego-Kutty, 25
 - trapezów, 26
 - Trujillo, 48
 - Wilsona, 27
- Newmarka metoda, 40, 118
- Nortona-Hoffa prawo, 224
- płyta, 137
- Parka-Housnera metoda, 44
- pręt, 131

- przykład
 - deformacja lepkoplastyczna, 103
 - kucie, 106
 - zderzenie walca, 107
 - zgniatanie cylindra, 108
 - zgniatanie tarczy, 105
- przykład obliczeniowy, 103, 105–108
- przykłady
 - dynamika toru, 269, 277
- przykłady obliczeniowe, 103

- sformułowanie prędkościowe MECz, 89
- stabilność
 - elementów ukośnych, 85
 - metody Parka-Housnera, 45
 - w siatkach niestacjonarnych, 79
- struna, 91
- struna nieinercyjna, 184

- tarcie Coulomba, 224
- tarcza, 134
- Timoshenki belka, 213
- transformacja
 - Fouriera, 181

- uwarunkowanie macierzy, 15
 - skalowanie macierzy, 18

- wersja przemieszczeniowa MECz, 61
- wirtualna funkcja, 100
 - daszkowa, 102
 - Diraca, 102
 - kapeluszowa, 101
 - trójkątna, 101

Bibliografia

- [1] L. Adelaide. *Méthode des éléments finis espace-temps: adaptation du maillage en cours d'évolution avec contact*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2001.
- [2] S. Adjerid i J.E. Flaherty. A moving-mesh finite element method with local refinement for parabolic partial differential equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 55(1-2):3-26, 1986.
- [3] S. Adjerid i J.E. Flaherty. Second-order finite element approximation and a posteriori error estimation for two-dimensional parabolic systems. Technical Report 87-1, Rensselaer Polytechnic Institute, Department of Computer Science, Troy, New York 12180-3590, January 1987.
- [4] P. Alart i A. Cournier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92(3):353-375, 1991.
- [5] J.H. Argyris i A.S.L. Chan. Application of the finite elements in space and time. *Ing. Archiv*, 41:235-257, 1972.
- [6] J.H. Argyris i D.W. Scharpf. Finite elements in space and time. *Nucl. Engng Design*, 10:456-469, 1969.
- [7] J.H. Argyris i D.W. Scharpf. Finite elements in time and space. *Aeron. J. Roy. Aeron. Soc.*, 73:1041-1044, 1969.
- [8] P. Azerad. *Analyse des equations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport*. PhD thesis, Université de Neuchâtel, Suisse, 1996.
- [9] I. Babuska i W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:736-754, 1978.

-
- [10] C.D. Bailey. A new look at Hamilton's principle. *Foundations of Physics*, 5:433–451, 1975.
- [11] M.J. Baines i A.J. Wathen. Moving finite element methods for evolutionary problems. I. Theory. *J. Comput. Phys.*, 79(2):245–269, 1988.
- [12] C. Bajer. Modelowanie układów dynamicznych przy pomocy nieprostokątnych czasoprzestrzennych elementów skończonych. W *Zeszyty Naukowe Pol. Świętokrzyskiej*, t. Budownictwo 18, strony 5–10, Kielce, 1984.
- [13] C. Bajer. Movable grid approach by the space–time element method. W *11th IKM Conf.*, strony 5–8, Weimar, 1987.
- [14] C. Bajer. Mesh r–adaptation in structural dynamics. W *12th IKM Conf.*, volume 4, strony 5–8, Weimar, 1990.
- [15] C. Bajer i R. Bogacz. Dynamic contact problem by means of the space–time element method. W R. Gruber, J. Periaux, and R.P. Shaw, editors, *Proc. 5th Int. Symp. Numer. Meth. in Engng*, volume 1, strony 313–318, Lausanne, September 1989. Springer-Verlag.
- [16] C. Bajer i C. Bohatier. Solution of thermomechanical problems by the space–time finite elements. W J.-L. Chenot, R.D. Wood, and O.C. Zienkiewicz, editors, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, strony 215–219, Valbonne, 1992. A.A. Balkema.
- [17] C. Bajer i C. Bohatier. Modélisation des systèmes mécaniques sous sollicitations dynamiques et résolution numérique des problèmes non linéaires associés. W *Méth. Inform. de la Conception Industr., Méc. des Struc.*, strony 79–90, Marseille, 1993.
- [18] C. Bajer i C. Bohatier. Solution of thermomechanical problems by the space–time finite elements. W *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 215–219. Balkema, 1993.
- [19] C. Bajer i C. Bohatier. Velocity formulation for metal forming by the space–time finite element method. W *Int. Workshop on Mechanisms Des. and Anal., COMES'93*, pages 83–86, Clermont–Ferrand, 1993.
- [20] C. Bajer, G. Burkhardt i F. Taltello. Accuracy of the space–time finite element method. W *11th IKM Conf.*, strony 9–12, Weimar, 1987.

-
- [21] C. Bajer, G. Burkhardt i F. Taltello. Anwendung der Methode der Raum-Zeit Elemente bei der dynamischen Untersuchung von Stahlbetonbauteilen. *Bauplanung-Bautechnik*, 43(7):320–323, 1989.
- [22] C. Bajer i W. Kosiński. Numerical modelling of thermal waves via internal state variable approach. *Comp. Ass. Mech. Eng. Sci.*, 2:307–319, 1995.
- [23] C. Bajer i A. Podhorecki. Space-time element method in structural dynamics. *Arch. of Mech.*, 41:863–889, 1989.
- [24] C.I. Bajer. Triangular and tetrahedral space-time finite elements in vibration analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 23:2031–2048, 1986.
- [25] C.I. Bajer. Notes on the stability of non-rectangular space-time finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24:1721–1739, 1987.
- [26] C.I. Bajer. Adaptive mesh in dynamic problem by the space-time approach. *Comput. and Struct.*, 33(2):319–325, 1989.
- [27] C.I. Bajer, R. Bogacz i C. Bonthoux. Adaptive space-time elements in the dynamic elastic-viscoplastic problem. *Comput. and Struct.*, 39:415–423, 1991.
- [28] C.I. Bajer i C. Bohatier. The soft way method and the velocity formulation. *Comput. and Struct.*, 55(6):1015–1025, 1995.
- [29] C.I. Bajer i C.G. Bonthoux. State-of-the-art in true space-time finite element method. *Shock Vibr. Dig.*, 20:3–11, 1988.
- [30] C.I. Bajer i B. Dyniewicz. Space-time approach to numerical analysis of a string with a moving mass. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 76(10):1528–1543, 2008.
- [31] C.I. Bajer i B. Dyniewicz. Virtual functions of the space-time finite element method in moving mass problems. *Comput. and Struct.*, 87:444–455, 2009.
- [32] Cz. Bajer i R. Bogacz. O symulacji generowania nierówności w dynamicznym zagadnieniu kontaktu tocznego metodą elementów czasoprzestrzennych. W *IX Konf. Metody Komputerowe w Mechanice*, strony 23–30, Politechnika Krakowska, 1989.
- [33] R.E. Bank i R.F. Santos. Analysis of some moving space-time finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(1):1–18, 1993.

- [34] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming i P. Krysl. Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 139(1-4):3–47, 1996.
- [35] T. Belytschko, Y. Y. Lu i L. Gu. Element free Galerkin methods. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37:229–256, 1994.
- [36] R. Bogacz. Stability of several degree of freedom moving subsystem interacting with waves of continuous media. W G. Bianchi and W. Schiehlen, editors, *IUTAM/IFTOMM Symposium*, strony 17–29, Udine 1985, 1986. Springer, Berlin Heidelberg.
- [37] R. Bogacz, M. Brzozowski, O. Mahrenholtz i J. Rońda. Dynamic effects in a rolling contact problem. *ZAMM*, 67(4):T176–T179, 1987.
- [38] R. Bogacz, P. Meinke i S. Dzuła. Vehicle/track–dynamic interaction for high speed frequency range. W *3rd Polish–German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, strony 165–179, IPPT PAN, Warszawa, 1993.
- [39] R. Bogacz i K. Popp. Dynamics and stability of train–track systems. W H.F. Wolfe M. Petyt, editor, *Proc. Sec. Int. Conf. Recent Advances in Structural Dynamics*, strony 711–725, Southampton, 1984.
- [40] R. Bogacz, J. Rońda i M. Brzozowski. Corrugations in rolling contact problems. *ZAMM*, 67(11):567–568, 1987.
- [41] R. Bogacz i T. Szolc. On methods of solution for the discrete–continuous system under moving load. *Z. angew. Math. Mech.*, 72(4):T16–T19, 1992.
- [42] R. Bogacz i T. Szolc. Analysis of dynamic interaction between the continuous string and moving oscillator. *Eng. Trans.*, 41(3-4):361–380, 1993.
- [43] C. Bohatier. A large deformation formulation and solution with space–time finite elements. *Arch. Mech.*, 44:31–41, 1992.
- [44] C. Bohatier i J.-L. Chenot. Finite element formulation for non–steady–state large deformations with sliding or evolving contact boundary conditions. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 28:753–768, 1989.
- [45] R. Bonnerot i P. Jamet. A second order finite element method for the one–dimensional Stefan problem. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 8:811–820, 1974.

- [46] R. Bonnerot i P. Jamet. Numerical computation of the free boundary for the two-dimensional Stefan problem by space-time finite elements. *J. Comput. Phys.*, 25:163–181, 1977.
- [47] J. Brzeziński i M. Pietrzakowski. The investigation of nonstationary vibrations of simple hybrid system by the space-time finite element method (in Polish). *Archiwum Budowy Maszyn*, 26(4):511–526, 1979.
- [48] S.K. Chan i I.S. Tuba. A finite element method for contact problems of solid bodies: I. Theory and validation. *Int. J. Mech. Sci.*, 13:627–639, 1971.
- [49] R. Cook, D.S. Malkus i M.E. Plesha. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, third edition, 1989.
- [50] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 49:1–23, 1943.
- [51] A. Cournier i J.H. Heegaard. An augmented lagrangian method for large slip contact problem. W *Euromech 273, Unilateral contact and dry friction*, pages 69–72, La Grande Motte, France, 1990.
- [52] W. Cyganecki. Kryterium doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):389–397, 1979.
- [53] W. Cyganecki. O sposobach doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(4):717–726, 1980.
- [54] L. Demkowicz. *Adaptacyjne metody elementów skończonych*. Monografie. Politechnika Krakowska, Kraków, 1985.
- [55] R.E. Dick i W.H. Harris. Fully automatic rezoning of evolving geometry problems. W J.-L. Chenot, R.D. Wood, and O.C. Zienkiewicz, editors, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, strony 243–248, Valbonne, 1992. A.A. Balkema.
- [56] M.A. Dokainish i K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – I. Explicit methods. *Comput. and Struct.*, 32:1371–1386, 1989.
- [57] M.A. Dokainish i K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – II. Implicit methods. *Comput. and Struct.*, 32:1387–1401, 1989.

- [58] J. Dolbow i T. Belytschko. An introduction to programming the meshless element free Galerkin method. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 5(3):207–241, 1998.
- [59] E.A. Dorfi i L.O. Druhy. Simple adaptive grids for 1-D initial value problems. *J. Comp. Phys.*, 69:175–195, 1987.
- [60] B. Dyniewicz. *Dynamiczne właściwości układu hybrydowego poddanego ruchomym źródłom zaburzeń*. PhD thesis, IPPT PAN, Warszawa, 2008.
- [61] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Moving loads – analytical and numerical approaches. W W. Szcześniak, editor, *Theoretical Foundations in Civil Engineering*, strony 37–48. OWPW Warsaw, 2006.
- [62] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Discontinuous trajectory of the mass particle moving on a string or a beam. *Machine Dyn. Probl.*, 31(2):66–79, 2007.
- [63] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Inertial load moving on a string – discontinuous solution. W W. Szcześniak, editor, *Theoretical Foundations in Civil Engineering*, strony 141–150. OWPW Warsaw, 2007.
- [64] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Paradox of the particle’s trajectory moving on a string. *Arch. Appl. Mech.*, 79(3):213–223, 2009.
- [65] P. Faurre. Notes d’optimisation. Technical report, Ecole Polytechnique, Dép. de Math. Appl., 1986.
- [66] C.A. Felippa. Error analysis of penalty function technique for constraint definition in linear algebraic systems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 11:709–728, 1977.
- [67] C.A. Felippa. Iterative procedure for improving penalty function solutions of algebraic systems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 12:821–836, 1978.
- [68] F.V. Filho. Finite element analysis of structures under moving loads. *The Shock and Vibration Digest*, 10(8):27–35, 1978.
- [69] U. Finberg. Noise generation of railways wheels. W *2rd Polish–German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, strony 93–104, IPPT PAN, Warszawa, 1991.
- [70] I. Fried. Finite element analysis of time–dependent phenomena. *AIAA J.*, 7:1170–1173, 1989.

-
- [71] L. Fryba. *Vibrations of solids and structures under moving loads*. Thomas Telford House, 1999.
- [72] C.G. Garino, J. Oliver i E. Oñate. Use of hyperelastic J_2 model in hydrocodes. W D.R.J. Owen and E. Oñate, editors, *Computational plasticity. Fundamentals and applications. Proc. Fourth Int. Conf.*, pages 1889–1900, Barcelona, 1995.
- [73] C.W. Gear. The numerical integration of ordinary differential equations. *Math. Comp.*, 21:146–156, 1967.
- [74] A.E. Giannakopoulos. An adaptive meshing scheme for the steady state convective-diffusion problems using FEM. *Comput. and Struct.*, 31:545–551, 1989.
- [75] M.E. Gurtin. Variational principles for linear elastodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16:34–50, 1964.
- [76] M.E. Gurtin. Variational principles for linear initial–value problems. *Quart. Appl. Math.*, 22:252–256, 1964.
- [77] R.P.S. Han, J. Lu, H. Chen i R Houlston. SUPRA — a novel space–time finite element. W J. Robinson, editor, *FEM today and the future*, 1993.
- [78] K. Heiduschke. Why, for finite deformations, the updated lagrangian formulation is obsolete. W *Fourth Int. Conf. on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS 4)*, strony 2165–2176, Barcelona, Spain, 1995.
- [79] K. Hempelmann, F. Hiss, K. Knothe i B. Ripke. The formation of wear patterns on rail tread. *Wear*, strony 179–195, 1991.
- [80] I. Herrera i J. Bielak. A simplified version of Gurtin’s variational principles. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 53:131–149, 1974.
- [81] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes i R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engng and Struct. Dyn.*, 5:283–292, 1977.
- [82] E. Hinton, T. Rock i O.C. Zienkiewicz. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 4(3):245–249, 1976.

- [83] T. Hirakawa, F. Fujita, M. Kamata i Y. Yamada. Analysis of strip rolling by the finite element method. W *Advanced Technology of Plasticity*, strony 1132–1137. 1984. vol. II.
- [84] C. Hoff, T.J.R. Hughes, G. Hulbert i P.J. Pahl. Comparison of the Hilbert–Hughes–Taylor α -method and the θ_1 -method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 76:87–93, 1989.
- [85] N.J. Hoff. Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformation. *Q. Appl. Math.*, 12(1):49, 1954.
- [86] T.J.R. Hughes i G.M. Hulbert. Space–time element methods for elastodynamics: formulations and error estimates. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 66:339–363, 1988.
- [87] T.J.R. Hughes, I. Levit i J. Winget. An element by element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 36:241–254, 1983.
- [88] T.R.J. Hughes, R.L. Taylor, J.L. Sackman, A. Cournier i W. Kanokkulchai. A finite element method for a class of contact–impact problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 8:249–276, 1976.
- [89] G.M. Hulbert. *Space–time finite element method for second–order hyperbolic equation*. PhD thesis, Stanford University, CA, August 1989.
- [90] M. Jean. Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformations problems. *J. Theor. Appl. Mech.*, 7, 1988. Special issue, supplement No. 1.
- [91] I.W. Johnson, A.J. Wathen i M.J. Baines. Moving finite element methods for evolutionary problems. II. Applications. *J. Comput. Phys.*, 79(2):270–297, 1988.
- [92] K.L. Johnson. Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces. *Proc. of the Royal Society, Series A*, 230:531–548, 1955.
- [93] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, New York, 1987.
- [94] K.-J. Joo i E.L. Wilson. An adaptive finite element technique for structural dynamic analysis. *Comput. and Struct.*, 30(6):1319–1339, 1988.

- [95] Z. Kacprzyk. Analiza drgań komina przemysłowego obciążonego sejsmicznie. *Archiwum Inż. Ląd.*, 27(3):507–516, 1981.
- [96] Z. Kacprzyk. Superelement czasoprzestrzenny. *Archiwum Inż. Ląd.*, 28(1–2):47–55, 1982.
- [97] Z. Kacprzyk. O zastosowaniu funkcji ważonych w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Prace Naukowe, Budownictwo, Politechnika Warszawska*, (85):83–94, 1984.
- [98] Z. Kacprzyk i T. Lewiński. Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom. *Eng. Trans.*, 31(2):213–240, 1983.
- [99] J.J. Kalker. Survey on wheel–rail rolling contact theory. *Vehicle System Dynamics*, 5:317–358, 1979.
- [100] J.J. Kalker. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [101] J.J. Kalker. Considerations on rail corrugation. *Vehicle System Dynamics*, 23:3–28, 1994.
- [102] Z. Kączkowski. The method of finite space–time elements in dynamics of structures. *J. Tech. Phys.*, 16(1):69–84, 1975.
- [103] Z. Kączkowski. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 22(3):365–378, 1976.
- [104] Z. Kączkowski. General formulation of the stiffness matrix for the space–time finite elements. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):351–357, 1979.
- [105] Z. Kączkowski. O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych. *Mechan. Teor. i Stos.*, 21(4):531–542, 1983.
- [106] Z. Kączkowski. niesprężone układy równań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Arch. Inż. Ląd.*, 32(1):39–50, 1986.
- [107] Z. Kączkowski. O rozwiązywaniu pewnego dynamicznego problemu kontaktowego metodą elementów czasoprzestrzennych. *Zeszyty Nauk. PP, Budownictwo*, 31:63–72, 1988.
- [108] Z. Kączkowski. A heat flow and mass transport problem. The space–time element method (STEM). W *Proc. 10th Polish Conf. Comp. Meth. in Mech.*, pages 317–324, Świnoujście, 1991.

- [109] Z. Kączkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych — jej zalety i wady. W *VIII Symp. Dynamiki i Konstrukcji*, strony 259–266, Jawor, 1993.
- [110] Z. Kączkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych. W *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, pod red. M. Kleibera, strony 154–206. PWN Warszawa, 1995.
- [111] Z. Kączkowski i J. Langer. Synthesis of the space-time finite element method. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(1):11–17, 1980.
- [112] Z. Kączkowski i M. Witkowski. Uwzględnienie tłumienia zewnętrznego w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 23(3):243–254, 1977.
- [113] Z. Kączkowski i M. Witkowski. Macierz przeniesienia w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 24(1):59–66, 1978.
- [114] Z. Kączkowski i M. Żyszko. Drgania giętne pręta metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 24(1):67–78, 1978.
- [115] N. Kikuchi i J.T. Oden. *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element method*. SIAM, 1988.
- [116] M. Klasztorny. *Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkojeżdżącymi*. WNT, Warszawa, 2005.
- [117] M. Kleiber. *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, strony 117–120. PWN, 1985.
- [118] M. Kleiber i M. Korzeniowski. Ocena efektywności metody element po elemencie w liniowej i nieliniowej analizie konstrukcji. *Mechanika i Komputer*, 10:5–17, 1991.
- [119] K. Knothe. *Rail Corrugations*. ILR Bericht 56, Berlin, 1983.
- [120] K. Knothe i K. Hempelmann. The formation of corrugation pattern on the rail tread. A linear theory. W *2nd Polish-German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, strony 77–91, IPPT PAN, Warszawa, 1991.
- [121] Z.B. Kuang i S.N. Atluri. Temperature field due to a moving heat source. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 52:274–280, 1985.

- [122] J. Langer. Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równania różniczkowego ruchu. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):359–369, 1979.
- [123] F. Lebon i M. Raous. Multibody contact problem including friction in structure assembly. *Comput. and Struct.*, 43:925–934, 1992.
- [124] T. Lewiński. Stability analysis of a difference scheme for the vibration equation with a finite number of degrees of freedom. *Zastosowania Matematyki*, 18(3):473–486, 1984.
- [125] R. Löhner. Adaptive finite element for transient problems with moving bodies. *Comput. and Struct.*, 30(1–2):303–317, 1988.
- [126] O. Mahrenholtz, J. Rońda, R. Bogacz i M. Brzozowski. Finite deformation in the rolling contact problem. W *Proc. Int. Conf. on Nonlinear Mechanics*, strony 290–295, Shanghai, October 1985.
- [127] R.I. Maier. Natural frequency of rail track and its relationship to rail corrugation. W *Rail Research Papers of B.H.P. Steel International Group*, strony 89–103. Melbourne, 1976.
- [128] K. Miller. Moving finite elements. II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(6):1033–1057, 1981.
- [129] K. Miller i R.N. Miller. Moving finite elements. I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(6):1019–1032, 1981.
- [130] J.J. Moreau. *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, strony 11–82. Number 302 in CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, 1988.
- [131] R. Mullen i T. Belytschko. An analysis of an unconditionally stable explicit method. *Comput. and Struct.*, 16:691–696, 1983.
- [132] N.M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE J. of Engng Mech. Div.*, 85:67–94, 1959.
- [133] W. Nowacki. *Dynamika budowli*. Arkady, Warszawa, 1972.
- [134] J.T. Oden. A generalized theory of finite elements, II. Applications. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1:247–259, 1969.

- [135] J.T. Oden i T.L. Lin. On the general rolling contact problem for finite deformations of viscoelastic cylinder. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 57:297–367, 1986.
- [136] K. C. Park i C. A. Felippa. *Partitioned Analysis of Coupled Systems*, chapter Adaptive finite element method and its applications. North-Holland, Amsterdam–New York, 1983.
- [137] K.C. Park. An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations. *Journal of Applied Mechanics*, 42:464–470, 1975.
- [138] K.C. Park. Practical aspects of numerical time integration. *Comput. and Struct.*, 7:343–353, 1977.
- [139] K.C. Park i J.M. Housner. Semi-implicit transient analysis procedures for structural dynamics analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 18:609–622, 1982.
- [140] J. Pelc. Nieliniowe funkcje kształtu w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 30(1):53–63, 1987.
- [141] P. Perrochet i P. Azerad. Space–time integrated least–squares: solving a pure advection equation with a pure diffusion operator. *J. Comput. Phys.*, 117:183–193, 1995.
- [142] L.R. Petzhold. Observations on an adaptive moving grid method for one–dimensional systems of partial differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 3:347–360, 1987.
- [143] M. Pietrzakowski. Simulation investigation of damping in nonlinear torsional discrete–continuous system. *Machine Dyn. Probl.*, 3:65–77, 1992.
- [144] M. Pietrzakowski. Analiza stanów nieustalonych w układach napędowych przy użyciu metody elementów czasoprzestrzennych. *Prac IPBM, Politechnika Warszawska*, 16:97–112, 1995.
- [145] M. Pietrzakowski. Sprężysto–tarciowy model nierozłącznego połączenia listwy z podłożem w metodzie elementów czasoprzestrzennych. W *Księga jubileuszowa profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, strony 321–332. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.

- [146] A. Podhorecka. Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. *Mech. Teoret. i Stos.*, 26(4):683–699, 1988.
- [147] A. Podhorecka i A. Podhorecki. Metoda elementów czasoprzestrzennych w zastosowaniu do rozwiązywania ciągnięć wiotkich. W *Księga jubileuszowa profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, strony 333–343. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.
- [148] A. Podhorecki. The viscoelastic space–time element. *Comput. and Struct.*, 23:535–544, 1986.
- [149] A. Podhorecki. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. *Prace Nauk. ATR w Bydgoszczy, Budownictwo*, 24:21–29, 1987.
- [150] A. Podhorecki. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Rozpr. Inż.*, 37(1):41–51, 1989.
- [151] A. Podhorecki. Metoda elementów czasoprzestrzennych w geometrycznie nieliniowej teorii lepkosprężystości. Raport techniczny 45, Zeszyty Nauk. ATR w Bydgoszczy, Rozprawy, 1991.
- [152] A. Podhorecki. *Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych*. Wydawnictwa AT-R w Bydgoszczy, 2005.
- [153] A. Podhorecki i A. Podhorecka. Lepkosprężysty element czasoprzestrzenny. *Engng. Trans.*, 33(1–2):3–22, 1985.
- [154] G. Prathap. *The finite element method in structural mechanics*. Kluwer Academic Press, 1993.
- [155] G. Rakowski i Z. Kacprzyk. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. OW PW, Warszawa, 2005.
- [156] M.M. Rashid. Deformation extrapolation and initial predictors in large–deformation finite element analysis. *Comp. Mech.*, 16:281–289, 1995.
- [157] A.B. Richelsen. Friction modelling in a finite strain viscoplastic analysis of a rolling process. W *Euromech 273, Unilateral contact and dry friction*, pages 121–124, La Grande Motte, France, 1990.
- [158] R.D. Richtmyer i K.W. Morton. *Difference methods for initial–value problems*. John Wiley & Sons, 1967.

- [159] B. Ripke i K. Knothe. High frequency vehicle-track interactions in consideration of nonlinear contact mechanics. W *3rd Polish-German Workshop on Dynamical Problems in Mechanical Systems*, strony 207–218, IPPT PAN, Warszawa, 1993.
- [160] J. Robinson. An introduction to hierarchical displacement elements and the adaptive technique. *Finite Elem. Anal. and Des.*, 2:377–388, 1986.
- [161] J. Rojek. Modelowanie i symulacja komputerowa złożonych zagadnień mechaniki nieliniowej metodami elementów skończonych i dyskretnych. Prace IPPT, 5, Warszawa, 2007.
- [162] Y. Sato, A. Matsumoto i K. Knothe. Review on rail corrugation studies. *Wear*, 253(1-2):130–139, 2002.
- [163] J.B. Seaborn. *Hypergeometric functions and their applications*. Springer, New York, 1991.
- [164] C.E. Smith. Motion of a stretched string carrying a moving mass particle. *J. Appl. Mech.*, 31(1):29–37, 1964.
- [165] Z. Strzyżakowski. *Modelowanie zjawisk dynamicznych w układach transportowych*. Politechnika Radomska, Radom, 2006.
- [166] W. Szcześniak. Inercyjne obciążenia ruchome na belkach. Prace Naukowe, Politechnika Warszawska, Budownictwo 112, 1990.
- [167] W. Szcześniak. Wybrane zagadnienia dynamiki płyt poddanych inercyjnym obciążeniom ruchomym. Prace Naukowe, Politechnika Warszawska, Budownictwo 119, 1992.
- [168] W. Szcześniak. *Wybrane zagadnienia kolejowe. Wzajemne oddziaływanie w układzie pojazd-tor kolejowy-podtorze-podłoże gruntowe*. Prace Naukowe PW, Budownictwo 120. Politechnika Warszawska, Warszawa, 1995.
- [169] J. Szmelter. *Metody komputerowe w mechanice*. Biblioteka Naukowa Inżyniera. PWN, 1980.
- [170] F. Taltello i G. Burkhardt. Zur Anwendung der Methode der Raum-Zeit-Elemente auf die dynamische Untersuchung von Stahlbetonbauteilen. Raport techniczny 68, Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar, 1988.

- [171] D.M. Trujillo. An unconditionally stable explicit algorithm for structural dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 11:1579–1592, 1977.
- [172] N.-E. Wiberg, L. Zeng i X. Li. Error estimation and adaptivity in elastodynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 101:369–395, 1992.
- [173] M. Witkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych jako ciąg zadań typu statycznego. *Archiwum Inż. Łąd.*, 26(4):727–734, 1980.
- [174] M. Witkowski. *O czasoprzestrzeni w dynamice budowli*. Prace Naukowe, Budownictwo 80. Politechnika Warszawska, 1983.
- [175] M. Witkowski. Trójkątne elementy czasoprzestrzenne w analizie zagadnień falowych. *Engng. Trans.*, 33(4):549–564, 1985.
- [176] M. Witkowski. Scena i kulisy metody elementów czasoprzestrzennych. W *Księga jubileuszowa profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, strony 45–55. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.
- [177] W.L. Wood. A unified set of single step algorithms. Part ii: Theory. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 20:2303–2309, 1984.
- [178] W.L. Wood, M. Bossak i O.C. Zienkiewicz. An alpha modification of Newmark's method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 15:1562–1566, 1981.
- [179] P. Wriggers i B. Nour-Omid. Solution methods for contact problems. Technical Report UCBśESM 84–09, Univ. of California, Berkeley, USA, 1984.
- [180] Y.B. Yang, J.D. Yau i Y.S. Wu. *Vehicle-bridge interaction dynamics*. World Scientific, 2004.
- [181] P.A. Zegeling. Moving-grid methods for time-dependent partial differential equations. Raport techniczny 94, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1993.
- [182] L.F. Zeng i N.-E. Wiberg. Spatial mesh adaptation in semidiscrete finite element analysis of linear elastodynamic problems. *Comp. Mech.*, 9(5):315–332, 1992.
- [183] L.F. Zeng, N.-E. Wiberg i L. Bernspång. An adaptive finite element procedure for 2D dynamic transient analysis using direct integration. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 34:997–1014, 1992.

-
- [184] J. Zhu i O.C. Zienkiewicz. Adaptive techniques in the finite element method. *Commun. Appl. Numer. Meth.*, 4:197–204, 1988.
- [185] O.C. Zienkiewicz. The generalized finite element method – state of the art and future directions. *Trans. ASME*, 50:1210–1217, 1983.
- [186] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, J. Gago i I. Babuska. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. W J. Whiteman, editor, *Mathematics of finite elements and applications (IV)*, strony 313–346, New York, 1983. Academic Press.
- [187] O.C. Zienkiewicz, W.L. Wood, N.W. Hine i R.L. Taylor. A unified set of single step algorithms. Part i: General formulation and applications. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 20:1529–1552, 1984.
- [188] O.C. Zienkiewicz i J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24:337–357, 1987.
- [189] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu i N.G. Gong. Effective and practical h - p -version adaptive analysis procedures for the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 28:879–891, 1989.